

МАТЕМАТИЧЕСКАЯ МОДЕЛЬ МНОГООТРАСЛЕВОГО ПРОИЗВОДСТВА С УЧЕТОМ ЭКОЛОГИЧЕСКОГО ФАКТОРА

М.П. Дымков, Е.И. Шилкина

Белорусский государственный экономический университет, dymkov_m@bseu.by

Многошаговые динамические системы возникают при математическом моделировании различных индустриальных производств и экономических процессов. Примерами таких производств могут быть химико–технологические процессы, сложные наукоемкие технологические линии конвейерного типа, каскадные очистительные сооружения, крупные многоотраслевые и взаимосвязанные производства в рамках национальных экономик и другие.

Ниже приведена двухпараметрическая (2–D) модель многоотраслевого производства, в котором учитывается экологический фактор, когда наряду с процессом производства товаров присутствует процесс уничтожения ущербов в окружающую среду, порождаемых процессом производства. Определенные трудности рассматриваемых математических моделей порождаются естественным требованием неотрицательности используемых параметров и переменных. В данной работе для исследования многошаговых линейных дискретных систем и задач оптимизации используется операторный подход, развитый в [1,2]. Некоторые результаты по теории положительных 1–D и 2–D систем можно найти в книге Т. Качорека [3], новые приемы изучения неотрицательных систем линейных уравнений и их операторных аналогов, возникающих при описании открытых экономических систем типа Леонтьева – Форда [4], изложены в работе [5].

Постановка задачи. В последнее время задача уменьшения ущерба, наносимого окружающей среде вредными отходами, приобрела первостепенное значение для современной экономической деятельности. Поэтому все более актуальными становятся математические модели экономических процессов, в которых наряду с процессом производства товаров присутствует процесс уничтожения ущербов окружающей среде, возникающих при этом производстве. По–видимому, впервые такого типа модели были рассмотрены В. Леонтьевым в 1970 году [4]. Предположим, что:

1) имеется имеется набор товаров (благ), потребляемых потребителями и для производство которых требуется осуществить технологический цикл, состоящий из последовательно выполняемых $s = 1, 2, \dots, h$ стадий (или этапов) обработки, т.е. товар считается готовым, если осуществлены все h предписанных стадий;

2) производство благ планируется на длительный срок, так что после завершения текущего –го ($k = 1, 2, \dots$) цикла процесс производства возобновляется на следующем ($k + 1$)–ом цикле. Длительный срок означает, что $k \rightarrow \infty$;

3) на очередной ($s + 1$)–ой стадии нового ($k + 1$)–го цикла произведенные на предыдущей s –ой стадии текущего цикла блага используются для производства новых благ, для уничтожения ущербов, возникших на предыдущем цикле, и для потребления на текущем ($k + 1$)–ом цикле. Далее, возникающие при таком производстве ущербы на s –ой стадии ($k + 1$)–го цикла, в свою очередь, состоят, во–первых, из ущербов, получаемых от производства благ текущего ($k + 1$)–го цикла, во–вторых, от уничтожения ущербов из предыдущего k –го цикла, полученных на –ой стадии, и, в третьих, от неуничтожаемых ущербов, остающихся в окружающей среде;

4) набор благ и ущербов состоит соответственно из n и m штук наименований.

Для математического описания такого производства введем необходимые определения и обозначения. Для каждой пары (k, s) , $s = 1, 2, \dots, h$; $k = 1, 2, \dots$, обозначим через :

1) $x(k, s) = (x_1(k, s), x_2(k, s), \dots, x_n(k, s)) \in \mathbb{R}^n$ – объем произведенных благ (товаров для потребителей) к началу s –ой стадии k –го цикла производства;

2) $y(k, s) = (y_1(k, s), y_2(k, s), \dots, y_m(k, s)) \in \mathbb{R}^m$ – объем ущербов, возникающих в процессе производства и уничтожаемых в системе в начале s –ой стадии k –го цикла производства;

3) $c(k, s) = (c_1(k, s), c_2(k, s), \dots, c_n(k, s)) \in \mathbb{R}^n$ – объем потребляемых благ на –ой стадии в k –ом цикле ;

4) $d(k, s) = (d_1(k, s), d_2(k, s), \dots, d_m(k, s)) \in \mathbb{R}^m$ – объем неуничтожаемых ущербов, остающихся в окружающей среде в результате производства на –ой стадии в k –ом цикле;

5) a_{il} – доля l -го типа благ, которая необходима для производства единицы блага i -го типа ($i = 1, \dots, n; l = 1, \dots, n$);

6) b_{ij}^0 – доля производимых благ j -го типа, используемых в процессе уничтожения ущербов i -го типа ($i = 1, \dots, n; j = 1, \dots, m$);

7) c_{lj} – доля ущерба l -го типа, возникающего в процессе производства блага j -го типа ($l = 1, \dots, n; j = 1, \dots, m$);

8) d_{qj}^0 – доля ущербов q -го типа, возникающих в процессе уничтожения ущербов j -го типа ($j = 1, \dots, m; q = 1, \dots, m$).

Введем еще матрицы следующего вида:

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix}, \quad B_0 = \begin{pmatrix} b_{11}^0 & b_{12}^0 & \dots & b_{1m}^0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ b_{n1}^0 & b_{n2}^0 & \dots & b_{nm}^0 \end{pmatrix},$$

$$C = \begin{pmatrix} c_{11} & c_{12} & \dots & c_{1n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ c_{m1} & c_{m2} & \dots & c_{mn} \end{pmatrix}, \quad D_0 = \begin{pmatrix} d_{11}^0 & d_{12}^0 & \dots & d_{1m}^0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ b_{m1}^0 & b_{m2}^0 & \dots & b_{mm}^0 \end{pmatrix}.$$

Тогда с учетом введенных обозначений, а также баланса объемов благ и ущербов, получим следующую многошаговую 2 – D модель многотраслевого производства, учитывающую экологический фактор:

$$\begin{cases} x(k+1, s+1) = Ax(k+1, s) + B_0y(k, s) + c(k, s) \\ y(k+1, s) = Cx(k+1, s) + D_0y(k, s) - d(k, s). \end{cases} \quad (1)$$

при ограничениях

$$\begin{aligned} A \in \mathbb{R}_+^{n \times n}, \quad B_0 \in \mathbb{R}_+^{m \times n}, \quad C \in \mathbb{R}_+^{m \times m}, \quad D_0 \in \mathbb{R}_+^{m \times m}, \\ x(k, s) \geq 0, \quad y(k, s) \geq 0, \quad c(k, s) \geq 0, \quad d(k, s) \geq 0, \quad \forall (k, s). \end{aligned} \quad (2)$$

Начальные данные в (1) имеют вид

$$x(k, 0) = \alpha_{k+1}, \quad k \geq 0; \quad y(0, s) = f_s, \quad s = 1, 2, \dots, h. \quad (3)$$

Одной из исследуемых задач является описание условий на технологические матрицы A, B_0, C, D_0 , при которых система уравнений (1) имеет неотрицательное решение (x, y, d) при любом уровне спроса s . Другая задача заключается в изучении вопроса о возможности для заданного уровня спроса s уменьшения объемов ущерба, остающихся в окружающей среде. Другими словами, имеет ли система (1) для заданного уровня спроса s неотрицательное решение вида $(x, y, 0)$ (условия компенсируемости). В работе также обсуждаются линейные задачи оптимизации ущерба при различных ограничениях.

Замечание. Введением соответствующих блочных матриц (операторов) и расширенных векторов (в пространствах последовательностей) указанные модели в принципе можно свести к обобщенному уравнению типа $z = \mathcal{A}z + w$. Однако это сведение не решает вышеупомянутых задач, так как здесь главное препятствие уже заключается в том, что в отличие от модели Леонтьева у вектора w часть компонент, соответствующих производству товаров, неотрицательна, а часть, соответствующая ущербам, неположительна, хотя сам вектор z является неотрицательным.

Список использованных источников:

1. Дымков, М.П. Экстремальные задачи в многопараметрических системах управления / М.П. Дымков. – Минск: Изд-во БГЭУ, 2005. – 363 с.
2. Dymkov, M. Linear optimal control problems for discrete 2D systems // Mathematical Methods of Operations Research, 1998. vol. 47, № 1, 201–216.
3. Kaczorek, T. Positive 1D and 2D Systems / T. Kaczorek. – Berlin: Springer–Verlag, 2001. – 425 p.
4. Леонтьев, В.В. Межотраслевой анализ воздействия структуры экономики на окружающую среду // Экономика и математические методы. 1972, т.8, вып. 3, сс. 370–399.
5. Zabreiko, P. Open Leontiev–Ford model // Proceedings of Institute of Mathematics of the National Academy of Sciences of Belarus. – Minsk: 2007, v. 15, No. 2, pp.15–26.