УДК 519.24

АНАЛИЗ ФИНАНСОВЫХ ДАННЫХ С ИСПОЛЬЗОВАНИЕМ МОДЕЛЕЙ «КОПУЛА»

А.И. Новик

Гродненский государственный университет имени Янки Купалы, NovikHanna@mail.ru

Анализируется прикладная эффективность применения моделей «копула» в исследовании динамики изменения отношения обменных курсов евро к доллару США (EUR/USD) и евро к российскому рублю (EUR/RUB) НБРБ. Приводится определение копулы и ее свойств. Для практической реализации копула–моделирования используется статистический пакет R.

По результатам событий кризисного периода 2008 – 2009 годов Базельский Комитет по банковскому надзору опубликовал документ «Банковское регулирование и надзор (Базель II)», описывающий порядок оценки рисков для цели расчета достаточности капитала банков. В документе моделям «копула» отдано предпочтение по сравнению с наиболее распространенными в банковской практике подходами (суммирование, простая диверсификация и дисперсионно–ковариационный подход). Это объясняется тем, что модели «копула» позволяют моделировать совместные многомерные распределения (включая асимметричные), которые не являются нормальными. В октябре 2010 года в документе Базельского Комитета «Развитие подходов к моделированию агрегирования рисков» обобщены основные наблюдения по вопросам агрегирования рисков, позволившие выделить преимущества, получаемые от применения моделей «копула». Таким образом изучение моделей «копула» представляет особую актуальность ввиду законодательных инициатив по регулированию рисков коммерческих банков и контролю уровня достаточности их капитала.

Определение. Функция $C(x, y)$ называется копулой двух переменных x и y, определенных на множестве $[0,1]^2$, с областью значений $[0,1]$ и удовлетворяет следующим условиям:

1. $C(x, 0) = 0, C(0, y) = 0$;
2. $C(x, 1) = x, C(1, y) = y$;
3. $C(x_2, y_2) + C(x_1, y_1) - C(x_2, y_1) - C(x_1, y_2) \geq 0$, где $(x_1, y_1) \in [0,1]^2$, $(x_2, y_2) \in [0,1]^2$ такие, что $x_1 \leq y_1, x_2 \leq y_2$

Свойства функции копулы:

1. Ограниченность: $0 \leq C(x, y) \leq 1$.
2. Любая копула лежит в границах Фреше–Хефдинга:
$$\max(x + y - 1, 0) \leq C(x, y) \leq \min(x, y).$$
3. Упорядоченность (доминирование). Копула C_2 доминирует над копулой C_1, или $C_1 \prec C_2$, в случае, когда для $\forall x, y$ верно $C_1(x, y) \leq C_2(x, y)$.
4. Для $(x_1, x_2) \in [0,1]^2$, $(y_1, y_2) \in [0,1]^2$ справедливо
$$\left|C(x_2, y_2) - C(x_1, y_1)\right| \leq \left|x_2 - x_1\right| + \left|y_2 - y_1\right|.$$

Использование копул для моделирования совместных вероятностных распределений основано на выводах теоремы Скляра, введенной в 1959 году [2, с. 17].

Теорема (Скляра). Пусть $x, y \in R$ случайные величины, маргинальные функции распределения $F_X(x) = P(X \le x), F_Y(y) = P(Y \le y)$, двумерная функция распределения имеет вид $F_{XY}(x, y) = P(X \le x, Y \le y)$. Тогда существует копула $C(x, y)$, такая что:

$$F_{XY}(x, y) = C(F_X(x), F_Y(y)) \tag{1}$$

Если функции $F_X(x)$ и $F_Y(y)$ непрерывны, то копула (1) единственна, в противном случае копула $C(x, y)$ может быть всегда определена на области значений функций $F_X(x)$ и $F_Y(y)$. Верно и обратное утверждение, то есть если $C(x, y)$ – копула, а $F_X(x)$ и $F_Y(y)$ – маргинальные функции распределения, то функция $F_{XY}(x, y)$, определенная выше, является двумерной функцией распределения случайного вектора (X, Y).

Таким образом, копула – это функция, позволяющая перейти от одномерных распределений случайных величин к их совместному распределению.

Все копулы можно отнести к трем семействам: эллипсообразные (гауссовская; Стьюдента), архимедовы (Франка, Клэйтона) и копулы экстремальных значений (Коши, Гумбеля, Али–Микаэля–Хака).

В данном исследовании используются следующие функции копул:

1) Гауссовская двумерная копула имеет вид:

$$C(x, y) = \int_{-\infty}^{F_X^{-1}(x)} \int_{-\infty}^{F_Y^{-1}(y)} \frac{1}{2\pi\sqrt{1-\theta^2}} \exp\left(\frac{2\theta z_1 z_2 - z_1^2 z_2^2}{2(1-\theta^2)} \right) dz_1 dz_2 \tag{2}$$

,

где $\theta \in [-1,1]$ –параметр копулы.

2) Копула Стьюдента имеет вид:

$$C(x, y) = \int_{-\infty}^{F_X^{-1}(x)} \int_{-\infty}^{F_Y^{-1}(y)} \frac{1}{2\pi\sqrt{1-\theta^2}} \exp\left(1 + \frac{z_1^2 + z_2^2 - 2\theta z_1 z_2}{\nu(1-\theta^2)} \right)^{-\frac{\nu+2}{2}} dz_1 dz_2, \tag{3}$$

где $\theta \in [-1,1]$ –параметр копулы, ν– число степеней свободы копулы.

3) Функция копулы Франка

$$C(x, y) = -\frac{1}{\theta} \ln\left[1 + \frac{(e^{-\theta x} - 1)(e^{-\theta y} - 1)}{e^{-\theta} - 1} \right], \tag{4}$$

где $\theta \in (-\infty, 0) \cup (0, +\infty)$.

Исследование рядов обменных курсов валют состоит из двух этапов. Первый этап заключался в проведении статистического анализа рассматриваемых рядов. Второй – поиск оптимальной копулы для описания распределения остатков оцененой модели.

На втором этапе было реализовано следующее:

- Построена модель GARCH(1,1) для исследуемых рядов;
- Получены стандартизированные остатки;
- Оценены функции распределения этих остатков;
- По ним построены и оценены копулы;
- Среди полученных оценок была выбрана лучшая на основе критериев Акаике и Шварца [1, с.112]. Критерий Акаике имеет вид:
-

$$AIC = T \cdot \log(SSR) + 2n, \tag{5}$$

где T– длина выборки, n– количество значений, SSR– сумма квадратов ошибок.

Критерий Шварца имеет вид:

$$BIC = T \cdot \log(SSR) + n \log T \,. \tag{6}$$

Для каждой из них был рассчитан параметр копулы, значения индекса зависимости верхних (λ_U) и нижних (λ_L) хвостов, которые определяются по следующей формуле в двумерном случае [1, с. 214].

$$\lambda_U = \lim_{t \to 1^-} P[Y > F_Y^{-1}(t) \mid X > F_X^{-1}(t)] \tag{7}$$

$$\lambda_L = \lim_{t \to 0^+} P[Y \le F_Y^{-1}(t) \mid X \le F_X^{-1}(t)]$$

где X, Y– ряды остатков отношения обменных курсов евро к доллару США (EUR/USD) и евро к российскому рублю (EUR/RUB) НБРБ.

Анализ данных проведен с помощью статистического пакета R с открытым кодом, обладающего большим набором функций. Среда R выступает как средство разработки новых методов интерактивного анализа данных.

В данной работе рассматривается динамика изменения отношения обменных курсов евро к доллару США (EUR/USD) и евро к российскому рублю (EUR/RUB) НБРБ в течении следующего периода 01.01.2010–14.03.2012 всего 782 значения.

Рассчитываются описательные статистики для анализируемых рядов.

Таблица 1 – Описательные статистики отношения обменных курсов евро к доллару США (EUR/USD) и евро к российскому рублю (EUR/RUB) НБРБ.

Статистики	EUR/USD	EUR/RUB
Среднее	1,356	40,53
Стандартное отклонение	0,063	1,396
Коэффициент вариации	25,696	29,031
Минимум	1,194	37,45
Максимум	1,489	43,73
Медиана	1,359	40,33
Асимметрия	–0,245	0,261
Эксцесс	–0,582	–0,65
Статистика Харке–Бера	9,12e–0,5	1,351e–0,5
X^2– тест	18,6048	22,424

Стоит отметить основные наблюдения по таблице 1:

- коэффициент вариации показывает, что наибольший относительный разброс у ряда отношения обменного курса евро к российскому рублю (EUR/RUB);
- статистика Харкера–Бера велика, что указывает на факт, что данные не распределены по нормальному закону.

Временные ряды моделировались с помощью модели GARCH(1,1). Методом максимального правдоподобия оценены параметры построенной модели.

Таблица 2 – Оценка модели GARCH(1,1)

Оценка	EUR/USD	EUR/RUB
μ (p–value)	–0,0114	–0,0171
ω (p–value)	0,0142	0,0263
α (p–value)	0,0071	0,0535
β (p–value)	0,9559	0,8336
AIC	1,8791	1,3655
BIC	1,9030	1,3893
Значение функции максимального правдоподобия	–0,9345	–0,6776

Далее оценены методом максимального правдоподобия 2–мерные копулы (гауссовская, Стьюдента (1, 3, 10 степенями свободы), Франка для T=782.

Таблица 3 – Оценка параметров копулы

Параметр	Гауссовская копула	Копула Стьюдента			Копула Франка
		Df=1	Df=3	Df=10	
Стандартная ошибка	0,0103	0,0163	0,0104	0,0098	0,3613
Оценка параметра копулы	0,8128	0,8340	0,8667	0,85	9,319
Параметр нижней хвостовой зависимости	0	0,2929	0,1161	0,0069	0
Параметр верхней хвостовой зависимости	0	0,2929	0,1161	0,00689	0
Значение функции максимального правдоподобия	2,1536	3,1937	2,9463	2,5546	2,7307
AIC	–4,2872	–6,3746	–5,8726	–5,0893	–5,4414
BIC	–4,2405	–6,3279	–5,8259	–5,0437	–5,3948

Исследуя данные таблицы 3, отмечается необходимость отдать предпочтение копуле Стьюдента, позволяющей улавливать ненулевую зависимость как верхнего, так и нижнего «хвостов» распределения, что невозможно при работе с традиционными моделями GARCH, предполагающих нормальность распределения. В ходе анализа прикладной эффективности моделей «копула» было выявлено, что ряды отношений обменных курсов евро к доллару США (EUR/USD) и евро к российскому рублю (EUR/RUB) НБРБ склонны одновременно либо укрепляться, либо ослабевать относительно белорусского рубля.

Список использованных источников

1. Cherubini U., Luciano E., Vecchiato W. Copula Methods in Finance. John Wiley & Sons Ltd. 2004.
2. Nelsen R. An Introduction to Copulas. Second Edition. Springer. New York. 2006.