ISSN 0002–3574

ВЕСЦІ

НАЦЫЯНАЛЬНАЙ АКАДЭМІІ НАВУК БЕЛАРУСІ

СЕРЫЯ ФІЗІКА-МАТЭМАТЫЧНЫХ НАВУК

ИЗВЕСТИЯ

НАЦИОНАЛЬНОЙ АКАДЕМИИ НАУК БЕЛАРУСИ

СЕРИЯ ФИЗИКО-МАТЕМАТИЧЕСКИХ НАУК

PROCEEDINGS

OF THE NATIONAL ACADEMY OF SCIENCES OF BELARUS

PHYSICS AND MATHEMATICS SERIES

2

Мінск
«Беларуская навука»
2007

ВЕСЦІ
НАЦЫЯНАЛЬНАЙ АКАДЭМІІ НАВУК БЕЛАРУСІ

СЕРЫЯ ФІЗІКА-МАТЭМАТЫЧНЫХ НАВУК 2007 № 2

ИЗВЕСТИЯ
НАЦИОНАЛЬНОЙ АКАДЕМИИ НАУК БЕЛАРУСИ

СЕРИЯ ФИЗИКО-МАТЕМАТИЧЕСКИХ НАУК 2007 № 2

ЗАСНАВАЛЬНІК — НАЦЫЯНАЛЬНАЯ АКАДЭМІЯ НАВУК БЕЛАРУСІ

Часопіс выдаецца са студзеня 1965 г.

Выходзіць чатыры разы ў год

ЗМЕСТ

МАТЭМАТЫКА

ФІЗІКА

ІНФАРМАТЫКА

КАРОТКІЯ ПАВЕДАМЛЕННІ

ИЗВЕСТИЯ НАЦИОНАЛЬНОЙ АКАДЕМИИ НАУК БЕЛАРУСИ 2007, № 2

Серия физико-математических наук

на русском и белорусском языках

Тэхнічны рэдактар Т. В. Лецьен

Камп'ютэрная вёрстка В. А. Тоўстая

Здадзена ў набор 18.04.2007 г. Падпісана ў друк 30.05.2007 г. Выхад ў свет 28.06.2007 г. Фармат $60 \times 84^1/_8$. Папера афсетная. Ум. друк. арк. 14,88. Ум. фарб.-адб. 15,58. Ул.-выд. арк. 16,4. Тыраж 135 экз. Заказ 163.

Кошт нумару: індывідуальная падпіска – 5090 руб., ведамасная падпіска – 5141 руб.

Рэспубліканскае унітарнае прадпрыемства «Выдавецкі дом «Беларуская навука». ЛВ № 02330/0131569 ад 11.05.2005. 220141. Мінск, вул. Ф. Скарыны, 40. Пасведчанне № 458.

Надрукавана ў РУП «Выдавецкі дом «Беларуская навука».

© «Выдавецкі дом «Беларуская навука»
Весці НАН Беларусі, серыя фізіка-матэматычных навук, 2007

УДК 517.986

А. Р. МИРОТИН, М. А. РОМАНОВА

ОБ *H*-АВТОМОРФНЫХ ОБОБЩЕННЫХ АНАЛИТИЧЕСКИХ ФУНКЦИЯХ

Гомельский государственный университет им. Ф. Скорины

(Поступила в редакцию 16.09.2005)

Введение и предварительные сведения. Обобщенные аналитические функции на пространствах полухарактеров полугрупп введены в [1]. В дальнейшем ими занимались многие авторы (см., например, монографии [2, 3], а также обзоры [4, 5] и [6]). Более общее определение было дано в [7]. В данной работе вводятся и изучаются алгебры обобщенных аналитических функций как в том, так и в другом смысле, инвариантные относительно некоторой группы H-автоморфизмов пространства полухарактеров («H-автоморфные функции»). Показано, что при определенных условиях алгебры таких функций изоморфны алгебрам всех обобщенных аналитических функций над некоторой другой полугруппой, что сводит теорию H-автоморфных функций к общей теории обобщенных аналитических функций. Рассмотрен также вопрос об антисимметричности таких алгебр. В частности, доказано, что алгебра обобщенных аналитических в смысле [7] функций над полугруппой S антисимметрична, когда S не содержит нетривиальных простых идеалов.

Всюду ниже S – записываемая мультипликативно дискретная абелева полугруппа с сокращениями и единицей e, не являющаяся группой, $G = S^{-1}S$ – (дискретная) группа частных для S (см., например, [8]).

Полухарактером полугруппы S называется гомоморфизм ψ полугруппы S в мультипликативную полугруппу $\overline{\mathbb{D}} = \{z \in \mathbb{C} : |z| \leq 1\}$, не являющийся тождественным нулем. *Характерами* называются полухарактеры, равные по модулю единице.

Множество всех полухарактеров далее обозначается $\hat{S}$, а его подмножество, состоящее из неотрицательных полухарактеров, – $\hat{S}_+$. В топологии поточечной сходимости – это компактные топологические полугруппы по умножению с единицей 1 ($\hat{S}$ компактно как замкнутое подмножество в $\overline{\mathbb{D}}^S$). (Компактную) группу характеров полугруппы S будем обозначать Χ.

Отметим, что степень ρ^0 по определению есть индикатор носителя $\rho \in \hat{S}_+$ и что $\rho^z \in \hat{S} \setminus \mathrm{X}$ при $\rho \in \hat{S}_+, \rho \neq 1, z \in \Pi$, где $\Pi := \{\operatorname{Re} z > 0\}$ (см. [1, §7]). Сужение функции f на подмножество M ее области определения обозначается $f \mid M$, конец доказательства или примера – □.

1. *H*-автоморфные обобщенные аналитические функции.

Определение 1 [1]. Комплекснозначная функция F на $\hat{S} \setminus \mathrm{X}$ называется *обобщенной аналитической в смысле Аренса – Зингера*, если F может быть равномерно приближена на компактных подмножествах $\hat{S} \setminus \mathrm{X}$ функциями вида $\hat{f}(\psi) = \sum_{s \in S} f(s)\psi(s)$, где $f \in \ell_1(S)$, $\psi \in \hat{S}$.

Равномерную алгебру всех функций, непрерывных на $\hat{S}$ и обобщенных аналитических в смысле Аренса – Зингера, обозначим $A_0(\hat{S})$ (фактически она зависит от S, а не только от $\hat{S}$).

О п р е д е л е н и е 2 [7]. Комплекснозначную функцию F на $\hat{S}\setminus \mathrm{X}$ будем называть *обобщенной аналитической*, если для любых полухарактеров ρ, ψ из $\hat{S}\setminus \mathrm{X}$, $\rho \geq 0$ отображение $z \mapsto F(\rho^z \psi)$ аналитично в открытой правой полуплоскости Π и непрерывно в $+0$.

Равномерную алгебру всех функций, непрерывных на $\hat{S}$ и обобщенных аналитических в смысле определения 2, обозначим $A(\hat{S})$.

Из теоремы 7.4 [1] сразу следует, что $A_0(\hat{S}) \subset A(\hat{S})$, но следующий пример показывает, что строгое включение возможно.

Пример 1. Если S есть аддитивная полугруппа $\{0, 2, 3, \ldots\}$, то функция $F(z) = z$ принадлежит $A(\hat{S}) = A(\overline{\mathbb{D}})$, но по теореме 2.6 из [1] не аналитична по Аренсу – Зингеру, так как преобразование Фурье ее сужения на единичную окружность не сосредоточено на S.□

Далее H будет обозначать замкнутую подгруппу группы X. Группа H действует на $\hat{S}$ гомеоморфизмами $\psi \mapsto \xi\psi$ ($\psi \in \hat{S}, \xi \in H$). При этом отношение на $\hat{S}$, определяемое как $\psi_1 \sim \psi_2 :=$ $\psi_1 = \xi\psi_2$ при некотором $\xi \in H$, является отношением эквивалентности, согласованным со структурой полугруппы в $\hat{S}$, т. е. конгруэнцией. Следовательно, соответствующее факторпространство, которое мы обозначим $\hat{S}/H$, является полугруппой (см., например, [8]). Оно компактно в силу [9, гл. 3, § 4, следствие 1 предложения 2].

О п р е д е л е н и е 3. Функция F из $A_0(\hat{S})$ (или $A(\hat{S})$) называется *H-автоморфной*, если она инвариантна относительно отмеченного выше действия группы H на $\hat{S}$, т. е. $F(\psi) = F(\xi\psi)$ при $\psi \in \hat{S}$, $\xi \in H$.

Подалгебры алгебр $A_0(\hat{S})$ и $A(\hat{S})$, состоящие из всех H-автоморфных функций, будем обозначать $A_0(\hat{S}/H)$ и $A(\hat{S}/H)$ соответственно.

Пример 2. Для любой функции F из $A(\hat{S})$ ее усреднение по H

$$F_H(\psi) = \int_H F(\xi\psi)d\xi$$

($d\xi$ – мера Хаара группы H), принадлежит $A(\hat{S}/H)$.

Теория алгебр $A_0(\hat{S}/H)$ исчерпывается следующей теоремой ($H^{\perp}$ обозначает аннулятор подгруппы $H \subset \mathrm{X}$).

Т е о р е м а 1. *Алгебра* $A_0(\hat{S}/H)$ *изометрически изоморфна алгебре* $A_0((S \cap H^{\perp})^{\wedge})$.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Известно [1, теоремы 2.6, 4.6], что отображение сужения $F \mapsto F|\mathrm{X}$ есть изометрический изоморфизм алгебры $A_0(\hat{S})$ на равномерную алгебру

$$A_S = \{\Phi \in C(\mathrm{X}) \,|\, \mathbf{F}\Phi \text{ сосредоточено на } S\},$$

где $\mathbf{F}$ – преобразование Фурье на X. При этом функция F из $A_0(\hat{S})$ принадлежит $A_0(\hat{S}/H)$, если и только если сужение $F|\mathrm{X}$ H-инвариантно. Действительно, в этом случае при $\xi \in H$ функция $\psi \mapsto F(\xi\psi) - F(\psi)$ из $A_0(\hat{S})$ равна 0 на X, а потому и на $\hat{S}$ (X – граница Шилова для $A_0(\hat{S})$, [1, теорема 4.6]. Далее, функция $\Phi \in C(\mathrm{X})$ H-инвариантна тогда и только тогда, когда $\mathbf{F}\Phi$ сосредоточено на $H^{\perp}$. Поэтому функция $\Phi \in A_S$ H-инвариантна, если и только если $\Phi \in A_{S \cap H^{\perp}}$. Следовательно, ($\cong$ обозначает изометрический изоморфизм):

$$A_0(\hat{S}/H) \cong A_{S\cap H^{\perp}} \cong A_0((S\cap H^{\perp})^{\wedge}) .\square$$

Перейдем к доказательству аналога теоремы 1 для алгебры $A(\hat{S}/H)$.

Определение 3 [6]. Подполугруппа $S_1 \subset S$ называется *полной в* S, если $S_1^{-1}S_1 \cap S = S_1$.

Лемма 1. *Если S_1 полна в S, то любой (неотрицательный) полухарактер полугруппы S_1 продолжается до (неотрицательного) полухарактера полугруппы S.*

Доказательство. Воспользуемся «полярным разложением» $\psi_1 = \rho_1\alpha_1$, справедливым для любого полухарактера $\psi_1 \in \hat{S}_1$, где $\rho_1 \in \hat{S}_{1+}$, α_1 – характер полугруппы S_1 [1, теорема 3.1]. В силу теоремы 10 из [6] функция $\theta_1 := -\log\rho_1$ ($\log 0 := -\infty$) продолжается до гомоморфизма θ полугруппы S в аддитивную полугруппу $[0;+\infty]$. С другой стороны, характер α_1 продолжается до характера α группы $S_1^{-1}S_1$ по формуле $\alpha(a^{-1}b) = \overline{\alpha_1(a)}\alpha_1(b)$. В свою очередь, α по теореме Понтрягина продолжается до характера χ группы G. Полухарактер $\psi := \exp(-\theta)(\chi\,|\,S)$ будет теперь искомым продолжением ψ_1 на S.$\square$

Заметим, что для подгруппы $H \subset \mathrm{X}$ существует естественный гомоморфизм полугрупп

$$i: \hat{S}/H \to (S\cap H^{\perp})^{\wedge},$$

определяемый как $i([\psi]) = \psi\,|\,(S\cap H^{\perp})$ ($[\psi]$ – класс смежности ψ по подгруппе H). Следующий пример показывает, что i может не быть изоморфизмом.

Пример 3. Пусть $G=\mathbb{Z}\times\mathbb{Z}$, $S=\mathbb{Z}\times\mathbb{N}\cup\{(0,0)\}$, $H=\{1\}\times\mathbb{T}$ – компактная подгруппа $X=\mathbb{T}\times\mathbb{T}$. Тогда $H^{\perp}=\mathbb{Z}\times\{0\}$, $S\cap H^{\perp}=\{(0,0)\}$, а потому $(S\cap H^{\perp})^{\wedge}$ тривиальна. С другой стороны, для любой полугруппы S ее неотрицательные полухарактеры попарно не H-эквивалентны, т. е. $\hat{S}/H$ содержит подполугруппу, изоморфную $\hat{S}_+$. Осталось заметить, что последняя полугруппа в нашем примере нетривиальна (она содержит полухарактеры $\rho(m,n) = r^n$, $r \in [0,1]$).$\square$

Для любой точки $s \in S\cap H^{\perp}$ обозначим через $\tilde{s}$ такую функцию на $\hat{S}/H$, что $\tilde{s}([\psi]) = \psi(s)$, и положим $(S\cap H^{\perp})^{\sim} = \{\tilde{s}\,|\,s \in S\cap H^{\perp}\}$.

Лемма 2. *Гомоморфизм i является изоморфизмом тогда и только тогда, когда $(S\cap H^{\perp})^{\sim}$ разделяет точки $\hat{S}/H$. При этом условии i – топологический изоморфизм.*

Доказательство. Поскольку полугруппа $S\cap H^{\perp}$ полна в S, сюръективность i следует из леммы 1. Условие разделения точек влечет инъективность i. Наконец, i непрерывно в силу непрерывности композиции $i\circ\pi: \psi \mapsto \psi\,|\,(S\cap H^{\perp})$, где $\pi: \hat{S} \to \hat{S}/H$ – естественное отображение, и гомеоморфность i следует из компактности $\hat{S}/H$.$\square$

Теорема 2. *Алгебра $A((S\cap H^{\perp})^{\wedge})$ изометрически изоморфна подалгебре алгебры $A(\hat{S}/H)$. Если $(S\cap H^{\perp})^{\sim}$ разделяет точки $\hat{S}/H$, то это изоморфизм на всю алгебру $A(\hat{S}/H)$.*

Доказательство. Рассмотрим отображение $j: A((S\cap H^{\perp})^{\wedge}) \to \mathbb{C}^{\hat{S}}$, действующее по формуле

$$(jF)(\psi) = F(\psi\,|\,(S\cap H^{\perp})) \quad (F \in A((S\cap H^{\perp})^{\wedge}),\ \psi \in \hat{S}).$$

Заметим, прежде всего, что функция jF H-инвариантна и непрерывна на $\hat{S}$. Далее, для любых $\rho \in \hat{S}_+$, $\psi \in \hat{S}$, $z \in \Pi$

$$(jF)(\rho^z\psi) = F(\rho^z\psi\,|\,(S\cap H^{\perp})) = F(\rho_1^z\psi_1),$$

где $\rho_1 = \rho \mid (S \cap H^{\perp})$, $\psi_1 = \psi \mid (S \cap H^{\perp})$. Теперь ясно, что j есть гомоморфизм, действующий из алгебры $A((S \cap H^{\perp})^{\wedge})$ в алгебру $A(\hat{S}/H)$.

Докажем его инъективность. Пусть F_1, F_2 – различные элементы алгебры $A((S \cap H^{\perp})^{\wedge})$, $F_1(\zeta) \neq F_2(\zeta)$ при некотором $\zeta \in (S \cap H^{\perp})^{\wedge}$. Тогда $(jF_1)(\zeta^*) \neq (jF_2)(\zeta^*)$, где ζ^* обозначает продолжение полухарактера ζ до полухарактера из $\hat{S}$ (которое существует по лемме 1 в силу полноты $S \cap H^{\perp}$ в S).

Наконец, $\| jF \| = \max\{| F(\psi \mid (S \cap H^{\perp})) | \mid \psi \in \hat{S}\} = \max\{| F(\zeta) | \mid \zeta \in (S \cap H^{\perp})^{\wedge}\} = \| F \|$ (мы снова воспользовались леммой 1), т. е. оператор j изометричен. Предположим теперь, что множество $(S \cap H^{\perp})^{\sim}$ разделяет точки $\hat{S}/H$, и заметим, что тогда любые продолжения ζ^* полухарактера $\zeta \in (S \cap H^{\perp})^{\wedge}$ до полухарактера из $\hat{S}$ попарно H-эквивалентны (для любых двух таких продолжений ζ_1^*, ζ_2^* имеем $\tilde{s}([\zeta_1^*]) = \tilde{s}([\zeta_2^*])$ при всех $s \in S \cap H^{\perp}$). Поэтому для любого $\Phi \in A(\hat{S}/H)$ функция $F(\zeta) := \Phi(\zeta^*)$ определена корректно. Она непрерывна по лемме 2, так как $F = \Phi_0 \circ i^{-1}$, где Φ_0 – функция на $\hat{S}/H$, отвечающая Φ. Поскольку $F(\rho^z \zeta) = \Phi((\rho^*)^z \zeta^*)$, то $F \in A((S \cap H^{\perp})^{\wedge})$, и осталось заметить, что $jF = \Phi$. □

2. Антисимметричность. Теорема 2 позволяет в ряде случаев сводить изучение алгебры $A(\hat{S}/H)$ к $A((S \cap H^{\perp})^{\wedge})$. В качестве примера рассмотрим важное свойство антисимметричности (напомним, что равномерная алгебра называется антисимметричной, если единственными принадлежащими ей вещественнозначными функциями являются константы, см., например, [2]). Заметим сначала, что антисимметричность алгебры $A(\hat{S})$ влечет антисимметричность ее подалгебры $A_0(\hat{S})$, а последнее равносильно условию $S^{-1} \cap S = \{e\}$ [6, с. 301]. При этом справедлива

Теорема 3. *Для антисимметричности $A(\hat{S})$ необходимо, чтобы $S^{-1} \cap S = \{e\}$, и достаточно, чтобы 1 была предельной точкой множества*

$$P = \left\{\rho \hat{I} \hat{S}_+ \mid \rho(s) < 1 \text{ при } s \neq e\right\}.$$

Доказательство. Необходимость была доказана выше. Достаточность. Пусть 1 – предельная для P, и F из $A(\hat{S})$ вещественнозначна. Заметим, что $S^{-1} \cap S = \{e\}$, поскольку $\rho \mid (S^{-1} \cap S) = 1$ при $\rho \in \hat{S}_+$ и, в частности, при $\rho \in P$. Так как функция $z \mapsto F(\rho^z \psi)$ аналитична на Π, то $c(\rho, \psi) := F(\rho^z \psi)$ не зависит от $z \in \Pi$. Поэтому для таких ρ, что $\rho(s) < 1$ при $s \neq e$, имеем

$$c(\rho, \psi) = \lim_{n \to \infty} F(\rho^n \psi) = F(\omega),$$

где $\omega(s) = 0$ при $s \neq e$, $\omega(e) = 1$ ($\omega \in \hat{S}$, потому что $S^{-1} \cap S = \{e\}$). Таким образом, $c(\rho, \psi) = F(\rho\psi)$ не зависит от ρ и ψ при $\rho \in P$. Условие теоремы и соображения непрерывности показывают теперь, что $F = \text{const}$. □

Следующая лемма, необходимая для доказательства теоремы 4, имеет и самостоятельный интерес.

Лемма 3. *Если $S^{-1} \cap S = \{e\}$, то пространства $\hat{S}$ и $\hat{S}_+$ связны.*

Доказательство. Так как пространство максимальных идеалов алгебры $\ell_1(S)$ отождествляется с $\hat{S}$ [1, теорема 4.1], то по теореме Шилова об идемпотентах открыто-замкнутые подмножества $\hat{S}$ находятся в биективном соответствии с идемпотентами алгебры $\ell_1(S) \subset \ell_1(G)$.

Идемпотенту $f \in \ell_1(S)$ соответствует идемпотент μ_f алгебры мер на G ($\mu_f(A) = \sum_{s \in A \cap S} f(s)$). По теореме Коэна [3, теорема 3.1.5 (A)] носитель μ_f содержится в компактной (т. е. конечной) подгруппе $K \subset G$. Но тогда μ_f сосредоточена на конечной подполугруппе $K \cap S \subset G$, которая, как известно, является группой. Так как у нас S не имеет нетривиальных подгрупп, носитель μ_f содержится в $\{e\}$, а потому $\ell_1(S)$ не содержит нетривиальных идемпотентов. Осталось заметить, что $\widehat{S}_+$ есть образ $\widehat{S}$ при непрерывном отображении $\psi \mapsto |\psi|$.□

Для дальнейшего отметим, что идеал I полугруппы S называется *простым*, если $S \setminus I$ есть полугруппа, I называется *нетривиальным*, если $I \neq S \setminus \{e\}$.

Т е о р е м а 4. *Если S не содержит нетривиальных простых идеалов, то алгебра $A(\widehat{S})$ антисимметрична.*

Д о к а з а т е л ь с т в о. При $\rho \in \widehat{S}_+ \setminus \{1\}$ дополнение к подполугруппе $\{s \in S \mid \rho(s) = 1\}$ есть простой идеал, а потому $\rho(s) < 1$ при $s \neq e$ для $\rho \neq 1$. По лемме 3 $\widehat{S}_+$ не имеет изолированных точек. Следовательно, 1 есть предельная точка для $P = \widehat{S}_+ \setminus \{1\}$, и антисимметричность $A(\widehat{S})$ следует из теоремы 3.□

Теперь, комбинируя теоремы 2 и 3, получаем следующий результат.

Т е о р е м а 5. *Предположим, что $(S \cap H^{\perp})\widehat{}$ разделяет точки $\widehat{S}/H$. Для антисимметричности $A(\widehat{S}/H)$ необходимо, чтобы $S^{-1} \cap S \cap H^{\perp} = \{e\}$, и достаточно, чтобы 1 была предельной точкой множества*

$$\{\rho \in (S \cap H^{\perp})^{\wedge}_{+} \mid \rho(s) < 1 \text{ при } s \neq e\}.$$

Аналогично, комбинированием теорем 2 и 4 получается

Т е о р е м а 6. *Предположим, что $(S \cap H^{\perp})\widehat{}$ разделяет точки $\widehat{S}/H$. Если $S \cap H^{\perp}$ не содержит нетривиальных простых идеалов, то алгебра $A(\widehat{S}/H)$ антисимметрична.*

Литература

1. A r e n s R., S i n g e r I. M. // Trans. Amer. Math. Soc. 1956. Vol. 81, N 2. P. 379–393.
2. Г а м е л и н Т. Равномерные алгебры. М., 1973.
3. R u d i n W. Fourier analysis on groups. N. Y., 1962.
4. H e l s o n H. // Algebras in analysis (Proceedings of Instructional Conference and NATO Advanced Study Institute, Birmingem, 1973). London, 1975. P. 1–62.
5. T o n e v T., G r i g o r y a n S. A. // Contemporary Math. 2003. Vol. 328. P. 299–322.
6. G r i g o r y a n S. A., T o n e v T. // Contemporary Math. 2004. Vol. 363. P. 111–127.
7. М и р о т и н А. Р. // Изв. вузов. Математика. 1995. № 3 (394). С. 35–44.
8. К л и ф ф о р д А., П р е с т о н Г. Алгебраическая теория полугрупп. М., 1972. Т. 1.
9. Б у р б а к и Н. Общая топология. Топологические группы. Числа и связанные с ними группы и пространства. М., 1972.

A. P. MIROTIN, M. A. ROMANOVA

H-AUTOMORPHIC GENERALIZED ANALYTIC FUNCTIONS

Summary

The conditions are given for the isometric isomorphism of algebras of *H*-automorphic generalized analytic functions over some semigroup to algebras of all generalized analytic functions over some another semigroup. The antisymmetric property of such algebras has been studied.