

ISSN 0002-354X

# ДОКЛАДЫ

НАЦИОНАЛЬНОЙ АКАДЕМИИ  
НАУК БЕЛАРУСИ

ТОМ 52



1

ЯНВАРЬ – ФЕВРАЛЬ

2008

# ДОКЛАДЫ НАЦИОНАЛЬНОЙ АКАДЕМИИ НАУК БЕЛАРУСИ

Выходит шесть номеров в год

Журнал основан в июле 1957 года

---

МИНСК, БЕЛОРУССКАЯ НАУКА, 2008, ТОМ 52, № 1

---

Учредитель – Национальная академия наук Беларуси

Редакционная коллегия:

**М. В. Мясникович** (главный редактор),  
**Н. С. Казак** (зам. главного редактора),  
**С. В. Абламейко, И. М. Богдевич, Н. А. Борисевич, Г. А. Василевич, Ф. И. Висмонт,**  
**П. А. Витязь, И. Д. Вологовский, И. В. Гайшун, В. Г. Гусаков, С. А. Жданок, Н. А. Изобов,**  
**А. А. Коваленя, Ф. Ф. Комаров, Е. Ф. Конопля, Н. П. Крутько, В. А. Лабунов, Ф. А. Лахвич,**  
**О. Н. Левко, А. И. Лесникович, В. Ф. Логинов, М. М. Маханек, А. А. Махнач, А. А. Михалевич,**  
**П. Г. Никитенко, Ю. М. Плескачевский, В. И. Семенов, А. Ф. Смянович,**  
**В. И. Тимошпольский, Л. М. Томильчик, Л. В. Хотылева, А. Л. Худолей, И. П. Шейко,**  
**Т. М. Амосова** (ведущий редактор)

*Адрес редакции:*

220072, Минск, ул. Академическая, 1 ж 112

т. 284–19–19

<http://nasb.gov.by/rus/publications/dqn/>

E-mail: [belnauka@infonet.by](mailto:belnauka@infonet.by)

## СОДЕРЖАНИЕ

### МАТЕМАТИКА

Тихонов С. В. Обобщенные многообразия Севери–Брауэра над вещественными полями .....	5
Уснич А. В. Представление группы Томпсона $T$ .....	9
Дмитрук Н. М. Построение оптимальных обратных связей по неполным и неточным измерениям состояний линейных систем .....	12
Шафранский Я. М. Анализ вычислительной сложности дискретных экстремальных задач с трудновычислимыми целевыми функционалами .....	18
Миротин А. Р., Романова М. А. Доли спектра алгебры обобщенных аналитических функций .....	22
Антоневич А. Б., Доличанин Ч., Решич С. О сходимости траекторий векторных подпространств: случай одного собственного значения .....	27
Матысик О. В., Савчук В. Ф. Сходимость в гильбертовом пространстве метода простой итерации с попеременно чередующимся шагом решения операторных уравнений .....	33
Костокова О. И., Чемисова Т. В., Ермолинская С. А. Явные условия оптимальности для задач выпуклого полубесконечного программирования .....	38
Сяюлан И., Ковалев А. П., Шеметков Л. А. Классы групп, определяемые локальными функциями .....	44

## ФИЗИКА

Ерчак Д. П., Ерчак Е. Д., Кириленко А. И., Попечич В. И. Оптический аналог магнитного спин-волнового резонанса .....	48
Мотевич И. Г., Стрекаль Н. Д., Новицкий Я. В., Маскевич С. А. Применение спектроскопии гигантского КР для изучения взаимодействия берберина с ДНК .....	54
Жевняк О. Г., Борздов В. М., Борздов А. В., Поздняков Д. В., Комаров Ф. Ф. Моделирование электронного переноса в КНИ-МОП-транзисторах на основе метода Монте-Карло .....	58
Гольцев М. В. Синтез многокомпонентных ионно-плазменных покрытий на основе нитридов переходных металлов .....	61

## ХИМИЯ

Можейко Ф. Ф., Шевчук В. В., Рудаковская Т. Г., Жданович И. Б. Новые реагенты для защиты дорожных бетонных изделий от коррозии .....	65
Ляхвич Ф. А., Литвинко Н. М., Кучуро С. В., Скоростецкая Л. А., Рахуба Г. Н., Герловский Д. О., Рубинов Д. Б., Желдакова Т. А. Фосфолипидные реакции как модель определения безопасности пестицидов .....	70
Соломянский А. Е., Жавнерко Г. К., Агабеков В. Е., Грачева Е. А. Локальная адсорбция гидроксипатита на кремниевую поверхность .....	75
Головко Ю. С., Ивашкевич О. А., Матулис Вадим Э. 5-Нитроимидазолы: квантовохимическое исследование строения и построение модели структура-биологическая активность .....	79

## БИОЛОГИЯ

Гапеева Т. А., Рукавцова Е. Б., Шульга Н. Я., Бурьянов Я. И., Волотовский И. Д. Получение и характеристика трансгенных растений картофеля, синтезирующих поверхностный антиген вируса гепатита В .....	84
Орловская О. А., Сакович В. И., Лемеш В. А., Хотылева Л. В. Особенности каллусогенеза и органогенеза межсортных гибридов льна <i>F<sub>1</sub> (Linum usitatissimum L.)</i> .....	88

## МЕДИЦИНА

Гончаров А. Е., Титов Л. П. Функциональная характеристика моноцитарных дендритных клеток больных туберкулезом легких .....	92
Кириллов В. А., Гладышев А. О., Демидчик Е. П. Оценка значимости качественных признаков атипичии клеток в цитологической диагностике тиреоидных заболеваний .....	97

## ТЕХНИЧЕСКИЕ НАУКИ

Дьяконов О. М. Численный расчет и оптимизация параметров работы муфельной печи .....	100
Хейфец М. Л. Фрактальная параметризация формирующейся поверхности раздела слоев при синтезе материалов .....	106
Чорный А. Д. Применение моделей микросмешения для определения средней скорости химической реакции в однородном изотропном турбулентном потоке .....	110

## НАУКИ О ЗЕМЛЕ

Аксаментова Н. В., Носова А. А., Толкачикова А. А. Минеральный состав и генезис палеопротерозойских ультрамафитов центральной части Беларуси .....	116
--	-----

Технический редактор Т. В. Летъен  
Компьютерная верстка И. И. Капуба

Сдано в набор 11.01.2008. Выпуск в свет 25.02.2008. Формат 60×84<sup>1</sup>/<sub>8</sub>. Бумага офсетная. Усл. печ. л. 14,88. Усл. кр.-отт. 15,81. Уч.-изд. л. 16,4. Тираж 237 экз. Заказ 62.

Цена номера: индивидуальная подписка – 13240 руб.; ведомственная подписка – 19674 руб.

Республиканское унитарное предприятие «Издательский дом «Белорусская наука». Лиц. № 02330/0131569 от 11.05.2005 г. 220141. Минск, Ф. Скорины, 40. Свидетельство 453.

Отпечатано в РУП «Издательский дом «Белорусская наука».

© «Издательский дом «Белорусская наука»  
Доклады НАН Беларуси, 2008

УДК 517.986

А. Р. МИРОТИН, М. А. РОМАНОВА

## ДОЛИ СПЕКТРА АЛГЕБРЫ ОБОБЩЕННЫХ АНАЛИТИЧЕСКИХ ФУНКЦИЙ

(Представлено членом-корреспондентом Я. В. Радыно)

Гомельский государственный университет им. Ф. Скорины

Поступило 05.06.2007

Обобщенные аналитические функции на пространствах полухарактеров впервые были введены Р. Аренсом и И. М. Зингером [1]. Впоследствии ими занимались многие авторы [2–5].

Цель данной работы – изучение долей спектра алгебры обобщенных аналитических функций в смысле [1]. Основной результат дает критерий принадлежности одной доле для неотрицательных полухарактеров.

Ниже  $S$  обозначает дискретную абелеву полугруппу с сокращениями и единицей  $e$ ,  $\hat{S}$  и  $X$  – полугруппа полухарактеров (гомоморфизмов в замкнутый единичный диск  $D$ ) и группа характеров (гомоморфизмов в одномерный тор) полугруппы  $S$  соответственно,  $\hat{S}_+$  – полугруппа неотрицательных полухарактеров. Спектр (пространство максимальных идеалов) коммутативной банаховой алгебры  $A$  будет обозначаться  $\text{Spec}(A)$ .

Заметим, что  $\hat{S}$  компактна в топологии поточечной сходимости как замкнутое подмножество компактного пространства  $D^S$ . Кроме того [1], каждый полухарактер  $\psi \in \hat{S}$  допускает *полярное разложение*  $\psi = \rho\chi$ , где  $\rho \in \hat{S}_+$ ,  $\chi \in X$ .

**О п р е д е л е н и е 1.** Комплекснозначная функция  $F$  на  $\hat{S} \setminus X$  называется *обобщенной аналитической* (в смысле Аренса–Зингера), если  $F$  может быть равномерно приближена на компактных подмножествах  $\hat{S} \setminus X$  функциями вида

$$\hat{f}(\psi) = \sum_{s \in S} f(s)\psi(s) \quad (f \in l_1(S), \psi \in \hat{S}).$$

Равномерную алгебру всех функций, непрерывных на  $\hat{S}$  и обобщенных аналитических в смысле определения 1, обозначим  $A_0(\hat{S})$ .

Известно [1], что каждому полухарактеру  $\psi \in \hat{S}$  можно сопоставить комплексный гомоморфизм  $\varphi_\psi$  алгебры  $A_0(\hat{S})$  по формуле  $\varphi_\psi(F) := F(\psi)$ , и это общий вид всех комплексных гомоморфизмов этой алгебры.

Произвольному полухарактеру  $\psi \in \hat{S}$  можно сопоставить также комплексный гомоморфизм  $\varphi_\psi^*$  сверточной (коммутативной банаховой) алгебры  $l_1(S)$  по формуле  $\varphi_\psi^*(f) = \sum_{s \in S} f(s)\psi(s)$ , и это общий вид всех комплексных гомоморфизмов данной алгебры [1] (свертка в  $l_1(S)$  определяется равенством  $f * g(s) = \sum_{uv=s} f(u)g(v)$ ).

Следовательно, спектры алгебр  $A_0(\hat{S})$  и  $l_1(S)$  можно отождествить с  $\hat{S}$ .

**О п р е д е л е н и е 2.** Говорят, что комплексные гомоморфизмы  $\varphi_1$  и  $\varphi_2$  коммутативной банаховой алгебры  $A$  принадлежат одной доле (Глисона) спектра  $A$  (и обозначают  $\varphi_1 \sim \varphi_2$ ), если  $\|\varphi_1 - \varphi_2\| < 2$ , где

$$\|\varphi_1 - \varphi_2\| := \sup\{|\varphi_1(a) - \varphi_2(a)| : a \in A, \max|\hat{a}| \leq 1\}.$$

Всюду ниже запись  $\psi_1 \sim \psi_2$  относительно  $A_0(\hat{S})$  означает, что  $\varphi_{\psi_1} \sim \varphi_{\psi_2}$ . Аналогичный смысл имеет запись  $\psi_1 \sim \psi_2$  относительно  $l_1(S)$ .

Далее мы неоднократно пользуемся тем [2, с. 191], что для комплексных гомоморфизмов  $\varphi_1$  и  $\varphi_2$  равномерной алгебры  $A$  следующие свойства равносильны (всюду ниже  $f_n(\varphi)$  обозначает  $\varphi(f_n)$ ):

1) существует такая константа  $c > 0$ , что для любого  $a \in A$ , такого, что  $u(\varphi) := \operatorname{Re} \varphi(a) > 0$  для всех комплексных гомоморфизмов  $\varphi$  алгебры  $A$ , справедливо неравенство Гарнака  $c^{-1} \leq u(\varphi_1)/u(\varphi_2) \leq c$ ;

2)  $\varphi_1 \sim \varphi_2$ ;

3) если  $\{f_n\}$  – такая последовательность элементов алгебры  $A$ , что  $\|f_n\| \leq 1$ ,  $|f_n(\varphi_1)| \rightarrow 1$ , то  $|f_n(\varphi_2)| \rightarrow 1$ ;

4) норма сужения  $\varphi_1$  на ядро  $A_{\varphi_2}$  гомоморфизма  $\varphi_2$  строго меньше 1.

**О п р е д е л е н и е 3.** Сдвигом функции  $F$  из  $A_0(\hat{S})$  на полухарактер  $\psi$  назовем функцию  $F_\psi: \theta \mapsto F(\psi\theta)$ .

**Л е м м а 1.** Функция  $F_\psi$  принадлежит  $A_0(\hat{S})$ , если  $F$  принадлежит  $A_0(\hat{S})$ .

**Д о к а з а т е л ь с т в о** сводится к простой проверке определения 1.

**У т в е р ж д е н и е 1.** Принадлежность двух полухарактеров полугруппы  $S$  (т. е. соответствующих им комплексных гомоморфизмов) одной доле спектра алгебры  $A_0(\hat{S})$  не нарушается при умножении их на полухарактер полугруппы  $S$ .

**Д о к а з а т е л ь с т в о.** Воспользуемся свойством 3). Пусть  $F_n \in A_0(\hat{S})$ . Рассмотрим последовательность сдвигов  $F_{n\psi}$ . Тогда  $F_{n\psi} \in A_0(\hat{S})$ . Прежде всего заметим, что

$$\|F_{n\psi}\| = \max_{\theta \in \hat{S}} |F_n(\psi\theta)| \leq \max_{\theta \in \hat{S}} |F_n(\theta)| \leq 1.$$

Если  $|F_n(\psi\psi_1)| \rightarrow 1$ , т. е.  $|F_{n\psi}(\psi_1)| \rightarrow 1$ , то по свойству 3) имеем  $|F_{n\psi}(\psi_2)| \rightarrow 1$ , т. е.  $|F_n(\psi\psi_2)| \rightarrow 1$ , и осталось применить упомянутое свойство еще раз.

**О п р е д е л е н и е 4.** Пусть  $\Pi = \{z \in \mathbb{C} : \operatorname{Re} z > 0\}$  и полухарактеры  $\rho \geq 0$ ,  $\psi \in \hat{S}$  фиксированы. Аналитическим диском назовем подмножество  $\hat{S}$  вида  $\{\rho^z \psi : z \in \Pi\}$ .

**У т в е р ж д е н и е 2.** Аналитический диск содержится в одной доле спектра алгебры  $A_0(\hat{S})$ .

**Д о к а з а т е л ь с т в о.** Пусть  $z_1 \neq z_2$  и полухарактерам  $\rho^{z_i} \psi$  соответствуют комплексные гомоморфизмы  $\varphi_i$  алгебры  $A_0(\hat{S})$ ,  $z_i \in \Pi$ ,  $i=1,2$ . Пусть  $F \in A_0(\hat{S})$ ,  $\operatorname{Re} F > 0$ . Функция  $\alpha(z) = F(\rho^z \psi)$  аналитична, а потому  $\operatorname{Re} \alpha(z)$  гармонична в  $\Pi$ . Так как  $\operatorname{Re} \alpha(z) > 0$ , то по неравенству Гарнака существует такая константа  $c > 0$  (зависящая только от  $z_1, z_2$ ), что  $c^{-1} < \operatorname{Re} \alpha(z_1)/\operatorname{Re} \alpha(z_2) < c$ . Но  $\operatorname{Re} \alpha(z_i) = \operatorname{Re} F(\rho^{z_i} \psi) = \operatorname{Re} \varphi_i(F)$ ,  $i=1,2$ , т. е. для каждого  $F \in A_0(\hat{S})$  с  $\operatorname{Re} F > 0$  выполнено  $c^{-1} < \operatorname{Re} \varphi_1(F)/\operatorname{Re} \varphi_2(F) < c$ . Следовательно,  $\rho^{z_i} \psi$ ,  $i=1,2$  принадлежат одной доле в силу свойства 1).

**С л е д с т в и е 1.** Пусть  $\psi \in \hat{S}$ . Если  $\{\psi\}$  есть доля, то  $|\psi|^2 = |\psi|$ .

**Д о к а з а т е л ь с т в о.** Рассмотрим полярное разложение  $\psi = \rho\chi$  ( $\rho \in \hat{S}_+$ ,  $\chi \in X$ ). Если  $\rho^2 \neq \rho$ , то  $\chi\rho^z \sim \psi$  и  $\chi\rho^z \neq \psi$  при  $\operatorname{Re} z > 0$ ,  $z \neq 1$  – противоречие.

**О п р е д е л е н и е 5.** Будем говорить, что полухарактеры  $\psi_1, \psi_2$  эквивалентны (и обозначать  $\psi_1 \approx \psi_2$ ), если  $\psi_1 = \psi_2$  на множестве  $\{s : |\psi_1(s)| = 1\} \cup \{s : |\psi_2(s)| = 1\}$ .

Заметим, что для неотрицательных полухарактеров  $\rho_1, \rho_2$  полугруппы  $S$  эквивалентность равносильна равенству  $\{s \in S : \rho_1(s) = 1\} = \{s \in S : \rho_2(s) = 1\}$ .

**У т в е р ж д е н и е 3.** Из принадлежности полухарактеров одной доле спектра алгебры  $A_0(\hat{S})$  следует их эквивалентность.

Для доказательства нам потребуется следующий аналог свойства 3) эквивалентности Глисона.

**Л е м м а 2.** Если  $\varphi_1$  и  $\varphi_2$  принадлежат одной доле спектра равномерной алгебры  $A$ , и последовательность  $\{f_n\} \subset A$  такова, что  $\|f_n\| \leq 1$ ,  $f_n(\varphi_1) \rightarrow 1$ , то  $f_n(\varphi_2) \rightarrow 1$ .

**Д о к а з а т е л ь с т в о** (ср. [2, с. 191]). Допустим противное, т. е.  $\varphi_1 \sim \varphi_2$ , но  $f_n(\varphi_2)$  не стремится к 1 для некоторой последовательности  $f_n \in A$ , такой, что  $\|f_n\| < 1$ ,  $f_n(\varphi_1) \rightarrow 1$ . Так как  $|f_n(\varphi_2)| = |\varphi_2(f_n)| \leq 1$ , то найдется подпоследовательность  $f_{n_k}$ , такая, что для некоторой константы  $c$  имеем  $|f_{n_k}(\varphi_2)| \leq c < 1$ . Можно считать, что последнее равенство верно для  $f_n$ . Так как функция  $Q_n(z) := (z - f_n(\varphi_2)) / (1 - \overline{f_n(\varphi_2)}z)$  аналитична в окрестности спектра  $f_n$ , то функция  $g_n = Q_n(f_n) \in A$  (в силу функционального исчисления), причем  $\|g_n\| < 1$ ,  $g_n(\varphi_2) = 0$ ,  $|g_n(\varphi_1)| \rightarrow 1$ . Поэтому норма сужения  $\varphi_1$  на ядро  $A_{\varphi_2}$  равна 1, что противоречит свойству 4) эквивалентности Глисона.

**Д о к а з а т е л ь с т в о у т в е р ж д е н и я 3.** Допустим противное, т. е. существуют  $\psi_1, \psi_2 \in \hat{S}$  такие, что  $\psi_1 \sim \psi_2$ , но  $\psi_1(s_0) \neq \psi_2(s_0)$  при некотором  $s_0$  из множества  $\{s : |\psi_1(s)| = 1\} \cup \{s : |\psi_2(s)| = 1\}$ . Пусть, для определенности,  $|\psi_1(s_0)| = 1$  (другими словами,  $|\hat{s}_0(\psi_1)| = 1$ ). Рассмотрим постоянную последовательность  $f_n = \hat{s}_0 \overline{\psi_1(s_0)}$  элементов алгебры и заметим, что

$$\|f_n\| = \max_{\psi \in \hat{S}} |\hat{s}_0(\psi)| \cdot |\overline{\psi_1(s_0)}| \leq \max_{\psi \in \hat{S}} |\hat{s}_0(\psi)| = \max_{\psi \in \hat{S}} |\psi(s_0)| \leq 1.$$

Так как  $f_n(\psi_1) = \hat{s}_0(\psi_1) \overline{\psi_1(s_0)} = \psi_1(s_0) \overline{\psi_1(s_0)} = |\psi_1(s_0)|^2 = 1$ , то  $f_n(\psi_1) \rightarrow 1$ . Теперь из леммы 2 следует, что  $f_n(\psi_2) \rightarrow 1$ , т. е.

$$f_n(\psi_2) = \hat{s}_0(\psi_2) \overline{\psi_1(s_0)} = \psi_2(s_0) \overline{\psi_1(s_0)} \rightarrow 1.$$

Значит,  $\psi_2(s_0) = \psi_1(s_0)$  (у нас  $|\psi_1(s_0)| = 1$ ) – противоречие.

**С л е д с т в и е 2.** Характеры полугруппы  $S$  образуют одноточечные доли спектра алгебры  $A_0(\hat{S})$ .

**Д о к а з а т е л ь с т в о.** Пусть характер  $\chi$  и полухарактер  $\psi$  принадлежат одной доле в смысле алгебры  $A_0(\hat{S})$ . Тогда  $\psi \approx \chi$ , а потому они совпадают на множестве  $\{s : |\chi(s)| = 1\} = S$ .

При доказательстве основного результата данной работы необходима

**Т е о р е м а 1** [6]. Для любой алгебры мер  $M$  существует компактная топологическая полугруппа  $T$  такая, что спектр алгебры  $M$  есть  $\hat{T}$ . Полугруппа  $T$  называется структурной полугруппой алгебры  $M$ .

Как отмечалось выше, спектр алгебры  $\ell_1(S)$  есть  $\hat{S}$ , но  $S$  не годится на роль структурной полугруппы, так как  $S$  дискретна, а  $T$  компактна. Для описания структурной полугруппы этой алгебры нам потребуется следующее понятие.

**О п р е д е л е н и е 7** [6, с. 33]. Пусть  $S$  – дискретная абелева полугруппа. Компактную полугруппу  $\bar{S}$  будем называть боровской компактификацией полугруппы  $S$ , если существует такой гомоморфизм  $\alpha : S \rightarrow \bar{S}$  с плотным образом, что выполняются следующие условия:

- а)  $\hat{\bar{S}}$  разделяет точки  $\bar{S}$ ;
- б) отображение  $\alpha^* : \bar{f} \mapsto f := \bar{f} \circ \alpha$  есть изоморфизм  $\hat{\bar{S}}$  на  $\hat{S}$ .

Полухарактер  $\bar{f}$  будем называть продолжением полухарактера  $f$  на  $\bar{S}$ .

Известно, что для любой полугруппы  $S$  боровская компактификация существует и единственна, а отображение  $\alpha$  инъективно, если  $\hat{S}$  разделяет точки  $S$  [6, с. 33]. Последнее условие

в нашем случае выполняется, так как уже характеры полугруппы  $S$  разделяют точки ( $S$  погружается в группу [8]).

**Т е о р е м а 2.** [6, с. 37]. *Боровская компактификация  $\bar{S}$  является структурной полугруппой алгебры  $\ell_1(S)$ .*

Для алгебр мер критерий принадлежности одной доле в случае положительных полухарактеров установлен Р. Миллером.

**Т е о р е м а 3** [7]. *Пусть  $M$  есть алгебра мер со структурной полугруппой  $T$ . Полухарактеры  $f, g \in \hat{T}_+$  принадлежат одной доле спектра алгебры  $M$  тогда и только тогда, когда  $f \approx g$ .*

Следующий результат является аналогом теоремы Миллера.

**Т е о р е м а 4.** *Полухарактеры  $\rho_1, \rho_2 \in \hat{S}_+$  принадлежат одной доле спектра алгебры  $A_0(\hat{S})$  тогда и только тогда, когда их продолжения  $\bar{\rho}_1, \bar{\rho}_2 \in \hat{S}_+$  эквивалентны.*

**Д о к а з а т е л ь с т в о.** Покажем сначала, что для любых двух полухарактеров принадлежность одной доле в смысле алгебры  $A_0(\hat{S})$  равносильна принадлежности одной доле в смысле алгебры  $\ell_1(S)$ . В самом деле, рассмотрим полухарактеры  $\psi_1, \psi_2 \in \hat{S}$  такие, что  $\psi_1 \sim \psi_2$  в смысле алгебры  $A_0(\hat{S})$  (т. е., если мы положим  $\varphi_i = \varphi_{\psi_i}$ , то  $\varphi_1 \sim \varphi_2$ ). Имеем

$$\begin{aligned} \|\varphi_1 - \varphi_2\| &= \sup\{|\varphi_1(F) - \varphi_2(F)| : \max|F| \leq 1, F \in A_0(\hat{S})\} = \\ &= \sup\{|F(\psi_1) - F(\psi_2)| : \max|F| \leq 1, F \in A_0(\hat{S})\}. \end{aligned}$$

Так как произвольную функцию  $F \in A_0(\hat{S})$  можно равномерно приблизить функциями вида  $\hat{f}(\psi) = \sum_{s \in S} f(s)\psi(s)$ , то в последнем равенстве  $F(\psi_i)$  можно заменить на  $\hat{f}(\psi_i)$ . После замены получаем с учетом неравенства  $\|\varphi_1 - \varphi_2\| < 2$ , что

$$\|\varphi_{\psi_1}^* - \varphi_{\psi_2}^*\| = \sup\{|\varphi_{\psi_1}^*(f) - \varphi_{\psi_2}^*(f)| : f \in \ell_1(S), \max|\hat{f}| \leq 1\} < 2.$$

Обратно, пусть  $\psi_1, \psi_2 \in \hat{S}$  таковы, что  $\psi_1 \sim \psi_2$  в смысле алгебры  $\ell_1(S)$ . Тогда по свойству 1) найдется  $c > 0$  такое, что при  $f \in \ell_1(S)$  с  $u(\varphi) := \operatorname{Re} \varphi(f) > 0$  и при всех  $\varphi \in \operatorname{Spec}(\ell_1(S))$  справедливо неравенство  $c^{-1} \leq u(\varphi_{\psi_1}^*)/u(\varphi_{\psi_2}^*) \leq c$ , т. е.

$$c^{-1} \leq \frac{\operatorname{Re} \hat{f}(\psi_1)}{\operatorname{Re} \hat{f}(\psi_2)} \leq c \text{ для } f \in \ell_1(S) \text{ с } \operatorname{Re} \hat{f} > 0.$$

Заметим, что если обобщенная аналитическая функция  $F \in A_0(\hat{S})$  с  $\operatorname{Re} F > 0$  есть равномерный на  $\hat{S}$  предел последовательности функций вида  $\hat{f}_n$ , то в конечном счете  $\operatorname{Re} \hat{f}_n > 0$ . Далее, так как каждая функция  $F \in A_0(\hat{S})$  может быть равномерно аппроксимирована функциями вида  $\hat{f}$ , где  $f \in \ell_1(S)$ , то  $c^{-1} \leq \operatorname{Re} F(\psi_1)/\operatorname{Re} F(\psi_2) \leq c$ . Таким образом, если полухарактеру  $\psi_i$  соответствует гомоморфизм  $\varphi_i \in \operatorname{Spec}(A_0(\hat{S}))$  (напомним, что  $\varphi_i(F) = F(\psi_i)$ ),  $i = 1, 2$ , то  $c^{-1} \leq u(\varphi_1)/u(\varphi_2) \leq c$ , где  $u(\varphi_i) = \operatorname{Re} \varphi_i(F)$ . Следовательно,  $\psi_1 \sim \psi_2$  в смысле алгебры  $A_0(\hat{S})$ .

В частности, для любых  $\rho_1, \rho_2 \in \hat{S}_+$  принадлежность одной доле в смысле алгебры  $A_0(\hat{S})$  равносильна принадлежности одной доле в смысле алгебры  $\ell_1(S)$ . Последнее равносильно принадлежности одной доле в смысле алгебры  $\ell_1(S)$  для полухарактеров  $\bar{\rho}_i := (\alpha^*)^{-1}(\rho_i) \in \hat{S}_+$ . Покажем это.

В силу [6, теорема 3.2.3, с. 24] каждому полухарактеру  $\bar{\rho} \in \hat{\bar{S}}$  соответствует комплексный гомоморфизм алгебры  $M = \ell_1(S)$ , действующий по формуле

$$\varphi_{\bar{\rho}}(\mu) = \int \bar{\rho} d\mu_S,$$

где  $\mu_S = \mu \circ \alpha^{-1}$ . Применяя это к мере  $\mu_f$ , соответствующей функции  $f$  из  $\ell_1(S)$ , получаем (с учетом инъективности  $\alpha$ ), что полухарактеру  $\bar{\rho} := (\alpha^*)^{-1}(\rho) \in \hat{\bar{S}}_+$  соответствует комплексный гомоморфизм алгебры  $M = \ell_1(S)$

$$\varphi_{\bar{\rho}}(f) = \sum_{t \in \bar{S}} \bar{\rho}(t) f(\alpha^{-1}(t)) = \sum_{s \in S} \bar{\rho}(\alpha(s)) f(s) = \sum_{s \in S} \rho(s) f(s) = \varphi_{\rho}^*(f).$$

Отсюда и следует наше утверждение о равносильности.

Наконец, в силу теоремы 3 Миллера из работы [7] принадлежность одной доле в смысле алгебры  $\ell_1(S)$  (а потому и в смысле алгебры  $A_0(\hat{S})$ ) для полухарактеров  $\rho_1, \rho_2 \in \hat{S}_+$  равносильна соотношению  $\bar{\rho}_1 \approx \bar{\rho}_2$ , что и требовалось доказать.

**Пример.** Пусть  $S = \mathbb{Z}_+$  – аддитивная полугруппа неотрицательных целых чисел. В этом случае  $\hat{S} = D$  (каждый полухарактер имеет вид  $\psi(m) = \zeta^m$ , где  $\zeta \in D$ ) и  $A_0(\hat{S}) = A(D)$  – алгебра функций, непрерывных в диске  $D$  и аналитических в его внутренности  $D_0$  (диск-алгебра). В силу утверждения 3 одноточечные множества на границе диска являются долями. Покажем, что  $D_0$  также является долей. В самом деле, так как образ  $\alpha(N)$  плотен в  $\bar{S}$ , т. е. полугруппа  $\bar{S}$  монотетическая,  $\bar{S}$  есть группа  $G$  или объединение  $G$  с множеством вида  $\{a, a^2, \dots\}$  [9, с. 139]. Отсюда следует, что для любого полухарактера  $\bar{\rho} \in \hat{\bar{S}}_+ \setminus \{1\}$  имеем  $\{x \in \bar{S} : \bar{\rho}(x) = 1\} = G$ , т. е. любые два неотрицательных полухарактера полугруппы  $\bar{S}$ , отличные от 1, эквивалентны. В силу теоремы 4 множество  $\hat{S}_+ \setminus \{1\} = [0, 1)$  содержится в одной доле  $P$  относительно  $A(D)$ . Но поскольку каждая ненулевая точка  $\zeta \in D_0$  имеет вид  $r^z$ , где  $z \in \mathbb{N}$ ,  $r \in [0, 1)$ , то и  $\zeta \in P$  по утверждению 2.

**Следствие 3.** Если полугруппа  $\bar{S}$  не имеет нетривиальных открытых простых идеалов (т. е. идеалов, дополнение которых есть полугруппа, отличная от  $\{\bar{e}\}$ , где  $\bar{e}$  – единица полугруппы  $\bar{S}$ ), то  $\hat{S}_+ \setminus \{1\}$  содержится в одной доле спектра  $A_0(\hat{S})$ .

**Доказательство.** Так как для любого  $\bar{\rho} \in \hat{\bar{S}}_+ \setminus \{1\}$  дополнение к полугруппе  $\{x \in \bar{S} : \bar{\rho}(x) = 1\}$  есть открытый идеал, то  $\{x \in \bar{S} : \bar{\rho}(x) = 1\} = \{\bar{e}\}$ . Следовательно, любые два неотрицательных полухарактера полугруппы  $\bar{S}$ , отличные от 1, эквивалентны.

### Литература

1. Arens R., Singer I. M. // Trans. Amer. Math. Soc. 1956. Vol. 81, N 2. P. 379–393.
2. Гамелин Т. Равномерные алгебры. М., 1973.
3. Rudin W. Fourier analysis on groups. N. Y., Interscience. 1962.
4. Tonev T., Grigoryan S. A. // Contemporary Math. 2003. Vol. 328, N 1. P. 299–322.
5. Grigoryan S. A., Tonev T. // Contemporary Math. 2004. Vol. 363, N 2. P. 111–127.
6. Taylor J. Measure algebras. Providence, Rhode Island. Amer. Math. Soc., 1973.
7. Miller R. R. // Pacific J. Math. 1969. Vol. 31, N 5. P. 755–771.
8. Клиффорд А., Престон Г. Алгебраическая теория полугрупп. Т. 1. М., 1972.
9. Хьюитт Э., Росс К. Абстрактный гармонический анализ. Т. 1. М., 1975.

MIROTIN A. R., ROMANOVAM A.

amirotin@yandex.ru, kazubomarina@yandex.ru

PARTS OF THE SPECTRUM OF THE ALGEBRA OF GENERALIZED ANALYTIC FUNCTIONS

### Summary

For positive semicharacters the criteria for the Gleason equivalence with respect to the algebra of generalized analytic functions is given.