УДК 330.4.519.86

ДВУСТАДИЙНАЯ МОДЕЛЬ ПРИНЯТИЯ РЕШЕНИЙ ПРИ ОГРАНИЧЕННОМ РИСКЕ

М.А. Воробьев, Н.И. Громко, Н.Н. Писарук

Белорусский государственный университет,[1]*vorobiev@bsu.by, gromko@bsu.by, pisaruk@bsu.by*

Аннотация. В данном исследовании мы расширяем классическую двустадийную модель стохастического программирования для принятия решений в условиях неопределенности, вводя дополнительные неравенства для ограничения риска потерь.

1. Двустадийная модель стохастического программирования.

Рассмотрим двустадийную задачу стохастического программирования, которая формулируется следующим образом:

$$\begin{aligned} c^T x + E(h(\omega)^T y(\omega)) &\to \max, \\ A(\omega)x + G(\omega)y(\omega) &\le b(\omega), \\ x \in X,\ y(\omega) &\in \mathbb{R}_+^m. \end{aligned} \tag{1}$$

В этой формулировке решение для использования в текущем временном периоде представлено вектором $x \in X$ *ожидаемых переменных*, где $X \subseteq \mathbb{R}^n$ есть некоторое множество (например, $X = \mathbb{R}_+^n$, $X = \mathbb{Z}_+^n$ или $X = \{x \in \mathbb{R}^n : Dx \le u\}$). Решение $x \in X$ нужно принять до того, как в следующем периоде реализуется элементарное событие ω из вероятностного пространства $(\Omega,\mathcal{A},\mathbb{P})$. Решение $y(\omega)$ принимается в этом следующем периоде после наблюдения события ω. Поэтому вектор y *адаптивных переменных* есть функция от ω. Система $A(\omega)x + G(\omega)y(\omega) \le b(\omega)$ стохастических ограничений связывает ожидаемые и адаптивные переменные. Целевая функция в задаче (1) есть сумма двух членов: детерминированного $c^T x$, оценивающего качество решения x, и ожидаемого значения $E(h(\omega)^T y(\omega))$ случайной величины $h(\omega)^T y(\omega)$, оценивающей качество решения $y(\omega)$.

Задачу (1) можно переформулировать следующим образом:

$$\max\{f(x) : x \in X\}, \tag{2}$$

где $f(x) = E(f(x, \omega))$, а случайная величина $f(x, \omega)$ определяется по правилу:

$$\begin{aligned} f(x, \omega) \stackrel{\text{def}}{=} c^T x + \max\ & h(\omega)^T y(\omega), \\ G(\omega)y(\omega) &\le b(\omega) - A(\omega)x \\ y(\omega) &\in \mathbb{R}_+^m. \end{aligned} \tag{3}$$

Если выборочное пространство бесконечное, то вычисление $f(x)$ может быть очень сложной задачей. Один из подходов состоит в том, чтобы аппроксимировать бесконечное вероятностное пространство конечным пространством [2]. В дальнейшем мы будем предполагать, что $\Omega = \{\omega_1,..., \omega_K\}$ есть конечное множество с распределением вероятностей $p=(p_1,\dots, p_K)^T$, т. е. событие (сценарий) ω_k случается с вероятностью p_k. Для $k = 1,\dots,K$ введем обозначения:

$$h_k = h(\omega_k),\ w_k = p_k h_k,\ A_k = A(\omega_k),\ G_k = G(\omega_k),\ b_k = b(\omega_k),\ y_k = y(\omega_k).$$

Детерминированный эквивалент стохастической задачи (1) записывается следующим образом:

$$\begin{aligned} c^T x + \sum_{k=1}^{K} w_k^T y_k &\to \max, \\ A_k x + G_k y_k \le b_k, &\quad k = 1,\dots, K \\ x \in X,\quad y_k \in \mathbb{R}_+^n, &\quad k = 1,\dots, K \end{aligned} \tag{4}$$

Решив задачу (4), мы получим решение x для использования в текущем временном периоде. Решение x должно быть адекватным всему, что может случиться в следующем периоде. Если бы мы знали, какой сценарий ω_k случится в следующем периоде, мы бы решили задачу:

$$\begin{aligned} c^T x + h_k^T y_k &\to \max, \\ A_k x + G_k y_k &\le b_k, \\ x \in X,\quad y_k &\in \mathbb{R}_+^m, \end{aligned}$$

которая учитывает ограничения только для данного сценария. Но поскольку мы не знаем, какой из сценариев реализуется, то в задаче (4) мы требуем выполнения ограничений $A_k x + G_k y_k \le b_k$ для всех сценариев $k = 1,\ldots, K$.

В дальнейшем мы расширим двустадийную модель стохастического программирования (1), добавив к ней систему неравенств, ограничивающую риск потерь при принятии решения x.

2. Выбор меры риска.

Максимизация ожидаемой прибыли предполагает повторяемость процесса принятия решения достаточно большое количество раз при одинаковых условиях. Только тогда асимптотические утверждения, такие, как закон больших чисел, гарантируют сходимость в вероятностных терминах случайных величин к их ожидаемым значениям. В других ситуациях мы не можем не учитывать риск получения прибыли, которая существенно меньше ожидаемого значения. Определение подходящих мер риска является предметом активных исследований.

В нашем случае понятие риска удобнее вводить в терминах функции потерь $g(x,\omega)$, которая зависит от решения x и является случайной величиной, определенной на вероятностном пространстве (Ω,A,P) $(\omega \in \Omega)$.

Исторически первое и, пожалуй, самое известное понятие риска ввел Нобелевский лауреат в области экономики 1990 г. Х. Марковиц. Он определил риск как вариацию (дисперсию) потерь: var $(g(x,\omega))=E((g(x,\omega)-E(g(x,\omega)))^2)$.

Концептуально такое понятие риска имеет несколько недостатков. Самый важный из них в том, что данная мера риска симметрична: она одинаково штрафует за получение как меньших, так и больших потерь, чем ожидаемое значение.

Еще одна не менее известная мера риска под названием VaR (Value–at–Risk) была разработана финансовыми инженерами компании J. P. Morgan. Пусть

$$G(x,\eta) \stackrel{\text{def}}{=} \mathbb{P}\{\, \omega \in \Omega : g(x,\omega) \le \eta\}$$

есть функция распределения случайной величины $g(x,\omega)$. Для заданной вероятности $0< \alpha< 1$ мера VaR_α определяется по формуле

$$\mathrm{VaR}_\alpha(x) \stackrel{\text{def}}{=} \min\{\eta\colon G(x,\eta) \ge \alpha\}.$$

Для дискретного вероятностного пространства с $\Omega=\{\omega_1,\ldots,\omega_K\}$, чтобы вычислить $\mathrm{VaR}_\alpha(x)$, нужно:

1) записать значения $g_k(x) \stackrel{\text{def}}{=} g(x,\omega_k)$ в возрастающем порядке:
$$g_{\pi(1)}(x) \le g_{\pi(2)}(x) \le \ldots \le g_{\pi(K)}(x);$$
2) найти минимальный индекс j такой, что $\sum_{i=1}^{j} p_{\pi(i)} \ge \alpha$, и положить
$$\mathrm{VaR}_\alpha(x)= g_{\pi(j)}(x).$$

Мера риска VaR широко используется в финансовой индустрии, и ее вычисление является одним из стандартных атрибутов большинства программ финансового анализа. Несмотря на свою популярность, мера VaR также не без недостатков. Одним из таких недостатков является то, что эта мера никак не оценивает величину потерь, превосходящих $\mathrm{VaR}_\alpha(x)$ Другим недостатком меры VaR является то, что функция $\mathrm{VaR}_\alpha(x)$ не является супераддитивной. В финансовой терминологии супераддитивность выражает тот факт, что диверсификация инвестиций снижает риск. Еще один недостаток меры $\mathrm{VaR}_\alpha(x)$ заключается в том, что функцию $\mathrm{VaR}_\alpha(x)$ трудно использовать в оптимизации, поскольку она не является выпуклой. Эти и другие недостатки меры VaR мотивировали появление ряда ее модификаций.

Содержательно, мера $\mathrm{CVaR}_\alpha(x)$ (Conditional–Value–at–Risk) определяется как ожидаемые (средние) потери, при условии, что эти потери не меньше $\mathrm{VaR}_\alpha(x)$. Формально, $\mathrm{CVaR}_\alpha(x)$ определяется как матожидание случайной величины $g(x,\omega)$ с так называемым α–хвостовым распределением

$$G(x,\eta) \stackrel{\text{def}}{=} \begin{cases} 0, & \text{если } \eta < \mathrm{VaR}_\alpha(x) \\ \dfrac{G(x,\eta) - \alpha}{1-\alpha}, & \text{если } \eta \ge \mathrm{VaR}_\alpha(x) \end{cases}$$

По определению $\mathrm{CVaR}_\alpha(x)=\int_{-\infty}^{\infty} \eta dG_\alpha(x,\eta)$. Данное определение трудно использовать в вычислениях. Следующее утверждение снимает это затруднение.

Теорема 1 [3] Справедливы равенства

$$\mathrm{CVaR}_\alpha(x) = \min\{g_\alpha(x, \eta)\colon \eta \in \mathbb{R}\} = g_\alpha(x, \mathrm{VaR}_\alpha(x)),$$

где $$g_\alpha(x, \eta) \stackrel{\text{def}}{=} \eta + \frac{1}{1-\alpha} \int_\Omega \max\{ g(x,\omega) - \eta, 0\}\, \mathbb{P}(d\omega).$$

Как и ранее, здесь мы также ограничимся рассмотрением сценарного подхода. Поэтому снова предположим, что $\Omega = \{\omega_1,\dots,\omega_K\}$ есть конечное множество с распределением вероятностей $p = (p_1,\dots,p_K)^T$. В этом случае

$$g(x,\eta) = \eta + \frac{1}{1-\alpha}\sum_{k=1}^{K} p_k \max\{g_k(x)-\eta, 0\}, \qquad \text{где } g_k(x) = g(x,\omega_k). \tag{5}$$

3. Расширенная двустадийная модель.

Снова рассмотрим двустадийную задачу (1). Но теперь мы хотим максимизировать ожидаемую прибыль при ограниченном риске $\mathrm{CVaR}_\alpha(x) \le r$, где r есть максимально допустимый уровень риска.

Вводя переменные z_k для представления $\max\{g_k(x)-\eta,0\}$ в формуле (5), мы можем расширить детерминированный вариант (4) задачи (1) следующим образом:

$$\begin{gathered}
c^T x + \sum_{k=1}^{K} w_k^T y_k \to \max,\\
A_k x + G_k y_k \le b_k, \quad k = 1,\dots,K,\\
\eta + \frac{1}{1-\alpha}\sum_{k=1}^{K} p_k z_k \le r,\\
g_k(x) - \eta - z_k \le 0, \quad k = 1,\dots,K,\\
\eta \in \mathbb{R},\ x \in X,\\
z_k \ge 0,\ y_k \in \mathbb{R}_+^m, \quad k = 1,\dots,K.
\end{gathered} \tag{6}$$

Задача (6) будет задачей линейного программирования, если функции $g_k(x)$ $(k = 1,\dots,K)$ линейные и X есть многогранник. Особый интерес представляет также случай, когда $g(x,\omega) = -f(x,\omega)$ (заметим, что $f(x,\omega)$ есть нелинейная функция). Тогда задачу (6) можно переписать следующим образом:

$$\begin{gathered}
c^T x + \sum_{k=1}^{K} w_k^T y_k \to \max,\\
A_k x + G_k y_k \le b_k, \quad k = 1,\dots,K,\\
\eta + \frac{1}{1-\alpha}\sum_{k=1}^{K} p_k z_k \le r,\\
c^T x + h_k^T y_k + \eta + z_k \ge 0, \quad k = 1,\dots,K,\\
\eta \in \mathbb{R},\ x \in X,\\
z_k \ge 0,\ y_k \in \mathbb{R}_+^m, \quad k = 1,\dots,K.
\end{gathered} \tag{7}$$

Убедиться в эквивалентности задач (6) и (7) несложно. Достаточно заметить, что по определению

$$g_k(x) = -c^T x - \max\{h_k^T y_k : G_k y_k \le b_k - A_k x\}$$

и поскольку

$$c^T x + \sum_{k=1}^{K} w_k^T y_k = \sum_{k=1}^{K} p_k \left(c^T x + h_k^T y_k\right),$$

то в оптимальном решении $(x^*; y_1^*,\dots,y_K^*; \eta^*; z_1^*,\dots,z_K^*)$ задачи (7) вектор y_k^* является оптимальным решением задачи $\max\{h_k^T y_k : G_k y_k \le b_k - A_k x\}$ и, следовательно, $g_k(x^*) = -c^T x - w_k^T y_k^*$.

Список использованных источников

1. Birge, J. R. Introduction to stochastic programming / J. R. Birge, F. V. Louveaux. Springer Verlag, New York, 1997.

2. Pflug, G.Ch. Scenario tree generation for multiperiod financial optimization by optimal discretization / G. Ch. Pflug // Math. Program. 2001. Vol. 89. P. 251–271.

3. Rockafellar, R. T. Optimization of Conditional Value–at–Risk / R. T. Rockafellar, S. Uryasev // J. Risk. 2000. Vol. 2. P. 21– 41.