УДК 517.925

О ДОПУСТИМЫХ ВОЗМУЩЕНИЯХ СИСТЕМЫ ТИПА ЛОТКИ–ВОЛЬТЕРРА

Э.В. Мусафиров
Полесский государственный университет, musafirov@bk.ru

Многие экономические процессы моделируются с помощью систем обыкновенных дифференциальных уравнений. Однако, как правило, они не интегрируются в конечном виде, что приводит к необходимости изучать свойства решений этих систем по виду самих систем. Иногда это можно сделать с помощью отражающей функции (ОФ) (см. [1, 2]).

Для системы

$$\dot{x} = X(t,x), \quad t \in \mathbb{R}, \quad x \in \mathbb{R}^n, \tag{1}$$

с непрерывно дифференцируемой правой частью $X(t,x)$ и общим решением в форме Коши $x = \varphi(t;t_0,x_0)$ ОФ системы (1) определяется (см. [1, с. 11]) как $F(t,x) := \varphi(-t;t,x)$. Если (1) 2ω-периодична по t, и F – ее ОФ, то $F(-\omega,x) = \varphi(\omega;-\omega,x)$ – отображение за период $[-\omega,\omega]$ этой системы (см. [1, с. 59]). Непрерывно дифференцируемая F, удовлетворяющая условиям $F(-t,F(t,x)) \equiv F(0,x) \equiv x,$ является ОФ класса систем вида

$$\dot{x} = -\frac{1}{2}\frac{\partial F}{\partial x}\left(t,F(t,x)\right)\left(\frac{\partial F(t,x)}{\partial t} - 2S(t,x)\right) - \\ - S\left(t,F(t,x)\right), \tag{2}$$

где S – произвольная вектор-функция, при которой решения системы (2) однозначно определяются своими начальными условиями. Поэтому все системы вида (1) разбиваются на классы эквивалентности вида (2) таким образом, что каждый класс характеризуется некоторой ОФ, называемой ОФ класса.

Для всех систем из одного класса оператор сдвига (см. [3, с. 11-12]) на промежутке $[-\omega,\omega]$ один и тот же. Поэтому все эквивалентные (в смысле совпадения ОФ) 2ω-периодические системы имеют одно и то же отображение за период $[-\omega,\omega]$.

Заметим, что несмотря на то, что ОФ определяется через общее решение системы, иногда даже для не интегрируемой в конечном виде системы можно построить эквивалентную ей систему.

Рассмотрим систему Лотки–Вольтерра с логистической поправкой

$$\begin{aligned}\dot x &= a_1 x - a_2 xy - a_3 x^2,\\ \dot y &= -b_1 y + b_2 xy - b_3 y^2; \quad a_i, b_i, x, y \in \mathrm{P} \quad (i=\overline{1,3}),\end{aligned} \tag{3}$$

которая используется при моделировании конкурирующих процессов, в частности в экономике.

Система (3) автономна, следовательно, она проста и эквивалентна любой системе $\dot z = X(z) + \alpha(t) X(z)$, где $z = (x,y)^{\mathrm{T}}$, $X(z)$ – правая часть системы (3), $\alpha(t)$ – любая скалярная непрерывная нечетная функция (см. [2, 4]).

Используя [5], для системы (3) можно получить допустимые (не изменяющие ОФ) возмущения, отличные от описанных выше.

Теорема. При $b_2 = -a_3$, $b_3 = a_2$ система (3) эквивалентна системе вида

$$\begin{aligned}\dot x = x\big((a_1 - a_3 x)&(1+\alpha_1(t)-\alpha_2(t)-\alpha_3(t)) -\\ &- a_2 y(1+\alpha_1(t))\big),\\ \dot y = -y\big(a_3 x&(1+\alpha_1(t)-\alpha_2(t)-\alpha_3(t)) +\\ &+ (b_1 + a_2 y)(1+\alpha_1(t))\big),\end{aligned}$$

где $\alpha_i(t)$, $i=\overline{1,3}$ – произвольные скалярные непрерывные нечетные функции.

Заметим, что требование нечетности функций $\alpha_i(t)$ для приложений часто не является критичным, так как обычно динамика процессов моделируется на неотрицательной временной полуоси.

Полученные результаты позволяют использовать результаты исследования качественного поведения решений автономной системы (3) для изучения более сложных по своей природе неавтономных возмущенных систем. При этом, в частности, характер устойчивости решений, при $t = t_0$ выходящих из одной и той же точки, всех допустимовозмущенных систем такой же как и у исходной системы.

Список использованных источников:

1. Мироненко, В.И. Отражающая функция и исследование многомерных дифференциальных систем / В.И. Мироненко. – Гомель: ГГУ им. Ф. Скорины, 2004. – 196с.

2. Мусафиров, Э.В. Временные симметрии дифференциальных систем / Э.В. Мусафиров. – Пинск: ПолесГУ, 2009. – 191с.

3. Красносельский, М.А. Оператор сдвига по траекториям дифференциальных уравнений / М.А. Красносельский. – М.: Наука, 1966. – 332с.

4. Мусафиров, Э.В. О простоте линейных дифференциальных систем / Э.В. Мусафиров // Дифференциальные уравнения. – 2002. – Т. 38, № 4. – С. 570-572.

5. Мироненко, В.В. Возмущения дифференциальных систем, не меняющие временных симметрий / В.В. Мироненко // Дифференциальные уравнения. – 2004. – Т. 40, № 10. – С. 1325-1332.