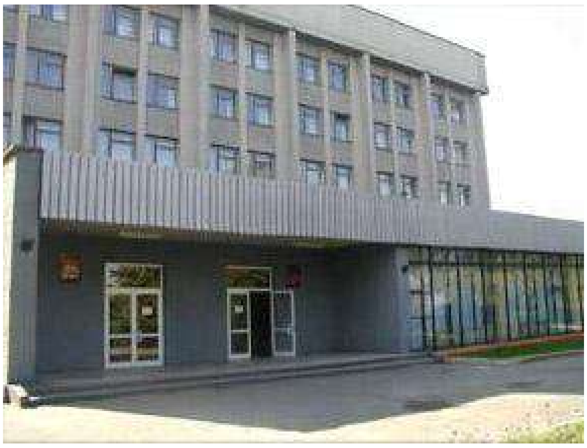
ВЕСНІК

Мазырскага дзяржаўнага педагагічнага універсітэта



2006 2 (15)

Галоўны рэдактар
д. біял. н. В. В. Валетаў

Рэдакцыйная калегія:
к. філал. н., намеснік галоўнага рэдактара С. Б. Кураш,
к. ф.-м. н., адказны сакратар Э. Я. Грачаннікаў,
д. пед. н. В. І. Анісімаў, д. ф.-м. н. В. І. Башмакоў, д. ф.-м. н. В. І. Громак,
к. псіхал. н. Л. М. Іванова, к. пед. н. Л. В. Ісмайлава, д. філал. н. У. І. Коваль,
д. гіст. н. В. М. Ляўко, д. біял. н. В. І. Парфенаў, д. псіхал. н. Л. А. Пергаменшчык,
д. пед. н. В. Ф. Русецкі, д. гіст. н. К. А. Рэвяка, д. псіхал. н. Т. М. Савельева,
д. т. н. У. С. Савенка, д. т. н. В. В. Смірноў, д. т. н. В. Я. Старжынскі,
к. гіст. н. С. В. Целяпень, д. ф.-м. н. В. В. Шапялевіч, д. філал. н. В. В. Шур,
д. ф.-м. н. М. Д. Юдзін, к. ф.-м. н. М. М. Ягораў

Заснавальнік
Установа адукацыі
«Мазырскі дзяржаўны педагагічны універсітэт»

Зарэгістраваны ў Міністэрстве інфармацыі
Рэспублікі Беларусь,
пасведчанне № 1508 ад 30.10.2002 г.

Адрас рэдакцыі:
247760 Рэспубліка Беларусь,
Гомельская вобласць, г. Мазыр,
вул. Студэнцкая, 28.
Тэл.: +375 (2351) 2-46-29

Здадзена ў набор 15.10.2006. Падпісана ў друк 21.12.2006
Фармат 60 x 90 1/8. Папера афсетная.
Гарнітура Times New Roman Cyr. Ум. друк. арк. 24.
Тыраж 120 экз. Заказ № 102.

Ліцэнзія № 02330/0131885 ад 4 снежня 2006 г.

Карэктары: Т. М. Ліпская, Л. М. Бажэнка, П. Р. Кошман, Л. В. Жураўская
Камп'ютэрная верстка: А. Л. Шчака, У. А. Дзегцяроў
Тэхнічны рэдактар: А. В. Ліс

Надрукавана на тэхніцы рэдакцыйна-выдавецкага аддзела
Установы адукацыі
«Мазырскі дзяржаўны педагагічны універсітэт імя І. П. Шамякіна»
247760, Гомельская вобл., г. Мазыр, вул. Студэнцкая, 28, к. 114
Тэл.: +375 (2351) 2-46-29

Меркаванні, выказаныя аўтарамі,
могуць не супадаць з пунктам погляду рэдакцыі

ISBN 978-985-477-195-4
© Мазырскі дзяржаўны педагагічны універсітэт імя І. П. Шамякіна, 2006

ВЕСНІК

Мазырскага дзяржаўнага педагагічнага універсітэта

Навуковы часопіс
Выходзіць 2 разы ў год

№ 2(15) 2006

З М Е С Т

М А Т Э М А Т Ы К А

Гуревский Е. Е., Емеличев В. А., Принцев В. Г. Разрешимость векторных задач о *p*-центре с помощью алгоритма линейной свертки критериев …………………………….. 3

Емеличев В. А., Гуревский Е. Е. О радиусе устойчивости эффективного решения векторной комбинаторной задачи разбиения 10

Романова М. А. Вычисление пространства максимальных идеалов и границы Шилова некоторых алгебр обобщенных аналитических функций ……….. 16

Шкут В. В. Особые точки одной кубической двумерной системы, имеющей частный интеграл в виде алгебраической кривой третьего порядка ……………………………. 22

Юдин М. Д. О нормальных числах 26

Ф І З І К А

Кулак Г. В., Николаенко Т. В., Гуделев В. Г. Оптико-акустическое возбуждение гиперзвука в твердых телах в режиме лазерного испарения ……………………………..….…..... 32

Шепелевич В. В., Загорский А. Е., Коваршик Р., Кислинг А., Матусевич В. Исследование распространения двумерных световых пучков в кристалле $Bi_{12}SiO_{20}$ среза $(\bar{1}\,\bar{1}0)$ …….……. 37

Б І Я Л О Г І Я

Бобрик Т. В. Некоторые биологически активные вещества и микроэлементы в лекарственных растениях белорусского Полесья ………………………………………………….….. 42

Бодяковская Е. А. Современный энтеросорбент в терапии телят, больных гастроэнтеритом …………………...……………………….... 48

Савич И. В., Макаревич Т. А., Остапеня А. П. Структура метафитона и ее динамика (на примере р. Неман) …..……………………………..……... 50

Сикорский В. Г., Грицанок М. Ф. Радиоэкологическая характеристика реки Несвич в белорусском секторе зоны ЧАЭС ……………………………………………………………… 57

Сысова Е. А. Сезонная динамика структуры водорослевых сообществ эпифитона и литорального планктона …………………………………………………………………….... 62

Яблонская И. В. Спектр йододефицитной патологии как показатель йодной обеспеченности населения юго-востока белорусского Полесья ………………………………… 68

Яблонская И. В., Валетов В. В. Экологическая оценка суммарного потока йода, поступающего в пищевые цепи населения юго-востока белорусского Полесья ……………… 73

Г І С Т О Р Ы Я

Воробьев А. А. Выборы во Всероссийское Учредительное собрание в Мозырском уезде Минской губернии ………………………………………………….......................................… 77

Сувалова Е. Н. Национальный вопрос в политической стратегии либеральных партий в Беларуси (февраль – октябрь 1917 г.)……….........………………………………..... 81

Ф І Л А Л О Г І Я

Аўчарэнка А. М. Беларуская прастора і яе герметычнае вымярэнне ў дэтэктыве ….... 86

Гончаренко И. Г. Автор, сказ и диалог в трактовке В. В. Виноградова и М. М. Бахтина 91

Ковш О. А. Эпистемические глаголы и феномен доверия/недоверия (семантическая структура глаголов *верить* и *сомневаться*)………………………………… 95
Крицкая Н. В. Ритмомелодическая организация «русских» поэм М. Цветаевой 99
Лапіцкая Л. І. Назвы сакавіцкіх прысвяткаў у гаворках Усходняга Палесся і вытворныя ад іх ……………………………………………………………………... 104
Назараў В. Ф. Эвалюцыя сатыры Андрэя Мрыя ў апавяданнях канца 1920-х гадоў ………………………………………………………………………………… 107
Рагаўцоў В. І. Вербальнае выражэнне камічнага ў камедыі Францішка Аляхновіча «Пан міністр» 111
Романова Л. В. Неоднословные наименования действия как компонент художественного текста …………………………………………………………………… 116
Пузан Л. В. Критерии идентификации процессуальности в семантике абстрактного имени ……………………………………………………………………….. 120
Савицкая Л. А. Моделирование и принципы подготовки пресс-релизов государственных структур ……………………………………………………………………… 122
Солахаў А. В. Аўтарскія (аказіянальныя) складана-нульсуфіксальныя назоўнікі ў мове беларускай паэзіі 2-ой паловы ХХ стагоддзя ……………………………. 127
Філімонава Н. В. Фразеалагізмы-пажаданні як моўныя знакі нацыянальнай культуры ……………………………………………………………………... 132

ПЕДАГОГІКА І ПСІХАЛОГІЯ

Брель Е. В. Реализация модели формирования аналитических умений школьников на уроках литературы …………………………………………………………… 136
Дорошко Н. В. Проектирование концептуальной модели эвристического обучения студентов на предметном уровне: результаты опытно-экспериментальной работы ......……… 140
Кудан Е. Н. Семья как фактор формирования системы доверительных отношений личности (*обзор проблематики*) …………………………………………………… 145
Лихач Т. П. Языковая личность современного школьника: словообразовательный аспект (*аналитико-статистический обзор*)……………………………………………… 149
Сак Ю. В. Активные методы обучения в подготовке студентов педагогического факультета к преподаванию основ лыжного спорта ……………………………….. 154
Свидерская О. И. Развиваем память детей: о некоторых требованиях к подбору диагностико-развивающего материала ……………………………………………... 158
Палиева Т. В. Модель билингвального образования дошкольников в условиях белорусско-русского двуязычия 162
Чечко Т. Н. Возможности совершенствования обучения и воспитания студентов-первокурсников в процессе изучения «Истории древнерусской литературы» 166

ПЕРСАНАЛІІ 171

ХРОНІКА ……………….. 175

БІБЛІЯГРАФІЯ 177

РЭЦЭНЗІІ 179

РЭФЕРАТЫ 181

АЎТАРЫ НУМАРА …………………….. 189

УДК 517.986

М. А. Романова

ВЫЧИСЛЕНИЕ ПРОСТРАНСТВА МАКСИМАЛЬНЫХ ИДЕАЛОВ И ГРАНИЦЫ ШИЛОВА НЕКОТОРЫХ АЛГЕБР ОБОБЩЕННЫХ АНАЛИТИЧЕСКИХ ФУНКЦИЙ

Впервые рассмотрев в работе [1] обобщенные аналитические функции на пространствах полухарактеров полугрупп, американские математики Р. Аренс и И. Р. Зингер положили начало интересной теории, которая в дальнейшем не осталась незамеченной многими авторами (см., например, монографии [2], [3], а также обзоры [4], [5] и [6]). Целью данной работы является вычисление пространства максимальных идеалов и границы Шилова алгебры обобщенных аналитических функций. Строго говоря, понятие обобщенной аналитичности, принятое в данной работе, является несколько менее ограничительным, чем в [1], и следует подходу, предложенному в [7].

Всюду ниже S – записываемая мультипликативно дискретная абелева полугруппа с сокращениями и единицей e, не являющаяся группой, $G = S^{-1}S$ – (дискретная) группа частных для S (см., например, [8]).

Полухарактером полугруппы S называется гомоморфизм ψ полугруппы S в мультипликативную полугруппу $\overline{D} = \{z \in C \mid |z| \le 1\}$, не являющийся тождественным нулем. **Характерами** называются полухарактеры, равные по модулю единице.

Множество всех **полухарактеров** полугруппы S далее обозначается $\hat{S}$, а его подмножество, состоящее из неотрицательных полухарактеров, – $\hat{S}_+$. Наделенные топологией поточечной сходимости, это компактные топологические полугруппы по умножению с единицей 1 ($\hat{S}$ компактно как замкнутое подмножество в $\overline{D}^S$). (Компактную) **группу характеров** полугруппы S будем обозначать X.

Идеал S_0 называется **простым**, если $S \setminus S_0$ – полугруппа. Таковым идеалом S является ее подполугруппа $S(\rho) := \{s \in S \mid \rho(s) > 0\}$. Отметим, что простые идеалы – в точности множества нулей полухарактеров. Простые идеалы, отличные от $S \setminus \{e\}$, будем называть **нетривиальными**.

Степень ρ^0 по определению есть индикатор носителя ρ и $\rho^z \in \hat{S} \setminus X$ при $\rho \in \hat{S}_+$, $\rho \ne 1$, $z \in \Pi$, где $\Pi := \{\operatorname{Re} z > 0\}$ (см. [1], §7).

Определение 1 [1]**.** Комплекснозначная функция F на $\hat{S} \setminus X$ называется **обобщенной аналитической в смысле Аренса-Зингера**, если F может быть равномерно приближена на компактных подмножествах $\hat{S} \setminus X$ функциями вида $\hat{f}(\psi) = \sum_{s \in S} f(s)\psi(s)$, где $f \in l_1(S)$, $\psi \in \hat{S}$.

Равномерную алгебру всех функций, непрерывных на $\hat{S}$ и обобщенных аналитических в смысле Аренса-Зингера, обозначим $A_0(\hat{S})$ (фактически она зависит от S, а не только от $\hat{S}$).

Определение 2 [7]**.** Комплекснозначная функция F на $\hat{S} \setminus X$ называется **обобщенной аналитической**, если при ρ, $\psi \in \hat{S} \setminus X$, $\rho \ge 0$ функция $z \mapsto F(\rho^z \psi)$ аналитична на Π и непрерывна в $+0$.

Равномерную алгебру всех функций, непрерывных на $\hat{S}$ и обобщенных аналитических в смысле последнего определения, обозначим $A(\hat{S})$.

Из теоремы 7.4 в [1] сразу следует, что $A_0(\hat{S}) \subset A(\hat{S})$, но строгое включение возможно.

Далее нам понадобится следующая

Теорема 1. *Пусть* $S^{-1} \cap S = \{e\}$. *Если существует такой полухарактер* $\rho_1 \in \hat{S}_+$, *что* $0 < \rho_1(s) < 1$ *при всех* $s \in S$, $s \ne e$, *то при всех* $F \in A(\hat{S})$

$$\int_X F(\chi)d\chi = F(\omega).$$

Доказательство этой теоремы будет дано в совместной статье автора и А. Р. Миротина «Интерполяционные множества алгебры обобщенных аналитических функций».

Определение 3. Аналитическими полиномами будем называть функции на $\hat{S}$ вида

$$p(\psi) := \sum_{i=1}^{n} c_i \hat{a}_i(\psi),$$

где $c_i \in C$, $\psi \in \hat{S}$, $\hat{a}_i(\psi) := \psi(a_i)$, $a_i \in S$.

Определение 4. Будем говорить, что алгебра $A(\hat{S})$ обладает **свойством полиномиальной аппроксимации**, если произвольная функция F из $A(\hat{S})$ может быть равномерно приближена на $\hat{S}$ аналитическими полиномами.

Определение 5 [7]**.** Полугруппу S будем называть **конусом** в G, если для любого $x \in G$ найдется такой $\rho \in \hat{S}_+$, что $\tilde{\rho}(x) > 1$ ($\tilde{\rho}$ – продолжение полухарактера ρ на G).

Теорема 2. *Предположим, что S есть конус в G и не содержит нетривиальных простых идеалов. Тогда $A(\hat{S}) = A_0(\hat{S})$.*

Доказательство. Заметим сначала, что множество $A(\hat{S})$ содержится в пространстве $H^2(\hat{S} \setminus X)$, определенном в [0], т. е. что каждая функция $F \in A(\hat{S})$ обладает следующими свойствами:

1) для каждого $\rho \in \hat{S}_+ \setminus X$ функция $F_\rho : \chi \mapsto F(\rho\chi)$ принадлежит $L^2(X)$ и нормы всех таких функций в $L^2(X)$ ограничены в совокупности;

2) для любых ρ, $\rho_1 \in \hat{S}_+ \setminus X$ преобразования Фурье функций F_{ρ_1} и $F_{\rho_1\rho^0}$ совпадают на группе частных полугруппы $S(\rho)$;

3) F обобщенная аналитическая функция в смысле определения 1.

В самом деле, в доказательстве нуждается лишь свойство 2, которое достаточно проверить для единственного полухарактера $\rho = \omega$, принимающего нулевые значения. Но в этом случае оно сразу следует из теоремы 1, примененной к функции $\psi \mapsto F(\rho_1\psi)$.

Если теперь мы положим $F* = F \mid X$, то следствие 5.2 из [0] показывает, что спектр (т. е. носитель преобразования Фурье) функции $F*$ содержится в S. Поэтому для любого $\varepsilon > 0$ найдется аналитический полином p такой, что

$$| p(\chi) - F(\chi) | < \varepsilon \text{ для всех } \chi \in X .$$

Пусть $\Phi(\psi) = p(\psi) - F(\psi)$ $(\psi \in \hat{S})$, и предположим, что $\max_{\hat{S}} | \Phi | = | \Phi(\psi_1) |$, где $\psi_1 = \rho_1\chi_1$. У нас $\rho_1 \neq 1$; кроме того, мы можем считать, что $\rho_1 \neq \omega$, поскольку в силу теоремы 1 $| \Phi(\omega) | \leq \max_X | \Phi |$.

Обозначим через κ отображение множества $\Pi \cup \{0\}$ в $\hat{S}$, заданное формулой $\kappa(z) = \rho_1^z \chi_1$. Тогда модуль аналитической в Π функции $\Phi \circ \kappa$ достигает своего максимума в точке $z = 1$, а потому $\Phi \circ \kappa = const$ в Π. С учетом непрерывности получаем $\Phi \circ \kappa(0) = \Phi \circ \kappa(1)$, т. е. $\Phi(\psi_1) = \Phi(\chi_1)$, так как у нас $\rho_1^0 = 1$. Таким образом,

$$| p(\psi) - F(\psi) | < \varepsilon \text{ для всех } \psi \in \hat{S}.$$

Последнее означает, что алгебра $A(\hat{S})$ обладает свойством полиномиальной аппроксимации, т. е. $A(\hat{S}) \subset A_0(\hat{S})$. Обратное включение отмечено выше.□

Определение 6 [5]**. Слабой оболочкой** полугруппы S называется множество

$$[S]_w = \{a \in G \mid \exists m_a \in N : \forall n \geq m_a \; a^n \in S\}.$$

Теорема 3. *Пусть $[S]_w$ есть конус в G и не содержит нетривиальных простых идеалов. Тогда пространство максимальных идеалов $\mathrm{M}_{A(\hat{S})}$ алгебры $A(\hat{S})$ можно отождествить с $\hat{S}$, а ее границу Шилова $\partial_{A(\hat{S})}$ – с X.*

Доказательству теоремы 3 предпошлем две леммы.

Лемма 1. *Отображение сужения* $\zeta \mapsto \zeta \mid S$ *есть топологический изоморфизм полугруппы полухарактеров (полугруппы неотрицательных полухарактеров, группы характеров) полугруппы* S *и полугруппы полухарактеров (соответственно полугруппы неотрицательных полухарактеров, группы характеров) полугруппы* $[S]_w$.

Доказательство. Рассмотрим отображение $i : [\widehat{S}]_w \to \widehat{S}$, $i(\zeta) = \zeta \mid S$ и докажем, что оно осуществляет требуемый изоморфизм.

1. Для доказательства сюрьективности воспользуемся полярным разложением $\psi = \rho\chi$ ($\rho \in \widehat{S}_+, \chi \in X$), справедливым для любого полухарактера $\psi \in \widehat{S}$.

Характер χ продолжается до характера группы частных $S^{-1}S$ по формуле $\tilde{\chi}(a^{-1}b) := \overline{\chi(a)}\chi(b)$.

Покажем, что это определение корректно. Пусть $x = a^{-1}b = c^{-1}d$, тогда $cb = ad$. Следовательно, $\chi(cb) = \chi(ad)$, т. е.

$$\chi(c)\chi(b) = \chi(a)\chi(d).$$

А это значит, что $\overline{\chi(a)}\chi(b) = \overline{\chi(c)}\chi(d)$.

Далее, $\tilde{\chi}$ – гомоморфизм, так как

$$\tilde{\chi}(xy) = \tilde{\chi}(a^{-1}bc^{-1}d) = \tilde{\chi}((ac)^{-1}bd) = \overline{\chi(ac)}\chi(bd) = \overline{\chi(a)}\chi(b)\overline{\chi(c)}\chi(d) = \tilde{\chi}(x)\tilde{\chi}(y).$$

Очевидно, что $|\tilde{\chi}(a^{-1}b)| = 1$. Следовательно, $\tilde{\chi}$ – характер.

Положим, $\chi_w = \tilde{\chi} \mid [S]_w$. Тогда χ_w является характером полугруппы $[S]_w$. Таким образом, каждому характеру χ полугруппы S сопоставляется характер χ_w слабой оболочки такой, что $\chi_w \mid S = \chi$.

Для любого $a \in [S]_w$ положим, $\rho_w := \sqrt[n]{\rho(a^n)}$, где $a^n \in S$, $n \in N$. Это определение корректно, так как

$$\sqrt[n]{\rho(a^n)} = \sqrt[n(n+k)]{\rho(a^n)^{n+k}} = \sqrt[n(n+k)]{\rho(a^{n(n+k)})} = \sqrt[n(n+k)]{\rho(a^{n+k})^n} = \sqrt[n+k]{\rho(a^{n+k})}.$$

Покажем, что ρ_w – гомоморфизм. Возьмём натуральное n такое, что $a^n \in S$ и $b^n \in S$. Тогда

$$\rho_w(ab) = \sqrt[n]{\rho((ab)^n)} = \sqrt[n]{\rho(a^n b^n)} = \sqrt[n]{\rho(a^n)}\sqrt[n]{\rho(b^n)} = \rho_w(a)\rho_w(b).$$

Очевидно, что $0 \le \rho_w \le 1$, так как $0 \le \rho \le 1a$.

Следовательно, ρ_w – неотрицательный полухарактер слабой оболочки и $\rho_w \mid S = \rho$.

Таким образом, мы построили полухарактер $\psi_w := \rho_w \chi_w$ полугруппы $[S]_w$ такой, что $i(\psi_w) = \psi$.

2. Инъективность. Рассмотрим произвольные полухарактеры ζ_1, $\zeta_2 \in [\widehat{S}]_w$ такие, что $\zeta_1 \ne \zeta_2$, т. е. $\exists a \in [S]_w$ что $\zeta_1(a) \ne \zeta_2(a)$. Допустим $\zeta_1(x) = \zeta_2(x)$ для любого $x \in S$. Тогда $\zeta_1(a^n) = \zeta_2(a^n)$ при $a^n \in S$. А это значит, что $\zeta_1(a)^n = \zeta_2(a)^n$. Следовательно, $\zeta_1(a) = \zeta_2(a)$. Противоречие.

3. Отображение i является гомоморфизмом, так как для любых ζ_1, $\zeta_2 \in [\widehat{S}]_w$ имеем

$$i(\zeta_1\zeta_2) = (\zeta_1\zeta_2) \mid S = \zeta_1 \mid S \ \zeta_2 \mid S = i(\zeta_1)i(\zeta_2).$$

4. Наконец, так как O_y является взаимно однозначным и, очевидно, непрерывным отображением компакта $[\hat{S}]_w$ на компакт $\hat{S}$, то i – гомеоморфизм.

Для полугрупп неотрицательных полухарактеров и групп характеров доказательство аналогично. □

Определение 7. Для любого x из $[S]_w$ определим $\hat{x}(\psi) := \psi_w(x)$.

Следствие. *Если* $A(\hat{S}) = A_0(\hat{S})$*, то* $S = [S]_w$.

Доказательство. Пусть $S \neq [S]_w$, $x \in [S]_w \setminus S$. Тогда функция $\hat{x}(\psi)$, как легко проверить, принадлежит $A(\hat{S})$, но не принадлежит $A_0(\hat{S})$, поскольку преобразование Фурье ее сужения на X сосредоточено на множестве $\{x\}$. □

Лемма 2. *Алгебра* $A(\hat{S})$ *изометрически изоморфна алгебре* $A([\hat{S}]_w)$.

Доказательство. Покажем, что искомым изоморфизмом служит отображение $i : A(\hat{S}) \to A([\hat{S}]_w)$, определяемое равенством $i*(F) := F \circ i$, где i – отображение, построенное в доказательстве леммы 1. Таким образом, для $\zeta \in [\hat{S}]_w$ имеем $i*(F)(\zeta) = F(i(\zeta)) = F(\zeta \mid S)$.

При $F \in A(\hat{S})$ отображение $i*(F)$ непрерывно на $[\hat{S}]_w$ и для любых не являющихся характерами ρ, $\psi \in [\hat{S}]_w$, $\rho \geq 0$, $z \in \Pi$

$$i*(F)(\rho^z\psi) = F(i(\rho^z\psi)) = F((\rho^z\psi) \mid S) = F(\rho_1^z\psi_1),$$

где $\rho_1 = \rho \mid S$, $\psi_1 = \psi \mid S$. Следовательно, $i*(F) \in A([\hat{S}]_w)$.

Докажем инъективность $i*$. Рассмотрим F_1, $F_2 \in A(\hat{S})$ такие, что $F_1(\psi) \neq F_2(\psi)$ при некотором $\psi \in \hat{S}$. Из доказательства сюрьективности в лемме 1 следует, что существует ζ – продолжение ψ на $[\hat{S}]_w$. Допустим, что $i*(F_1)(\zeta) = i*(F_2)(\zeta)$, тогда $F_1(\psi) = F_2(\psi)$. Противоречие.

Для доказательства сюрьективности для каждой функции H на $[\hat{S}]_w$ определим функцию F на $\hat{S}$ следующим образом: $F(\psi) = H(\psi_w)$. Корректность этого определения следует из инъективности отображения i. Таким образом,

$$i*(F)(\psi_w) = F(i(\psi_w)) = F(\psi_w \mid S) = F(\psi) = H(\psi_w).$$

Так как $F(\rho^z\psi) = H(\rho_w^z\psi_w)$, то F принадлежит $A(\hat{S})$.

Для $\zeta \in [\hat{S}]_w$ имеем

$$i*(F_1F_2)(\zeta) = F_1F_2(i(\zeta)) = F_1F_2(\zeta \mid S) = F_1(\zeta \mid S)F_2(\zeta \mid S) = F_1(i(\zeta))F_2(i(\zeta)) = i*(F_1)(\zeta)i*(F_2)(\zeta).$$

Последнее означает гомоморфность $i*$.

Докажем изометричность. Имеем

$$\| i*(F) \| = \max\{| F(\zeta \mid S) | \mid \zeta \in [\hat{S}]_W\} = \max\{| F(\psi) | \mid \psi \in \hat{S}\} = \| F \|.$$

Доказательство теоремы 3. Допустим, что полугруппа $[S]_w$ не содержит нетривиальных простых идеалов и является конусом в группе G. Тогда из теоремы 2 следует, что $A([\hat{S}]_w) = A_0([\hat{S}]_w)$. Но для алгебры $A_0([\hat{S}]_w)$ известно, что пространство максимальных идеалов $\mathrm{M}_{A_0([\hat{S}]_w)}$ изоморфно $[\hat{S}]_w$ и граница Шилова $\partial_{A_0([\hat{S}]_w)}$ изоморфна X_w, где X_w –

группа характеров $[S]_w$. Следовательно, пространство максимальных идеалов $\mathrm{M}_{A([\hat{S}]_w)}$ можно отождествить с $[\hat{S}]_w$, а границу Шилова $\partial_{A_0([\hat{S}]_w)}$ – с X_w. Используя лемму 2, получаем утверждение теоремы. □

Определение 8. Обобщенными аналитическими полиномами будем называть функции на $\hat{S}$ вида

$$p*(\psi):=\sum_{i=1}^{n}c_i\hat{x}_i(\psi),$$

где $c_i \in C$, $\psi \in \hat{S}$, $x_i \in [S]_w$.

Определение 9. Будем говорить, что алгебра $A(\hat{S})$ обладает **свойством слабой полиномиальной аппроксимации**, если произвольная функция F из $A(\hat{S})$ может быть равномерно приближена на $\hat{S}$ обобщенными аналитическими полиномами.

Теорема 4. *Пусть алгебра $A(\hat{S})$ обладает свойством слабой полиномиальной аппроксимации. Тогда пространство максимальных идеалов $\mathrm{M}_{A(\hat{S})}$ этой алгебры можно отождествить с $\hat{S}$, а ее границу Шилова $\partial_{A(\hat{S})}$ – с X.*

Доказательство. Для $\varphi \in \mathrm{M}_{A(\hat{S})}$ положим $\zeta(x):=\varphi(\hat{x})$, $x \in [S]_w$. Тогда $\zeta \in [\hat{S}]_w$, причем $\hat{x}(\zeta \mid S)=\varphi(\hat{x})$. Если $p*=\sum_{i=1}^{n}c_i\hat{x}_i$ ($c_i \in C$, $x_i \in [S]_w$) – обобщенный аналитический полином, то

$$\varphi(p*)=\sum_{i=1}^{n}c_i\varphi(\hat{x}_i)=\sum_{i=1}^{n}c_i\hat{x}_i(\zeta \mid S)=p*(\zeta \mid S).$$

Для произвольной функции F из $A(\hat{S})$ имеем $F=\lim_{n\to\infty}p_n*$, где p_n* – обобщенные аналитические полиномы. Поэтому

$$\varphi(F)=\lim_{n\to\infty}\varphi(p_n*)=\lim_{n\to\infty}p_n*(\zeta \mid S)=F(\zeta \mid S).$$

Рассмотрим отображение $\Lambda:\hat{S}\to \mathrm{M}_{A(\hat{S})}$, которое каждому ψ из $\hat{S}$ сопоставляет комплексный гомоморфизм φ_ψ из $\mathrm{M}_{A(\hat{S})}$ по формуле $\varphi_\psi(F)=F(\psi)$. Тогда Λ – гомеоморфизм. Действительно, если ψ_1, $\psi_2 \in \hat{S}$, $\psi_1 \neq \psi_2$, то $\varphi_{\psi_1}(\hat{a}) \neq \varphi_{\psi_2}(\hat{a})$ для некоторого $a \in S$. К тому же отображение Λ является сюрьективным по доказанному выше. Таким образом, оно биективно. Для доказательства его непрерывности рассмотрим последовательность $\psi_n \in \hat{S}$, сходящуюся к $\psi \in \hat{S}$. Тогда $\Lambda(\psi_n)$ сходится к $\Lambda(\psi)$, так как при $F \in A(\hat{S})$ имеем $\varphi_{\psi_n}(F)\to\varphi_\psi(F)$ в силу непрерывности F. Поскольку $\hat{S}$ – компакт, то Λ – гомеоморфизм.

Докажем второе утверждение теоремы. Покажем сначала, что $\partial_{A(\hat{S})} \subset X$. Для этого достаточно доказать, что X является границей. Если это не так, то

$$M:=\max_{\hat{S}}|F|>m:=\max_{X}|F|$$

для некоторой функции $F \in A(\hat{S})$. Для $\varepsilon<(M-m)/2$ подберем аналитический полином $p*$ таким образом, чтобы $\max_{\hat{S}}|F-p*|<\varepsilon$. Тогда $|p*(\chi)|<|F(\chi)|+\varepsilon \le m+\varepsilon$ при всех $\chi \in X$. Напомним, что для произвольного $\psi \in \hat{S}$ $p*(\psi):=\sum_{i=1}^{n}c_i\hat{x}_i(\psi)$. Рассмотрим $f \in \ell_1([S]_w)$

такую, что $f(x)=c_i$, если $x=x_i$, $f(x)=0$ – в противном случае. Тогда $p(\psi)=\hat{f}(\psi_{w})$. Далее из теоремы 3.4 в [1] известно, что $M_{\ell_1([S]_w)}=[\hat{S}]_w$, $\partial_{\ell_1([S]_w)}=X_w$. Поэтому в силу леммы 1

$$\max_{\psi\in\hat{S}}|p^*(\psi)| = \max_{\psi\in\hat{S}}|\hat{f}(\psi_w)| = \max_{\zeta\in[\hat{S}]_w}|\hat{f}(\zeta)| = \max_{\xi\in X_w}|\hat{f}(\xi)| = \max_{\xi\in X}|p^*(\xi \mid S)| = \max_{\chi\in XS}|p^*(\chi)|.$$

Таким образом, $\max_{\hat{S}}|p^*|\le m+\varepsilon$.

С другой стороны, $|p^*(\psi)|<|F(\psi)|-\varepsilon$ при всех $\psi\in\hat{S}$, а потому $\max_{\hat{S}}|p^*|\ge M-\varepsilon$, что противоречит выбору ε. Это доказывает требуемое включение.

Наконец, так как алгебра $A(\hat{S})$ инвариантна относительно естественного действия группы X (умножения на характеры являются автоморфизмами полугруппы $\hat{S}$), то такова и ее граница Шилова, а потому эта граница совпадает с X.□

Литература

1. Arens, R. Generalised analytic functions / R. Arens, I. M. Singer // Trans. Amer. Math. Soc. – 1956. – Vol. 81, № 2. – P. 379–393.

2. Гамелин, Т. Равномерные алгебры / Т. Гамелин. – М. : Мир, 1973. – 336 с.

3. Rudin, W. Fourier analysis on groups / W. Rudin. – N.Y. : Interscience Publishers, 1962. – 285 p.

4. Helson, H. Analyticity on compact abelian groups / H. Helson // Algebras in analysis : proceedings of instructional conference and NATO advanced Study Institute, Birmingem, 1973 / Kluwer ; H. Helson, ed. – London, 1975. – P. 1–62.

5. Tonev, T. Analytic functions on compact groups and their applications to almost periodic functions / T. Tonev, S. A. Grigoryan // Amer. Math. Soc. – 2003. – Vol. 328, № 2. – P. 299–322.

6. Grigoryan, S. A. Shift-invariant algebras on groups / S. A. Grigoryan, T. Tonev // Amer. Math. Soc. – 2004. – Vol. 363б, № 1. – P. 111–127.

7. Миротин, А. Р. Теорема Пэли-Винера для конусов в локально компактных абелевых группах / А. Р. Миротин // Известия высших учебных заведений. Математика. – 1995. – № 3. – С. 35–44.

8. Клиффорд, А. Алгебраическая теория полугрупп : в 2 т. / А. Клиффорд, Г. Престон. – М. : Наука, 1972. – Т. 1. – 285 с.

Summary

Spaces of maximal ideals and Shilov's boundaries of some uniform algebras of generalised analytic functions have been calculated.

Поступила в редакцию 16.05.06.