

ФРАКТАЛЬНАЯ РАЗМЕРНОСТЬ ВРЕМЕННЫХ РЯДОВ УРОЖАЙНОСТИ ОСНОВНЫХ КУЛЬТУР БЕЛАРУСИ

В.В. Пекун

Полесский государственный университет, vpekun@gmail.com

Основной идеей фрактального анализа различных систем является то, что они проявляют свойство самоподобия. Это означает, что форма изменчивости системы при одном масштабе повторяется и при других масштабах [1]. По мере увеличения масштаба исследования системы проявляются все более мелкие детали, которые позволяют увеличить точность ее описания. Описанию свойства самоподобия в природе и науке посвящено большое количество научных трудов, в которых приводится огромное количество примеров естественных систем, поведение которых на первый взгляд хаотично, но вместе с тем обладает свойством самоподобия или фрактальности. Фрактальный анализ применяется также при анализе временных рядов. Зачастую фрактальные временные ряды образуются в результате измерения естественных явлений.

Одним из главных параметров фрактального временного ряда является фрактальная размерность, которая позволяет оценить степень изменчивости ряда во времени. Для временных рядов данный показатель принимает значения от 1 до 2. Высокое значение показателя (около 2) свидетельствует о краткосрочной тенденции изменения, в то время как значение показателя близкое к 1 подтверждает присутствие долгосрочной тенденции изменения [2].

Существует несколько способов определения фрактальной размерности. Так, при анализе финансовых временных рядов применяется R/S-анализ, который традиционно считается наиболее точным [3]. Главным недостатком данного метода является необходимость в большом количестве данных. Для точной оценки фрактальной размерности по данному методу необходимо около 2500 наблюдений [4].

Фрактальная размерность может определяться по длине кривой графика временного ряда [5]. В этом случае фрактальная размерность определяется из соотношения:

$$L(\delta) = L_0 \delta^{1-D}, \quad (1)$$

где $L(\delta)$ – длина кривой, δ – масштаб усреднения опытных данных, L_0 – длина кривой при $D=1$, D – фрактальная размерность временного ряда.

В исследованиях Федера [4] также приводится методика определения размерности путем подсчета клеток. В этом случае график покрывается множеством квадратов со стороной δ . Затем подсчитывается количество квадратов $N(\delta)$, покрывающих график временного ряда. Далее сторона квадрата δ уменьшается и опре-

деляется новое значение $N(\delta)$. Так получается набор значений $N(\delta)$ при разных δ . Фрактальную размерность в этом случае определяют как угловой коэффициент графика $\ln(N(\delta))$ как функции от $\ln(\delta)$. Фрактальную размерность, определяемую таким способом, принято называть клеточной размерностью. Главным недостатком данного метода является его трудоемкость.

М. М. Дубовиков и Н. В. Старченко [6] предлагает определять фрактальную размерность методом минимального покрытия функции $f(t)$ на отрезке $[t_{i-1}, t_i]$, длиной δ . Согласно данному методу временной ряд разбивается на равные интервалы:

$$\omega_m = [a = t_0 < t_1 < \dots < t_m = b], \quad (2)$$

где $t_i - t_{i-1} = \delta = (b - a) / m, (i=1, 2, \dots, m)$.

Затем график этой функции покрывается прямоугольниками таким образом, чтобы это покрытие было минимальным по площади в классе покрытий прямоугольниками с основанием δ . Тогда высота прямоугольника на интервале $[t_{i-1}, t_i]$, будет равна амплитуде $A_i(\delta)$, которая является разностью между максимальным и минимальным значением функции $f(t)$ на этом отрезке. Вводится величина:

$$V_f(\delta) \equiv \sum_{i=1}^m A_i(\delta), \quad (3)$$

где $A_i(\delta)$ – разность между максимальным и минимальным значениями функции на интервале времени продолжительностью δ .

Фрактальная размерность по данному методу определяется по формуле:

$$D = 1 + \mu, \quad (4)$$

где μ – индекс фрактальности.

Индекс фрактальности определяется исходя из значения углового коэффициента графика $\ln(V_f(\delta))$ как функции от $\ln(\delta)$, умноженного на -1 .

Фрактальная размерность, рассчитанная данным методом, называется размерностью минимального покрытия.

В соответствии с данным методом для временных рядов основных сельскохозяйственных культур Беларуси и была определена фрактальная размерность. Для этого были исследованы данные об урожайности зерновых культур, сахарной свеклы, картофеля и овощей с 1961 года по 2010 год.

В таблице представлены данные фрактального анализа урожайности основных сельскохозяйственных культур Беларуси.

Таблица – Фрактальная размерность временных рядов урожайности культур

Культура	Фрактальная размерность (D)	Коэффициент детерминации (R^2)
Зерновые	1,30	0,87
Сахарная свекла	1,31	0,91
Картофель	1,41	0,98
Овощи	1,33	0,95

Примечание – источник: собственная разработка

О степени точности определения фрактальной размерности свидетельствуют высокие значения коэффициента детерминации для каждой культуры, которые говорят о том, что большинство значений $\ln(V_f(\delta))$ хорошо аппроксимируется регрессионной линией, что повышает точность определения размерности временного ряда. Значения размерности для каждой культуры не превышают 1,5, что свидетельствует о долгосрочных тенденциях развития, т. е. несмотря значительную изменчивость значений урожайности каждой отдельной культуры, в целом, уровень урожайности данных культур увеличивается. Это объясняется развитием научно-технического прогресса, совершенствованием способов обработки почвы, применением большего количества удобрений и пестицидов. Показатель фрактальной размерности также позволяет сравнить степень изменчивости урожайности основных культур между собой, несмотря на различающиеся уровни урожайности.

Список использованных источников

1. Мандельброт, Б. Фрактальная геометрия природы. – Москва: Институт компьютерных исследований, 2002. – 656 с.
2. Fractal analysis of temporal yield variation of five main crops in Iran: Proceeding of the Fourth International Iran and Russia Conference in Agriculture and Natural Resources, Sep. 8–10, Shahrekord, Iran, 2004;
3. Петерс, Э. Фрактальный анализ финансовых рынков: Применение теории хаоса в инвестициях и экономике. – М.: Интернет–трейдинг, 2004. – 304 с.;
4. Федер, Е. Фракталы: Пер. с англ. – М.: Мир, 1991. – 254 с;
5. Гуляева, О. С. Определение фрактальной размерности на основе изменения длин графиков временных рядов в различных временных масштабах / О. С. Гуляева, И. В. Цветков // Вестник Тверского государственного университета. Серия: Прикладная математика. – 2007. – № 6. – С. 157 – 162;
6. Дубовиков, М. М. Экономифизика и анализ финансовых временных рядов /М. М. Дубовиков, Н. В. Старченко // Экономифизика. Современная физика в поисках экономической теории / под ред. В. В. Харитонова и А. А. Ежова. – М.: МИФИ, 2007. – 624 с.