

МАТЕМАТИКА

УДК 517.986

ТЕОРЕМЫ ЕДИНСТВЕННОСТИ ДЛЯ ОБОБЩЕННЫХ АНАЛИТИЧЕСКИХ ФУНКЦИЙ

д-р физ.-мат. наук, проф. А.Р. МИРОТИН, М.А. РОМАНОВА
(Гомельский государственный университет им. Ф. Скорины)

Изучаются алгебры обобщенных аналитических функций на пространстве полухарактеров \hat{S} дискретной абелевой подгруппы S , погружающейся в группу. Обобщенная аналитичность понимается в двух смыслах. Равномерные алгебры аналитических функций обозначаются в них соответственно $A_0(\hat{S})$ и $A(\hat{S})$. Проводится анализ уже имеющихся граничных теорем единственности, касающихся алгебры $A_0(\hat{S})$. Показано, что аналоги классических теорем единственности (граничных и внутренних) для алгебры обобщенных аналитических функций $A(\hat{S})$, вообще говоря, неверны. Доказаны две граничные теоремы единственности для $A(\hat{S})$, обобщающие результат К.Ф. Хоффмана для $A_0(\hat{S})$, а также три внутренние теоремы единственности для алгебр $A_0(\hat{S})$ и $A(\hat{S})$ при различных ограничениях на подгруппу S и соответствующие открытые подмножества полугруппы полухарактеров \hat{S} .

1. Введение и предварительные сведения

Теория обобщенных аналитических функций на пространствах полухарактеров полугрупп берет свое начало с работы Р. Аренса и И.М. Зингера [1]. В настоящее время она превратилась в довольно развитый раздел функционального анализа, расположенный на стыке теории равномерных алгебр, абстрактного гармонического анализа и теории аналитических функций [2 – 6]. Более общее, чем в [1], определение обобщенной аналитической функции было позднее дано в [7]. В [1], помимо прочего, установлена граничная теорема единственности для обобщенных аналитических (по Аренсу – Зингеру) функций. Обобщение этой теоремы для частного случая линейной архимедовой упорядоченности получено К. Хоффманом [8].

Целью данной работы является перенесение этого результата на случай алгебр обобщенных аналитических функций в смысле [7] при существенном ослаблении требования линейной архимедовой упорядоченности, а также получение внутренних теорем единственности для обобщенных аналитических по Аренсу – Зингеру функций.

Всюду ниже S – записываемая мультипликативно дискретная абелева полугруппа с сокращениями и единицей e , не являющаяся группой, $G = S^{-1}S$ – (дискретная) группа частных для S [9].

Полухарактером полугруппы S называется гомоморфизм ψ полугруппы S в мультипликативную полугруппу $\bar{D} = \{z \in \mathbb{C} // z \leq 1\}$, не являющийся тождественным нулем. Характерами называются полухарактеры, равные по модулю единице.

Множество всех полухарактеров далее обозначается \hat{S} , а его подмножество, состоящее из неотрицательных полухарактеров, – \hat{S}_+ . Наделенные топологией поточечной сходимости это компактные топологические полугруппы по умножению с единицей 1 (\hat{S} компактно как замкнутое подмножество в \bar{D}^S). Компактную группу характеров полугруппы S будем обозначать X . Согласно [1, теорема 3.1] каждый полухарактер $\psi \in \hat{S}$ допускает «полярное разложение» $\psi = \rho\chi$, где $\chi \in X$, а $\rho \in \hat{S}_+$, которое единственно, если ψ не принимает нулевых значений.

Каждый характер $\chi \in X$ единственным образом продолжается до характера группы G по формуле $\chi(a^{-1}b) = \overline{\chi(a)}\chi(b)$, что позволяет отождествлять X с группой характеров группы G . Аналогично каждый полухарактер $\rho \in \hat{S}_+$ единственным образом продолжается со своего носителя $S(\rho)$ до гомоморфизма $\tilde{\rho}$ группы частных $G(\rho)$ полугруппы $S(\rho)$ в мультипликативную полугруппу положительных действительных чисел.

Через ω мы обозначаем индикатор одноточечного множества $\{e\}$, который принадлежит \hat{S}_+ , если $S \cap S^{-1} = \{e\}$. Отметим, что степень ρ^0 по определению есть индикатор носителя ρ и что $\rho^z \in \hat{S} \setminus X$ при $\rho \in \hat{S}_+$, $\rho \neq 1$, $z \in \Pi$, где $\Pi = \{Re z > 0\}$ [1, § 7]. Сужение функции f на подмножество M ее области определения обозначается f/M , конец доказательства или примера – \square .

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 1 [1]. Комплекснозначная функция F на $\hat{S} \setminus X$ называется *обобщенной аналитической в смысле Аренса – Зингера*, если F может быть равномерно приближена на компактных подмножествах $\hat{S} \setminus X$ функциями вида $\hat{f}(\psi) = \sum_{s \in S} f(s)\psi(s)$, где $f \in l_1(S)$, $\psi \in \hat{S}$.

Равномерную алгебру всех функций, непрерывных на \hat{S} и обобщенных аналитических в смысле Аренса – Зингера, обозначим $A_0(\hat{S})$ (фактически она зависит от S , а не только от \hat{S}).

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 2 [7]. Комплекснозначная функция F на $\hat{S} \setminus X$ называется *обобщенной аналитической*, если при $\rho, \psi \in \hat{S} \setminus X$, $\rho \geq 0$ функция $z \mapsto F(\rho^z \psi)$ аналитична на Π и непрерывна в $+0$.

Равномерную алгебру всех функций, непрерывных на \hat{S} и обобщенных аналитических в смысле определения 2, обозначим $A(\hat{S})$.

Из [1, теорема 7.4] следует, что $A_0(\hat{S}) \subset A(\hat{S})$, но следующий пример показывает, что строгое включение возможно.

ПРИМЕР 1. Если S есть аддитивная полугруппа $\{0, 2, 3, \dots\}$, то функция $F(z) = z$ принадлежит $A(\hat{S}) = A(\bar{D})$, но по [1, теорема 2.6] не аналитична по Аренсу – Зингеру, так как преобразование Фурье ее сужения на единичную окружность не сосредоточено на S . \square

2. Граничные теоремы единственности

Классическая граничная теорема единственности Лузина – Привалова [10, с. 80], утверждает, что если множество нулевых некасательных граничных значений некоторой аналитической в полуплоскости Π функции имеет положительную лебегову меру, то эта функция нулевая. Для алгебры $A_0(\hat{S})$, а потому и для $A(\hat{S})$, аналог этого результата, вообще говоря, неверен. А именно, в [1, с. 392] приведен пример такой ненулевой обобщенной аналитической в смысле Аренса – Зингера функции, которая равна нулю на непустом открытом подмножестве группы X . Однако при некоторых ограничениях в [1] был установлен следующий ослабленный вариант граничной теоремы единственности.

Для $\rho \in \hat{S}_+$ положим $G^\rho := \{x \in G / \tilde{\rho}(x) = 1\}$, через X^ρ обозначим аннулятор G^ρ в X , и пусть

$$X_0 = X \cap (\cup \{\rho^0 X^\rho / \rho \in \hat{S}_+\})^-$$

(черта обозначает замыкание в \hat{S}).

ТЕОРЕМА А [1, теорема 8.2]. Если $X_0 = X$ и функция $F \in A_0(\hat{S})$ обращается в нуль на непустом открытом подмножестве группы X , то $F = 0$.

Для формулировки результата К. Хоффмана и его обобщения нам понадобятся гармонические меры μ_ζ , построенные в [1, § 5]. В случае, когда полухарактер $\zeta = \rho\chi$ не принимает нулевых значений (а только этот случай нам и потребуется), интеграл по мере μ_ζ определяется для любой ограниченной борелевской функции φ на X формулой:

$$\int_X \varphi d\mu_\zeta = \frac{1}{\pi} \int_R \varphi(\rho^{iv} \chi) \frac{dv}{1+v^2}. \quad (1)$$

При этом для любой функции $F \in A_0(\hat{S})$ справедлив аналог формулы Пуассона:

$$\int_X F d\mu_\zeta = F(\zeta).$$

Кроме того, в случае, когда $S \cap S^{-1} = \{e\}$, полугруппа S определяет на G частичный порядок по формуле $x \leq y := y \in xS$. Этот порядок называется *архимедовым*, если для любых $a, b \in S$, $a^{-1} \notin S$ существует натуральное n , при котором $b \leq a^n$. При этом говорят, что S *архимедово упорядочивает* G .

ТЕОРЕМА В [8, теорема 6.2]. Предположим, что S архимедово и линейно упорядочивает группу G , $F \in A_0(\hat{S})$. Если для некоторого $\zeta \neq 1$ сужение $F|_X$ обращается в нуль на множестве положительной μ_ζ -меры, то $F = 0$.

Ниже мы обобщим теорему В в двух направлениях. Во-первых, алгебра $A_0(\hat{S})$ будет заменена более широкой алгеброй $A(\hat{S})$. Во-вторых, будет снято сильное условие линейной упорядоченности и ослаблено условие архимедовой упорядоченности. Для этого отметим, что идеал I полугруппы S называется *простым*, если $S \setminus I$ есть полугруппа, I называется *нетривиальным*, если $I \neq S \setminus \{e\}$. Легко проверяется, что в архимедовом случае полугруппа S не содержит нетривиальных простых идеалов. Кроме того [8, теорема 2.1], в этом случае любой неотрицательный полухарактер $\rho \neq 1, \omega$ разделяет точки S .

ТЕОРЕМА 1. *Предположим, что полугруппа S не содержит нетривиальных простых идеалов, $F \in A(\hat{S})$. Если для фиксированного $\zeta = \rho_0 \chi_0$ сужение F/X обращается в нуль на множестве положительной μ_ζ -меры, причем ρ_0 разделяет точки S , то $F = 0$.*

Доказательство. Сначала отметим, что полухарактеры полугруппы S , отличные от ω , не принимают нулевых значений (иначе множество нулей такого полухарактера было бы нетривиальным простым идеалом), а потому верна формула (1). Пусть $F/A = 0$ для некоторого множества $A \subseteq X$ положительной μ_ζ -меры, $\zeta = \rho_0 \chi_0$. Для комплексного $z = x + iy$, $x \geq 0$, $y \in \mathbb{R}$ положим $f(z) := F(\rho_0^z \chi_0)$. По условию теоремы $f(iy) = 0$, если $y \in B := \{y \in \mathbb{R} / \rho_0^{iy} \chi_0 \in A\}$. Но равенство $\mu_\zeta(A) = \int_X 1_A d\mu_\zeta = \frac{1}{\pi} \int_{\mathbb{R}} 1_A(\rho_0^{iv} \chi_0) \frac{dv}{1+v^2} = \frac{1}{\pi} \int_B \frac{dv}{1+v^2}$ (1_A обозначает индикатор множества A) показывает, что множество B имеет положительную меру Лебега, а потому $f(z) = 0$, по теореме Лузина – Привалова. Таким образом, $F(\rho_0^z \chi_0) = 0$ при всех $z = x + iy$, $x \geq 0$, $y \in \mathbb{R}$. Поскольку множество $\{\rho_0^{x+iy} / y \in \mathbb{R}\}$ плотно в $\rho_0^x X^{\rho_0}$ [1, теорема 7.2], получаем по непрерывности, что $F/\rho_0^x X^{\rho_0} \chi_0 = 0$, откуда, устремляя x к 0, выводим, что $F/X^{\rho_0} \chi_0 = 0$. А так как ρ_0 разделяет точки S , то $X^{\rho_0} = X$, т.е. $F/X = 0$.

Для произвольных $\chi \in X$, $\rho \in \hat{S}_+$, $\rho \neq \omega$ положим теперь $g(z) := F(\rho^z \chi)$, $z = x + iy$, $x \geq 0$, $y \in \mathbb{R}$. Тогда g аналитична в полуплоскости Π и равна нулю на ее границе, а потому есть тождественный нуль. При $z = 1$ получаем отсюда, что $F(\zeta) = 0$ при всех $\zeta \neq \omega$. Для завершения доказательства заметим, что в силу теоремы Э. Глисона [11] на S существует положительный полухарактер $\rho_1 \neq 1, \omega$. Поскольку множество $\{s \in S / \rho_1(s) < 1\}$ есть простой идеал в S , а он тривиален, то $\rho_1^n \rightarrow \omega$ ($n \rightarrow \infty$), и по непрерывности $F(\omega) = 0$. \square

Справедлив также такой вариант предыдущей теоремы.

ТЕОРЕМА 2. *Предположим, что полугруппа S не содержит нетривиальных простых идеалов, $F \in A(\hat{S})$. Если для каждого полухарактера $\zeta = \rho \chi_0$, где $\rho \neq 1, \omega$, а характер χ_0 фиксирован, сужение F/X обращается в нуль на множестве положительной μ_ζ -меры, то $F = 0$.*

Доказательство. Как и в доказательстве теоремы 1 (с заменой ρ_0 на ρ), получаем, что $F/X^\rho \chi_0 = 0$ при $\rho \neq 1, \omega$. Там же было показано, что полухарактеры полугруппы S , отличные от ω , не принимают нулевых значений и что на S существует положительный полухарактер $\rho_1 \neq 1, \omega$ такой, что $\rho_1(s) < 1$ при $s \neq e$. Функция $h = -\log \tilde{\rho}_1$ удовлетворяет всем условиям теоремы 8.4 из [1], а значит $X_0 = X$. Поэтому $X \subset (\cup_{\rho \neq 1, \omega} X^\rho \cup \{\omega\})^-$. Отсюда следует, что замыкание множества $\cup\{X^\rho / \rho \neq 1, \omega\}$ равно X . Таким образом, $F/X = 0$ и $F = 0$, как в теореме 1. \square

3. Внутренние теоремы единственности

Под внутренними теоремами единственности мы будем понимать утверждения вида $F/U = 0 \Rightarrow F = 0$, где U – непустое открытое подмножество \hat{S} . Следующий пример показывает, что для алгебры $A_0(\hat{S})$, а тем более для $A(\hat{S})$, внутренняя теорема единственности, вообще говоря, неверна.

ПРИМЕР 2. Пусть $S = Z_+ \times Z$. Так как любой неотрицательный ограниченный полухарактер ρ_1 (аддитивной) полугруппы Z_+ имеет вид $\rho_1(m) = r^m$, где $r = \rho_1(1) \in [0; 1]$ (мы считаем $0^0 := 1$), то любой неотрицательный ограниченный полухарактер ρ полугруппы S есть $\rho(m, n) = r^m$, где $r \in [0; 1]$. По-

сколькю любой характер группы Z^2 имеет вид $\chi(m,n) = t_1^m t_2^n$, где t_i принадлежат одномерному тору T , то общий вид полухарактера $\psi \in \hat{S}$ есть $\psi(m,n) = \rho(m,n)\chi(m,n) = (rt_1)^m t_2^n$. Таким образом, \hat{S} можно отождествить с заполненным тором $\bar{D} \times T$, где \bar{D} – замыкание открытого единичного круга D , $X = T^2$. При этом $F \in A(\hat{S})$ тогда и только тогда, когда $F(z,t)$ непрерывна на $\bar{D} \times T$ и аналитична по $z \in D$. Пусть $\varphi \neq 0$ – непрерывная функция на T – обращающаяся в нуль на непустом открытом множестве $V \subset T$. Тогда ненулевая функция $F(z,t) = z\varphi(t)$ принадлежит $A_0(\hat{S})$ (преобразование Фурье сужения $F|_X$ сосредоточено на S) и равна нулю на $D \times V$. \square

Более того, в [5, с. 303], отмечено, что если в алгебре $A_0(\hat{S})$ внутренняя теорема единственности справедлива для любого непустого открытого $U \subset \hat{S} \setminus X$, то S не содержит нетривиальных подгрупп. Вместе с тем имеют место следующие результаты.

ТЕОРЕМА 3. Пусть $X_0 = X$, $F \in A_0(\hat{S})$. Если открытое множество $U \subset \hat{S}$ удовлетворяет одному из следующих двух условий:

- 1) U содержит полухарактер, не принимающий нулевых значений;
- 2) если замыкание множества U содержит характер, то равенство $F|_U = 0$ влечет $F = 0$.

Доказательство. Пусть выполняется условие 1) и пусть полухарактер ψ_1 из U имеет полярное разложение $\psi_1 = \rho_1 \chi_1$, $\rho_1(s) \neq 0$ при всех $s \in S$. Положим

$$W = \{z \in \Pi / \rho_1^z \chi_1 \in U\}.$$

Множество W не пусто и открыто в Π в силу непрерывности отображения $z \mapsto \rho_1^z \chi_1$, $z \in \Pi$. Так как $F(\rho_1^z \chi_1) = 0$ при $z \in W$, то по теореме единственности это верно и при $z \in \Pi$. По непрерывности $F(\rho_1^{iy} \chi_1) = 0$ при всех $y \in \mathbb{R}$. Как уже отмечалось выше, множество $\{\rho_1^{x+iy} / y \in \mathbb{R}\}$ плотно в $\rho_1^x X^{\rho_1}$ при всех $x \geq 0$. Следовательно, $\{\rho_1^{iy} \chi_1 / y \in \mathbb{R}\}$ плотно в $X^{\rho_1} \chi_1$. Теперь по непрерывности $F / X^{\rho_1} \chi_1 = 0$. Рассмотрим множество:

$$V = \{\chi \in X / \rho_1 \chi \in U\}.$$

Оно не пусто и открыто, причем выше фактически показано, что $F / X^{\rho_1} \chi = 0$ при всех $\chi \in V$, т.е. $F / X^{\rho_1} V = 0$. Таким образом, F обращается в нуль на непустом открытом $X^{\rho_1} V \subset X$, а потому $F = 0$ по теореме А.

Пусть U удовлетворяет условию 2). Для произвольного $\psi_1 = \rho_1 \chi_1 \in U$ рассмотрим функцию:

$$F_1(\psi) = F(\psi \rho_1).$$

Тогда $F_1 \in A_0(\hat{S})$. Действительно, из рассуждений, приведенных в [3, с. 217], следует, что алгебра $A_0(\hat{S})$ состоит из тех и только тех функций на \hat{S} , которые равномерно аппроксимируются на \hat{S} аналитическими полиномами, т.е. функциями вида $p = \sum_{i=1}^n c_i \hat{a}_i$, $a_i \in S$, $c_i \in \mathbb{C}$ (мы полагаем $\hat{a}(\psi) := \psi(a)$). Если $\max |p - F| < \varepsilon$ и $p_1 = \sum_{i=1}^n c_i \rho_1(a_i) \hat{a}_i$, то $\max |p_1 - F_1| < \varepsilon$, что и доказывает это включение.

Введем множество V по той же формуле, что и выше. Это непустое открытое подмножество X , причем $F_1 / V = 0$. В силу теоремы А тогда $F_1 = 0$, т.е. $F / \rho_1 \hat{S} = F / \psi_1 \hat{S} = 0$ при всех $\psi_1 \in U$. Другими словами, $F / U \hat{S} = 0$. С другой стороны, по условию 2) теоремы найдется характер χ_0 и направленность $\psi_n \in U$ такие, что $\psi_n \rightarrow \chi_0$. Поскольку $\psi_n \chi_0^{-1} \psi \rightarrow \psi$ для любого $\psi \in \hat{S}$ и $\psi_n \chi_0^{-1} \psi \in U \hat{S}$, то по непрерывности $F(\psi) = 0$. \square

Наиболее завершено выглядит внутренняя теорема единственности в случае, когда полугруппа S не содержит нетривиальных простых идеалов.

ТЕОРЕМА 4. Пусть S не содержит нетривиальных простых идеалов, $F \in A_0(\hat{S})$. Если $F|_U = 0$ для непустого открытого множества $U \in \hat{S}$, то $F = 0$.

Доказательство. Достаточно проверить выполнение условий теоремы 3. В доказательстве теоремы 1 уже было показано, что полухарактеры полугруппы S , отличные от ω , не принимают нулевых значений. Там же установлено, что на S существует положительный полухарактер $\rho_1 \neq 1, \omega$, такой, что $\rho_1(s) < 1$ при $s \neq e$. Тогда $\rho_1^n \rightarrow \omega$, но $\rho_1^n \in \hat{S} \setminus \{\omega\}$. Поэтому $U \neq \{\omega\}$. Наконец, в доказательстве теоремы 2 показано, что при наших условиях $X_0 = X$. \square

Следующий простой результат в определенном смысле дополняет теорему 3.

ТЕОРЕМА 5. *Предположим, что $S \cap S^{-1} = \{e\}$ и что для любой точки $s_0 \in S \setminus \{e\}$ полухарактер 1 есть предельная точка множества*

$$P(s_0) = \{\rho \in \hat{S}_+ / \rho(s_0) < 1\}.$$

Если функция $F \in A(\hat{S})$ обращается в нуль в некоторой окрестности полухарактера ω , то $F = 0$.

Доказательство. Достаточно рассмотреть каноническую окрестность точки ω в топологии поточечной сходимости ($\varepsilon > 0, s_1, \dots, s_n \in S \setminus \{e\}$)

$$U(s_1, \dots, s_n; \varepsilon) = \{\psi \in \hat{S} // |\psi(s_i)| < \varepsilon, i = 1, \dots, n\}.$$

Пусть $F|U(s_1, \dots, s_n; \varepsilon) = 0$. Для любого полухарактера $\psi \in \hat{S}$ возможны следующие случаи.

1) $|\psi(s_i)| < 1$ при всех $i = 1, \dots, n$. Рассмотрим полярное разложение $\psi = \rho\chi$. Так как $\rho(s_i) < 1$ при всех $i = 1, \dots, n$, то $\rho^z \chi \in U(s_1, \dots, s_n; \varepsilon)$ при достаточно больших $Re z$. Поэтому аналитическая в Π функция $F(\rho^z \chi)$ тождественно равна нулю. В частности, $F(\psi) = 0$.

2) $|\psi(s_j)| = 1$ при некотором j . Для каждого $i = 1, \dots, n$ выберем направленность $\rho_{m_i} \in P(s_i)$, сходящуюся к 1, и положим $\rho_m = \prod_{i=1}^n \rho_{m_i} (m = (m_1, \dots, m_n))$. Тогда полухарактеры $\psi_m = \rho_m \psi$ удовлетворяют неравенствам $|\psi_m(s_i)| < 1$ при всех $i = 1, \dots, n$, причем $\psi_m \rightarrow \psi$. С учетом 1) получаем теперь

$$F(\psi) = \lim_m F(\psi_m) = 0. \square$$

СЛЕДСТВИЕ. *Предположим, что $S \cap S^{-1} = \{e\}$ и что для любой точки $s_0 \in S \setminus \{e\}$ найдется такой полухарактер ρ , что $\rho(s) > 0$ при всех s и $\rho(s_0) < 1$. Если функция $F \in A(\hat{S})$ обращается в нуль в некоторой окрестности полухарактера ω , то $F = 0$.*

ЛИТЕРАТУРА

1. Arens R., Singer I.M. Generalized analytic functions // Trans. Amer. Math. Soc. – 1956. – Vol. 81, № 2. – P. 379 – 393.
2. Гамелин Т. Равномерные алгебры. – М.: Мир, 1973. – 336 с.
3. Rudin W. Fourier analysis on groups. – N.Y.: Interscience Publishers, 1962. – 285 p.
4. Nelson H. Analyticity on compact abelian groups // Algebras in analysis: proceedings of instructional conference and NATO Advanced Study Institute, Birmingham, 1973 / Kluwer; H. Nelson, ed. – London, 1975. – P. 1 – 62.
5. Tonev T., Grigoryan S.A. Analytic functions on compact groups and their applications to almost periodic functions // Contemporary Math. – 2003. – Vol. 328, № 2. – P. 299 – 322.
6. Grigoryan S.A., Tonev T. Shift-invariant algebras on groups // Contemporary Math. – 2004. – Vol. 363, № 1. – P. 111 – 127.
7. Миротин А.Р. Теорема Пэли – Винера для конусов в локально компактных абелевых группах // Известия высших учебных заведений. Математика. – 1995. – № 3. – С. 35 – 44.
8. Hoffman K. Boundary behavior of generalized analytic functions // Trans. Amer. Math. Soc. – 1958. – Vol. 87, № 3. – P. 447 – 466.
9. Клиффорд А., Престон Г. Алгебраическая теория полугрупп: В 2 т. – М.: Наука, 1972. – Т. 1 – 285 с.
10. Кусис П. Введение в теорию пространств H^p . – М.: Мир, 1984. – 364 с.
11. Rieffel M.A. A characterization of commutative group algebras and measure algebras // Trans. Amer. Math. Soc. – 1965. – Vol. 116, № 4. – P. 32 – 65.