УДК 336.01:51(075.8)

О НЕКОТОРЫХ ПОДХОДАХ К ОЦЕНИВАНИЮ ФИНАНСОВЫХ ДЕРИВАТИВОВ НА НЕПОЛНЫХ РЫНКАХ

П.М. Лаппо
Белорусский государственный университет, lappopm@bsu.by

Классическая безарбитражная теория оценивания на полном рынке основана на возможности постороения воспроизводящего (хеджирующего) портфеля для оцениваемого деривατива. В случае неполного рынка существуют различные подходы (См., например, [1]). В настоящей работе предпринята попытка аппроксимации неполного рынка полным с использованием модели фиктивного полного (B,S^*)–рынка, на котором стоимость рисковой ценной бумаги может принимать только два значения.

Рассмотрим одноnериодную модель рынка с двумя активами и двумя возможными значениями стоимости рискового актива в момент 1. Их стоимости в момент 0 равны B_0 и S_0. В момент 1 они равны $B_1(\omega_j) = (1+r)B_0$ и $S_1(\omega_j),\ r \ge 0,\ j = 1,2$. Заметим, что первая ценная бумага является безрисковой, а вторая – рисковой. Такая модель является частным случаем (B,S) –рынка (См. например, [2,4]). Мы предполагаем, что все цены сторого положительны и ценные бумаги являются безгранично делимыми. Стоимости сделок отсутствуют. Для того, чтобы рынок был полным доходности ценных бумаг должны быть линейно независимыми. Это влечет невырожденность матрицы

$$\begin{bmatrix} B_1(\omega_1) & S_1(\omega_1) \\ B_1(\omega_2) & S_1(\omega_2) \end{bmatrix}.$$

Предположим, что производная ценная бумага (дериватив) имеет выплаты в момент 1 , которые являются функцией $S_1(\omega_j)$, то есть

$$V_j = f(S_1(\omega_j)), \qquad j = 1,2.$$

Мы можем сконструировать портфель из безрисковой ценной бумаги и рисковой, который имеет ту же стоимость, что и дериватив в каждом состоянии в момент 1. Пусть он состоит из θ_1 единиц актива B_1 и θ_2 единиц актива S_1. Мы имеем

$$\theta_1 = \frac{V_1 S_1(\omega_2) - V_2 S_1(\omega_1)}{(1+r)B_0 S_1(\omega_2) - (1+r)B_0 S_1(\omega_1)}, \tag{1}$$

$$\theta_2 = \frac{V_2(1+r)B_0 - V_1(1+r)B_0}{(1+r)B_0 S_1(\omega_2) - (1+r)B_0 S_1(\omega_1)} = \frac{V_2 - V_1}{S_1(\omega_2) - S_1(\omega_1)}. \tag{2}$$

При отсутствии арбитражных возможностей, стоимость этого портфеля в момент 0 должна равняться стоимости дериватива в момент 0. Следовательно, стоимость в момент 0 равна

$$V_0 = \theta_1 B_0 + \theta_2 S_0, \tag{3}$$

где θ_1 и θ_2 определяются равенствами (1) и (2). Будет удобным упростить обозначения. Пусть $S_1(\omega_1) = S_0(1+d)$, $S_1(\omega_2) = S_0(1+u)$. При отсутствии арбитража $u > r > d$, и соотношение (3) принимает вид

$$V_0 = \frac{f(S_0(1+d))(u-r)}{(1+r)(u-d)} + \frac{f(S_0(1+u))(r-d)}{(1+r)(u-d)}).$$

Следовательно,

$$V_0 = \frac{1}{1+r} f(S_0(1+d)) \cdot q_1 + \frac{1}{1+r} f(S_0(1+u)) \cdot q_2 \tag{4}$$

где

$$q_1 = \frac{u-r}{u-d}, \quad q_2 = \frac{r-d}{u-d},$$

являются риск–нейтральными вероятностями. Обозначая соответствующую вероятностную меру через Q мы имеем

$$V_0 = E^Q\left[\frac{f(S_1)}{1+r}\right].$$

Это равенство широко известно (См.,например [3]). В дальнейшем без потери общности можно полагать, что $B_0 = B_1 = 1$ (См [2,4]), и $r = 0$.

Аппроксимация неполных рынков.

Из предыдущих рассуждений мы заключаем, что если цена акции принимает только два значения, то мы можем построить воспроизводящий портфель (θ_1, θ_2), и цена деривативa определяется в соответствии с соотношениями (1)–(3). В [5] Такахаши исследует ситуацию, когда цена акции может принимать 3 значения в момент 1 и предлагает подход к выбору мартингальной меры, который является комбинацией метода наименьших квадратов и усеченных полных рынков.

Здесь мы рассмотрим ситуацию, когда цена акции в момент 1 может принимать более, чем 2 значения. Уравнение (4) не может быть применено, так как риск–нейтральная мера Q не является единственной. В этом случае мы можем ввести фиктивный рынок (B, S^*), который является полным и в некотором смысле близок к рассматриваемому. При введении фиктивного рынка нам понадобится мера близости между рассматриваемыми рынками. Для этой цели можно использовать математическое ожидание от некоторой функции $R(y_1, y_2.)$ от $f(S)$ и стоимости воспроизводящего портфеля на (B, S^*) рынке

Более формально, пусть $S_1 = S_0(1+\rho)$, $S_1^* = S_0(1+\rho^*)$, где ρ и ρ^* являются случайными величинами. Мы предполагаем, что случайная величина ρ^* принимает значения u и d, $\Pr(\rho^* = u) = 1 - \Pr(\rho^* = d) = p$. Цены в момент 1 для ценных бумаг S_1 и S_1^* полностью определяются через S_0, ρ, и ρ^*. Мы можем выбрать распределение ρ^* таким образом, чтобы сделать фиктивный рынок близким к исходному (B, S) – рынку. Таким образом мы имеем

$$ER(f(S_1), \theta_1 B_0(1+r) + \theta_2 S_0(1+\rho\ \ )) \to \min_{u,d,p} \tag{5}$$

При решении (5) восроизводящий портфель зависит от u и d. На практике эта задача может быть решена численно с использованием эмпирических распределений.

Если предположить, что $R(y_1, y_2) = (y_1 - y_2)^2$, то тогда

$$R(f(S_1), \theta_1 B_0(1+r) + \theta_2 S_0(1+\rho)) =$$
$$= (f(S_1) - f(S_1^*) - \theta_2 S_0(\rho - \rho^*))\ ^2 =$$

$$= \left[f(S_0(1+\rho) - f(S_0(1+\rho^*) - \frac{f(S_0(1+u)) - f(S_0(1+d))}{u-d}(\rho - \rho^*) \right]^2 .$$

Мы будем искать случайную величину ρ^* в виде

$$\rho^* = \begin{bmatrix} u, & if \quad \rho \geq c, \\ d, & if \quad \rho < c. \end{bmatrix} \qquad (6)$$

Таким образом задача (5) сводится к задаче нахождения такого ρ^* вида (6), которое минимизирует

$$E\left[f(S_0(1+\rho) - f(S_0(1+\rho^*) - \frac{f(S_0(1+u)) - f(S_0(1+d))}{u-d}(\rho - \rho^*) \right]^2 .$$

Она может быть решена численно.

Список использованных источников

1. Staum J. Incomplete Markets/ J. Staum //– Handbooks in OR&MS.vol.15–Elsevier B.V., 2008–p.p.511–563.
2. Ширяев А,Н. К теории расчетов опционов европейского и американского типов . 1. Дискретное время/ А.Н. Ширяев, Ю.М. Кабанов, Д.О. Крамков,А.В. Мельников // Теория вероятностей и ее применения, 1994.т.39 – с.23–77.
3. Panjer, H.H. Financial Economics: With applications to Investments, Insurance and Pensions/ H. Panjer et all//Schaumburg.:1998, –670 p.
4. Ширяев А,Н. Основы финансовой и стохастической экономики . Том 2. /А.Н,Ширяев//– Москва: Фазис,1998. – 544с.
5. Takahashi H. A Note on Pricing Derivatives in an Incomplete Market./H.A.Takahashi// Hitotsubashi University .2000.Discussion paper #2000–05.–13p.