УДК 519.872

# СТОХАСТИЧЕСКАЯ СЕТЕВАЯ МОДЕЛЬ ПРОГНОЗИРОВАНИЯ ВАЛОВОГО ВНУТРЕННЕГО ПРОДУКТА РЕГИОНА

**Е.В. Колузаева, М.А. Маталыцкий**
Гродненский госуниверситет имени Янки Купалы, koluzaeva@gmail.com

Валовой внутренний продукт (ВВП) региона определяется как сумма валовых добавленных стоимостей (ВДС) основных отраслей: промышленности, строительства, сельского хозяйства, транспорта и связи и др., а также торговли и общественного питания, чистых налогов на продукты, инвестиций в основной капитал, рис.1. Он должен учитывать расходы на стоимость основных средств, потребление топливно-энергетических ресурсов (ТЭР).

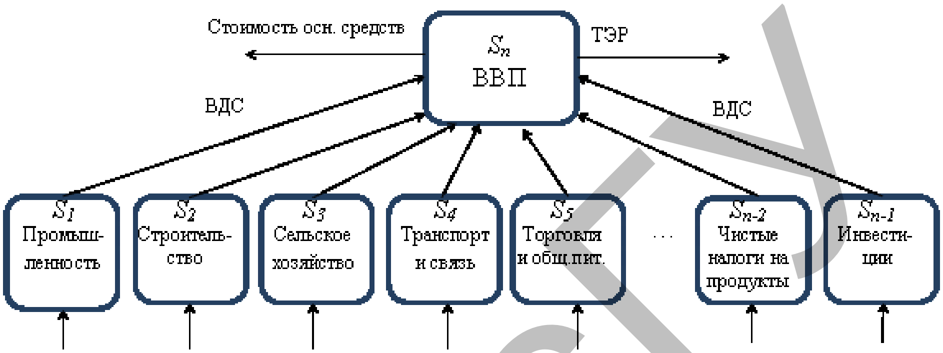


**Рисунок 1 – Структура ВВП.**

Сетевой моделью образования и прогнозирования ВВП может служить открытая НМ(Howard-Matalytski) сеть массового обслуживания (МО) с центральной системой и доходами, в которой заявками служат перечисляемые доходы ВВП от ВДС и расходы на стоимости основных средств и ТЭР. Схема сети приведена на рис. 2.

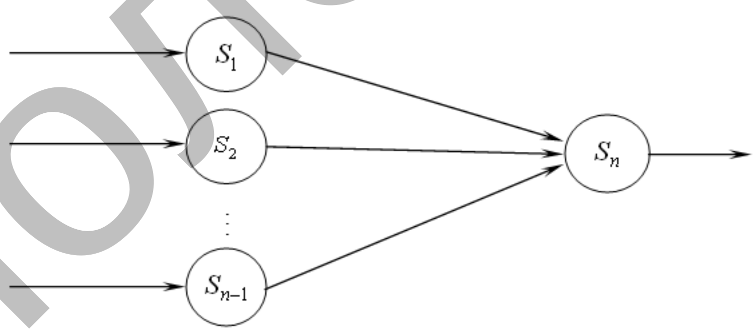


**Рисунок 2 – Схема НМ-сети.**

Для ее анализа можно применить методику, описанную в [1].

Пусть в сеть поступает простейший поток заявок с интенсивностью $\lambda$. Интенсивность обслуживания заявок в момент времени $t$ $\mu_i(k_i(t))$ в системе $S_i$ зависит от числа заявок в этой системе $k_i(t)$, $i=\overline{1,n}$.

Рассмотрим динамику изменения доходов некоторой системы $S_i$ сети. Обозначим через $V_i(t)$ ее доход в момент времени $t$. Пусть в начальный момент времени доход системы равен $V_i(0) = v_{i0}$. Доход этой СМО в момент времени $t+\Delta t$ можно представить в виде

$$V_i\ (t+\Delta t)=V_i(t)+\Delta V_i(t,\Delta t), \tag{1}$$

где $\Delta V_i(t,\Delta t)$ – изменение дохода системы $S_i$ на интервале времени $[t,\ t+\Delta t)$. Для нахождения этой величины выпишем условные вероятности событий, которые могут произойти за время $\Delta t$, а также связанные с ними изменения доходов периферийных систем $S_i$, $i=\overline{1,n-1}$, и центральной системы $S_n$.

1). С вероятностью $\lambda p_{0i}\Delta t+o(\Delta t)$ в систему $S_i$ из внешней среды поступит заявка, которая принесет ей доход в размере $r_{0i}$, где $r_{0i}$ – СВ с математическим ожиданием (м.о.) $M\{r_{0i}\}=a_{0i}$, $i=\overline{1,n-1}$.

2). С вероятностью $\mu_i(k_i(t))u(k_i(t))\Delta t+o(\Delta t)$ заявка перейдет из системы $S_i$ в систему $S_n$, при этом доход системы $S_n$ возрастет на величину $r_{in}$, а доход системы $S_i$ уменьшится на эту величину, где $r_{in}$ – СВ с м.о. $M\{r_{in}\}=a_{in}$, $i=\overline{1,n-1}$, $u(x)=\begin{cases}0, & x\le 0,\\ 1, & x>0\end{cases}$ – функция Хэвисайда.

3). С вероятностью $\mu_n(k_n(t))u(k_n(t))\Delta t+o(\Delta t)$ заявка из системы $S_n$ перейдет во внешнюю среду, при этом доход системы $S_n$ уменьшится на величину $R_{n0}$, где $R_{n0}$ – СВ с м.о. $M\{R_{n0}\}=b_{n0}$.

4). С вероятностью $1-\left(\lambda p_{0i}+\mu_i(k_i(t))u(k_i(t))\right)\Delta t+o(\Delta t)$ на отрезке времени $[t,t+\Delta t)$ изменение состояния системы $S_i$ не произойдет, $i=\overline{1,n-1}$.

5). С вероятностью $1-\sum_{i=1}^{n-1}\mu_i(k_i(t))u(k_i(t))\Delta t+o(\Delta t)$ на отрезке времени $[t,t+\Delta t)$ изменение состояния центральной системы $S_n$ не произойдет.

Кроме того, за каждый малый промежуток времени $\Delta t$ система $S_i$ увеличивает свой доход на величину $r_i\,\Delta t$, где $r_i$ – СВ с м.о. $M\{r_i\}=c_i$, $i=\overline{1,n}$. Будем также считать, что СВ $r_{in}$, $r_{0i}$, $R_{n0}$ являются независимыми по отношению к СВ $r_i$, $i=\overline{1,n}$.

Тогда из вышеуказанного следует

$$\Delta V_i\ (t,\Delta t)=\begin{cases} r_{0i}+r_i\,\Delta t & \text{с вероятностью} \quad \lambda p_{0i}\Delta t+o(\Delta t),\ i=\overline{1,\ n\text{-}1},\\ -r_{in}+r_i\,\Delta t & \text{с вероятностью} \quad \mu_i(k_i(t))u(k_i(t))\Delta t+o(\Delta t),\\ r_i\,\Delta t & \text{с вероятностью} \quad 1-\left(\lambda p_{0i}+\mu_i(k_i(t))u(k_i(t))\right)\Delta t+o(\Delta t),\end{cases} \tag{2}$$

$$\Delta V_n\ (t,\Delta t)=\begin{cases} r_{in}+r_n\,\Delta t & \text{с вероятностью} \quad \sum_{i=1}^{n-1}\mu_i(k_i(t))u(k_i(t))\Delta t+o(\Delta t),\\ -R_{n0}+r_n\Delta t & \text{с вероятностью} \quad \mu_n(k_n(t))u(k_n(t))\Delta t+o(\Delta t),\\ r_n\,\Delta t & \text{с вероятностью} \quad 1-\sum_{i=1}^{n}\mu_i(k_i(t))u(k_i(t))\Delta t+o(\Delta t).\end{cases} \tag{3}$$

Пусть система $S_i$ содержит $m_i$ идентичных линий обслуживания, в каждой из которых время обслуживания заявок распределено по показательному закону с параметром $\mu_i$, $i=\overline{1,n}$. В этом случае

$$\mu_i(k_i(t))=\begin{cases}\mu_i k_i(t), & k_i(t)\le m_i,\\ \mu_i m_i, & k_i(t)>m_i,\end{cases} \qquad \mu_i(k_i(t))u(k_i(t))=\mu_i\,\min(k_i(t),m_i),\ \ i=\overline{1,n}.$$

В качестве аппроксимации среднего значения выражения $\mu_i(k_i(t))u(k_i(t))$ возьмем $\mu_i\min(N_i(t),m_i)$, т.е.

$M\min(k_i(t),m_i)=\min(N_i(t),m_i)$,

где $N_i(t)$ – среднее число заявок (ожидающих и обслуживающихся) в системе $S_i$ в момент времени $t$, $i=\overline{1,n}$. С учетом этого предположения, используя методику, описанную в [1], получаем следующее приближенное соотношение

$$M\quad \Delta V_i(t,\Delta t)\quad=\left[\lambda p_{0i}a_{0i}+c_i-\mu_i\min(N_i(t),m_i)a_{in}\right]\Delta t+o(\Delta t) \tag{4}$$

$$M\quad \Delta V_n(t,\Delta t)\quad=\left[c_n+\sum_{i=1}^{n-1}\mu_i\min(N_i(t),m_i)a_{in}-\mu_n\min(N_n(t),m_n)b_{n0}\right]\Delta t+o(\Delta t)$$

Поскольку в сеть поступает простейший поток заявок с интенсивностью $\lambda$, т.е. вероятность поступления $l$ заявок в систему $S_i$ за время $\Delta t$ имеет вид $P_l(\Delta t)=\frac{(\lambda p_{0i}\Delta t)^l}{l!}e^{-\lambda p_{0i}\Delta t}$, $l=0,1,2,\ldots$, то среднее число заявок, поступивших извне в систему $S_i$ за время $\Delta t$ равно $\lambda p_{0i}\Delta t$. Обозначим через $\rho_i(t)$ – среднее число занятых линий обслуживания в системе $S_i$ в момент времени $t$, $i=\overline{1,n}$. Тогда $\mu_i\rho_i(t)\Delta t$ – среднее число заявок, покинувших систему $S_i$ за время $\Delta t$, а $\sum_{\substack{j=1\\ j\neq i}}^{n}\mu_j\rho_j(t)p_{ji}\Delta t$ – среднее число заявок, поступивших в $S_i$ из других СМО за время $\Delta t$. Поэтому

$$N_i(t+\Delta t)-N_i(t)=\lambda p_{0i}\Delta t-\mu_i\rho_i(t)\Delta t,\ i=\overline{1,n-1},$$

$$N_n(t+\Delta t)-N_n(t)=\sum_{i=1}^{n-1}\mu_i\rho_i(t)\Delta t-\mu_n\rho_n(t)\Delta t,$$

откуда при $\Delta t\to 0$ вытекает система ОДУ для $N_i(t)$:

$$\frac{dN_i(t)}{dt}=\lambda p_{0i}-\mu_i\rho_i(t)\ i=\overline{1,n-1}, \tag{5}$$

$$\frac{dN_n(t)}{dt}=\sum_{i=1}^{n-1}\mu_i\rho_i(t)-\mu_n\rho_n(t)$$

Величину $\rho_i(t)$ найти точно невозможно и поэтому, как мы делали раньше, аппроксимируем ее выражением

$$\rho_i(t)=\begin{cases}N_i(t),\ N_i(t)\le m_i,\\ m_i,\ N_i(t)>m_i,\end{cases}=\min(N_i(t),\ m_i),\ i=\overline{1,n}.$$

Тогда система (5) примет вид

$$\frac{dN_i(t)}{dt}=\lambda p_{0i}-\mu_i\min(N_i(t),\ m_i)\ \ i=\overline{1,n-1}, \tag{6}$$

$$\frac{dN_n(t)}{dt}=\sum_{i=1}^{n-1}\mu_i\min(N_i(t),\ m_i)-\mu_n\min(N_n(t),\ m_n)$$

Это система линейных ОДУ с разрывными правыми частями. Решать ее нужно путем разбиения фазового пространства на ряд областей и нахождения решения в каждой из них.

Введем обозначение $v_i(t) = M\{V_i(t)\}$, $i = \overline{1,n}$. Из (4) получаем

$$v_i\,(t+\Delta t) = v_i\,(t) + M\{\Delta V_i\,(t,\Delta t)\} =$$
$$= v_i(t) + \left[\lambda p_{0i} a_{0i} + c_i - \mu_i \min(N_i(t), m_i) a_{in}\right]\Delta t + o(\Delta t),$$
$$v_n(t+\Delta t) = v_n(t) + M\{\Delta V_n(t,\Delta t)\} =$$
$$= v_n(t) + \left[c_n + \sum_{i=1}^{n-1} \mu_i \min(N_i(t), m_i) a_{in} - \mu_n \min(N_n(t), m_n) b_{n0}\right]\Delta t + o(\Delta t).$$

Далее, переходя к пределу при $\Delta t \to 0$, получим неоднородные линейные ОДУ первого порядка

$$\frac{dv_i(t)}{dt} = \lambda p_{0i} a_{0i} + c_i - \mu_i \min(N_i(t), m_i) a_{in} \quad i = \overline{1,n-1}, \tag{7}$$
$$\frac{dv_n(t)}{dt} = c_n + \sum_{i=1}^{n-1} \mu_i \min(N_i(t), m_i) a_{in} - \mu_n \min(N_n(t), m_n) b_{n0}$$

Задав начальные условия $v_i(0) = v_{i0}$, $i = \overline{1,n}$, можно найти ожидаемые доходы систем сети.

Предположим, что сеть функционирует так, что в среднем в ней не наблюдается очередей, т.е. $\min(N_i(t), m_i) = N_i(t)$, $i = \overline{1,n}$, то системы (6), (7) будут иметь вид:

$$\frac{dN_i(t)}{dt} = \lambda p_{0i} - \mu_i N_i(t) \quad i = \overline{1,n-1}, \tag{8}$$
$$\frac{dN_n(t)}{dt} = \sum_{i=1}^{n-1} \mu_i N_i(t) - \mu_n N_n(t)$$

$$\begin{cases} \dfrac{dv_i(t)}{dt} = \lambda p_{0i} a_{0i} + c_i - \mu_i N_i(t) a_{in}, i = \overline{1,n-1}, \\ \dfrac{dv_n(t)}{dt} = c_n + \displaystyle\sum_{i=1}^{n-1} \mu_i N_i(t) a_{in} - \mu_n N_n(t) b_{n0}, \\ v_i(0) = v_{i0}, \ i = \overline{1,n}. \end{cases} \tag{9}$$

Решение системы (8), полученное прямым методом, имеет вид

$$N_i(t) = \frac{\lambda p_{0i}}{\mu_i} + e^{-\mu_i t}\left(N_i(0) - \frac{\lambda p_{0i}}{\mu_i}\right), \ i = \overline{1,n-1} \tag{10}$$
$$N_n(t) = \sum_{i=1}^{n-1} \left\{\frac{\lambda p_{0i}}{\mu_i} + e^{-\mu_i t}\left(N_i(0) - \frac{\lambda p_{0i}}{\mu_i}\right)\right\} 1 - e^{-\mu_n t} \ + N_n(0) e^{-\mu_n t}$$

где $N_i(0)$ – среднее число заявок в *i*-ой системе в начальный момент времени, $i = \overline{1,n}$.

Подставив (10) в систему (9) и решив ее, можно найти выражения для ожидаемого дохода системы $S_n$, зависящее от времени. Это позволяет получить соотношение для ВВП в момент времени $t,\ t \in [0,T]$.

***Список используемых источников:***

1. Маталыцкий, М.А. О некоторых результатах анализа и оптимизации марковских сетей с доходами и их применении / М.А. Маталыцкий // Автоматика и телемеханика. – 2009. – №10. – С. 97-113.