УДК 517.925.54

ДОПУСТИМЫЕ ВОЗМУЩЕНИЯ СИСТЕМЫ ВЗАИМОДЕЙСТВИЯ В СОЦИАЛЬНОЙ СФЕРЕ

Э.В. Мусафиров

Полесский государственный университет, musafirov@bk.ru

Системы дифференциальных уравнений часто используются при моделировании процессов реального мира. Однако, как правило, эти системы не интегрируются в конечном виде, что приводит к необходимости изучать свойства решений по виду самих систем. Для этого можно использовать отображение Пуанкаре (отображение за период) (см., например, [1]), знание которого позволяет решить вопросы существования и устойчивости периодических решений. Несмотря на то, что отображение за период определяется через общее решение системы, иногда удается найти явное выражение отображения за период для неинтегрируемых в конечном виде систем с помощью отражающей функции (ОФ) Мироненко В.И. (см. [2]).

Рассмотрим систему

$$\dot{x} = X(t,x), \quad t \in \mathbf{P}, \quad x \in \mathbf{P}^n, \tag{1}$$

с непрерывно дифференцируемой $X(t,x)$ и общим решением в форме Коши $x = \varphi(t;t_0,x_0)$. ОФ системы (1) определяется [2, с.11] как $F(t,x) := \varphi(-t;t,x)$. Если (1) 2ω–периодична по t, и F – ее ОФ, то $F(-\omega,x) = \varphi(\omega;-\omega,x)$ – отображение за период $[-\omega,\omega]$ этой системы (см. [2, с.59]).

Функция $F(t,x)$ есть ОФ системы (1) тогда и только тогда, когда эта F является решением системы уравнений в частных производных, называемой основным соотношением, $\dfrac{\partial F(t,x)}{\partial t} + \dfrac{\partial F(t,x)}{\partial x} X(t,x) + X(-t,F(t,x)) = 0,$ с начальным условием $F(0,x) \equiv x$.

Непрерывно дифференцируемая F, удовлетворяющая условиям $F(-t,F(t,x)) \equiv F(0,x) \equiv x,$ является ОФ класса систем вида

$$\dot{x} = -\frac{1}{2}\frac{\partial F}{\partial x}(t,F(t,x))\left(\frac{\partial F(t,x)}{\partial t} - 2S(t,x)\right) - S(-t,F(t,x)), \tag{2}$$

где S – произвольная вектор–функция, при которой решения системы (2) однозначно определяются своими начальными условиями. Поэтому все системы вида (1) разбиваются на классы эквивалентности вида (2) таким образом, что каждый класс характеризуется некоторой ОФ, называемой ОФ класса.

Для всех систем из одного класса оператор сдвига [1, с. 11–12] на промежутке $[-\omega,\omega]$ один и тот же. Поэтому все эквивалентные 2ω–периодические системы имеют одно и то же отображение за период.

Иногда можно построить систему, эквивалентную данной, даже не зная ОФ. Например, если система (1) эквивалентна некоторой автономной системе, то эта система совпадает с системой $\dot{x} = X(0,x)$. В классах без автономных систем роль автономной системы выполняет простая система (см. [3])

$$\dot{x} = -\frac{1}{2}\frac{\partial F}{\partial x}(t,F(t,x))\frac{\partial F(t,x)}{\partial t} \equiv -\frac{1}{2}\left(\frac{\partial F(t,x)}{\partial x}\right)^{-1}\frac{\partial F(t,x)}{\partial t},$$

где $F(t,x)$ – ОФ этой системы.

Под допустимыми возмущениями будем понимать возмущения, не меняющие отражающей функции системы (1). Если система (1) автономна (т.е. $X(t,x) \equiv X(x)$), то она является простой и эквивалентной (см. [3]) любой системе $\dot{x} = X(x) + \alpha(t)X(x)$, где $\alpha(t)$ – любая скалярная непрерывная нечетная функция.

Система $\dot{x} = X(t,x) + S(t,x)$, $t \in \mathrm{P}$, $x \in \mathrm{P}^n$ с непрерывно дифференцируемыми вектор–функциями $X(t,x)$ и $S(t,x)$ эквивалентна системе (1) тогда и только тогда (см. [4]), когда

ПолесГУ

$S(t,x)=\sum_{k=1}^{\infty}\alpha_k(t)\Delta_k(t,x),$ где $\alpha_k(t)$ – непрерывные скалярные нечетные функции, а $\Delta_k(t,x)$ являются решениями уравнения $\frac{\partial\Delta}{\partial t}(t,x)+\frac{\partial\Delta}{\partial x}(t,x)X(t,x)-\frac{\partial X}{\partial x}(t,x)\Delta(t,x)=0.$

Теорема. При $a_1=0$ и любых $a_2,b_1,b_2\in\mathbf{R}$ система Иваницкого Г.Р. взаимодействия в социальной сфере (см. [5, с.28]) $\dot{x}=a_1xy-a_2x$, $\dot{y}=b_1xy-b_2x$ эквивалентна (в смысле совпадения ОФ) системе $\dot{x}=-a_2x\ \ 1+\alpha_1(t)$, $\dot{y}=\ \ b_1y-b_2\ \ \ x\ \ 1+\alpha_1(t)\ \ +\alpha_2(t)$, где $\alpha_k(t)$, $k=\overline{1,2}$ – произвольные скалярные непрерывные нечетные функции.

Заметим, что требование нечетности функций $\alpha_k(t)$ для приложений часто не является критичным, так как обычно динамика процессов моделируется на неотрицательной временной полуоси.

Список использованных источников

1. Красносельский, М.А. Оператор сдвига по траекториям дифференциальных уравнений / М.А. Красносельский. – М.: Наука, 1966. – 332 с.
2. Мироненко, В.И. Отражающая функция и исследование многомерных дифференциальных систем / В.И. Мироненко. – Гомель: ГГУ им. Ф.Скорины, 2004. – 196 с.
3. Мусафиров Э.В. Временные симметрии дифференциальных систем. / Э.В. Мусафиров. – Пинск: ПолесГУ, 2009. – 191 с.
4. Мироненко, В.И. Возмущения систем, не изменяющие временных симметрий, и отображения Пуанкаре / В.И. Мироненко, В.В. Мироненко // Дифференц. уравнения. – 2008. – Т. 44, №10. – С. 1347–1352.
5. Оськин, А.Ф. Моделирование исторических процессов и событий / А.Ф. Оськин. − Новополоцк: ПГУ, 2008. – 92 с.

ПолесГУ