УДК 517.538.52+517.538.53

О СВОЙСТВАХ АППРОКСИМАЦИЙ ЭРМИТА–ПАДЕ ФУНКЦИЙ МИТТАГ–ЛЕФФЛЕРА

М.В. Сидорцов, А.А. Драпеза

*Научный руководитель – **А.П. Старовойтов**, д.ф.–м.н., профессор*

Гомельский государственный университет имени Франциска Скорины

Рассмотрим набор целых функций:

$$F_\gamma^j(z) = {}_1F_1(1, \gamma; \lambda_j z) = \sum_{p=0}^{\infty} \frac{\lambda_j^p}{(\gamma)_p} z^p, \quad j = 1,2,\ldots,k, \tag{1}$$

где $\gamma \in C \setminus \{0,-1,-2,\ldots\}$, $(\gamma)_0 = 1$, $(\gamma)_p = \gamma(\gamma+1)\ldots(\gamma+p-1)$ – символ Похгаммера, а $\{\lambda_j\}_{j=1}^k$ – корни уравнения $\lambda^k = 1$. Не трудно заметить, что функции (1) являются функциями Миттаг–Леффлера.

Для вектор–функции $\vec{F_\gamma} = \{F_\gamma^1(z), F_\gamma^2(z), \ldots, F_\gamma^k(z)\}$ единственным образом определяются (подробнее см. [1]) рациональные дроби (их называют диагональными аппроксимациями Эрмита–Паде 2–го рода)

$$\pi_{kn,kn}^j(z) = \pi_{kn,kn}^j\left(z; \vec{F_\gamma}\right) = \frac{P_{kn}^j(z)}{Q_{kn}(z)}, \quad j = 1,2,\ldots,k.$$

Многочлены $Q_{kn}(z)$, $P_{kn}^j(z)$, $j = 1,2,\ldots,k$; $\deg Q_{kn} \le kn$, $\deg P_{kn}^j \le kn$, стоящие в знаменателе и числителе дроби $\pi_{kn,kn}^j(z)$, удовлетворяют условиям

$$Q_{kn}(z) F_\gamma^j(z) - P_{kn}^j(z) = A_j z^{kn+n+1} + \ldots.$$

В [1] доказано, что при $n \to \infty$ дроби $\pi_{kn,kn}^j\left(z; \vec{F_\gamma}\right)$ равномерно сходятся к $F_\gamma^j(z)$ на компактах в C.

Следующая теорема описывает скорость этой сходимости и тем самым дополняет результаты, полученные другими авторами (см. [1] – [5]).

Теорема. *При любом фиксированном z и* $n \to \infty$

$$F_\gamma^j(z) - \pi_{kn,kn}^j\left(z; \vec{F_\gamma}\right) = (-1)^n x_0^{\gamma-1} \lambda_j^{n+1} B_n \times \frac{z^{kn+n+1}}{(\gamma)_{kn+n}} e^{\lambda_j (1-x_0) z} e^{\frac{\sum_{i=1}^k \lambda_i}{k+1} z} \left(1 + O(1/n)\right), \; j = 1,2,\ldots,k,$$

где

$$x_0 = \sqrt[k]{\frac{1}{k+1}}, \; B_n = \sqrt{\frac{2\pi}{n \sqrt[k]{(k+1)^{k+2}}}} \left(\frac{k}{\sqrt[k]{(k+1)^{k+1}}}\right)^n.$$

Следствие. *Пусть* $\lambda_1 = 1$, $\lambda_2 = 2$, $m = m_1$, $m_2 = 0$. *Тогда равномерно по всем m,* $0 \le m \le m(n)$, *где* $m(n) = o(\sqrt{n})$, *при* $n \to +\infty$

$$F_\gamma^1(z) - \pi_{n,m}^1\left(z; \vec{F_\gamma}\right) = (-1)^m \frac{m!(\gamma)_n}{(\gamma)_{n+m}(\gamma)_{n+m+1}} z^{n+m+1}(1 + o(1)), \tag{2}$$

$$F_\gamma^2(z) - \pi_{n+m,m}^2\left(z; \vec{F_\gamma}\right) = \frac{2^{n+1}(\gamma)_n}{(\gamma)_{n+m}(\gamma)_{n+m+1}} z^{n+m+1}(1 + o(1)), \tag{3}$$

Из равенства (2) следует, что $\pi_{n,m}^1\left(z; \vec{F_\gamma}\right) = \pi_{n,m}\left(z; F_\gamma^1\right)$, *т.е. при* $m_2 = 0$ первая аппроксимация Эрмита–Паде для набора $\vec{F_\gamma} = \{F_\gamma^1, F_\gamma^2\}$ совпадает с аппроксимацией Паде функции $F_\gamma^1(z)$.

Далее, если через $T_{n+m}\left(z; F_\gamma^2\right)$ обозначить многочлен Тейлора порядка n+m для функции $F_\gamma^2(z)$, то

$$F_\gamma^2(z) - T_{n+m}\left(z; F_\gamma^2\right) = \frac{2^{n+m+1}}{(\gamma)_{n+m+1}} z^{n+m+1}(1 + o(1)). \tag{4}$$

Из двух последних равенств (3) и (4) следует, что рациональная дробь $\pi^{2}_{n+m,m}\left(z;\vec{F}_{\gamma}\right)$ в сравнении с $T_{n+m}\left(z;F_{\gamma}^{2}\right)$ существенно лучше приближает функцию $F_{\gamma}^{2}(z)$, например, при $\gamma \in R \setminus \{0,-1,-2,\ldots\}$.

Список использованных источников

1. Аптекарев А.И. О сходимости рациональных аппроксимаций к набору экспонент // Вестник МГУ. Серия 1. Математика. Механика. 1981. № 1.С.68–74.

2. Bruin M.G.Convergence of the Pade table for ${}_1F_1(1;c,x)$ // K. Nederl. Akad. Wetensch. 1976. V. 79. P. 408 – 418.

3. Braess D.On the conjecture of Meinardus on rational approximation of e^z, II // J.Approx. Theory. 1984. V. 40, № 4. P. 375–379.

4. Сидорцов М.В., Драпеза А.А., Старовойтов А.П. Аппроксимации Эрмита–Паде вырожденных гипергеометрических функций // Проблемы физики, математики и техники. 2017. № 2(31). С. 69–74.