

Общероссийский математический портал

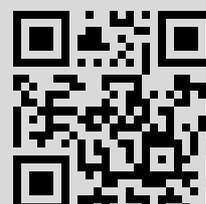
А. Р. Миротин, М. А. Романова, Об одной характеристике обобщенных аналитических функций Аренса-Зингера, *ПФМТ*, 2011, выпуск 2(7), 65–68

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением
<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 212.98.179.71

24 марта 2021 г., 14:32:49



УДК 517.986

ОБ ОДНОЙ ХАРАКТЕРИЗАЦИИ ОБОБЩЕННЫХ АНАЛИТИЧЕСКИХ ФУНКЦИЙ АРЕНСА-ЗИНГЕРА

А.Р. Миротин¹, М.А. Романова²

¹Гомельский государственный университет им. Ф. Скорины, Гомель

²Полесский государственный университет, Пинск

ON SOME CHARACTERIZATION OF ARENS-SINGER GENERALIZED ANALYTIC FUNCTIONS

A.R. Mirotin¹, M.A. Romanova²

¹F. Scorina Gomel State University, Gomel

²Poleskiy State University, Pinsk

Для случая максимальных полугрупп дана новая характеристика обобщенных аналитических функций в смысле Аренса и Зингера. Показано, что установленный результат может применяться в задачах аппроксимации.

Ключевые слова: алгебра обобщенных аналитических функций, полугруппа полухарактеров, граница Шилова, аппроксимация.

A new characterization of generalized analytic functions in sense of Arens-Singer is given in the case of maximal semigroups. It is shown that this result can be applied to approximation problems.

Keywords: algebra of generalized analytic functions, semigroup of semicharacters, Shilov boundary, approximation.

Введение

Теория обобщенных аналитических функций на пространствах полухарактеров полугрупп берет свое начало с работы Р. Аренса и И.М. Зингера [1]. В настоящее время она превратилась в довольно развитый раздел функционального анализа, расположенный на стыке теории равномерных алгебр, абстрактного гармонического анализа и теории аналитических функций (см., например, монографии [2], [3], а также обзоры [4], [5] и [6]). Более общее, чем в [1], определение обобщенной аналитической функции было позднее дано в [7]. В заметке даны условия, при которых алгебра обобщенных аналитических функций в смысле Аренса и Зингера совпадает с алгеброй обобщенных аналитических функций в смысле [7], [8]. Тем самым, при этих условиях получена другая, более простая характеристика аналитичности по Аренсу-Зингеру. Показано, что установленный результат может применяться также в задачах аппроксимации.

1 Используемые определения и примеры

Всюду ниже S – записываемая мультипликативно дискретная абелева полугруппа с сокращениями и единицей e , не являющаяся группой, $G = S^{-1}S$ – (дискретная) группа частных для S (см., например, [9]).

Определение 1.1. Подполугруппа S группы G называется *максимальной*, если не существует подполугруппы S_1 группы G , отличной от S и G , для которой $S \subset S_1 \subset G$.

Пример 1.1. Рассмотрим аддитивную группу $G = \mathbf{Z}$ целых чисел. Её максимальной подполугруппой является полугруппа $S = \mathbf{Z}_+$ неотрицательных целых чисел.

Пример 1.2. Для аддитивной группы \mathbf{Z}^{l+1} максимальной подполугруппой будут, например, полугруппа $S = \mathbf{Z}^l \times \mathbf{Z}_+$ ($l \in \mathbf{N}$).

Пример 1.3. Пусть $G = \mathbf{Z}^2$,

$$S_\alpha = \{(m, n) \in \mathbf{Z}^2 \mid n \geq \alpha m\},$$

где α – отрицательное иррациональное число. Максимальность этой подполугруппы следует, например, из того, что отображение $G \rightarrow \mathbf{R}: (m, n) \mapsto n - \alpha m$ является порядковым изоморфизмом групп, отображающим полугруппу S_α на подполугруппу $\{n - \alpha m \mid m, n \in \mathbf{Z}\} \cap \mathbf{R}_+$ группы \mathbf{R} , задающую на \mathbf{R} архимедов порядок, а такая подполугруппа всегда максимальна (см., например, [3, теорема 8.1.3]).

Для формулировки основного результата нам потребуется определенная подготовка.

Полухарактером полугруппы S называется гомоморфизм ψ полугруппы S в мультипликативную полугруппу $\bar{\mathbf{D}} = \{z \in \mathbf{C} : |z| \leq 1\}$, не являющийся тождественным нулем. Характерами называются полухарактеры, равные по модулю единице.

Множество всех полухарактеров далее обозначается \hat{S} , а его подмножество, состоящее из

неотрицательных полухарактеров, $-\hat{S}_+$. Наделенные топологией поточечной сходимости это компактные топологические полугруппы по умножению с единицей 1 (\hat{S} компактно как замкнутое подмножество в \bar{D}^S). (Компактную) группу характеров полугруппы S будем обозначать X .

Отметим, что степень ρ^0 по определению есть индикатор носителя полухарактера $\rho \in \hat{S}_+$, и что $\rho^z \in \hat{S} \setminus X$ при $\rho \in \hat{S}_+$, $\rho \neq 1$, $z \in \Pi$, где $\Pi := \{\text{Re } z > 0\}$ (см. [1, § 7]).

Далее через ∂_A обозначается граница Шилова равномерной алгебры A (см., например, [2]), сужение функции f на подмножество M ее области определения обозначается $f|_M$. Пространство $\ell_1(S)$ определяется как множество всех таких комплекснозначных функций f на S с не более чем счетным носителем, для которых

$$\|f\| = \sum_{s \in S} |f(s)| < \infty.$$

Определение 1.2 [1]. Комплекснозначная функция F на $\hat{S} \setminus X$ называется обобщенной аналитической в смысле Аренса-Зингера, если F может быть равномерно приближена на компактных подмножествах $\hat{S} \setminus X$ функциями вида

$$\hat{f}(\psi) = \sum_{s \in S} f(s)\psi(s),$$

где $f \in \ell_1(S)$, $\psi \in \hat{S}$.

Другими словами, F может быть равномерно приближена на компактных подмножествах $\hat{S} \setminus X$ аналитическими полиномами, т. е. полиномами вида

$$p = \sum_{k=1}^n c_k \hat{s}_k,$$

где $c_k \in \mathbb{C}$, $s_k \in S$, а функция \hat{s} на \hat{S} определяется для $s \in S$ равенством $\hat{s}(\psi) = \psi(s)$.

Равномерную алгебру всех функций, непрерывных на \hat{S} и обобщенных аналитических в смысле Аренса-Зингера, обозначим $A_0(\hat{S})$ (фактически она зависит от S , а не только от \hat{S}).

Определение 1.3 [7]. Комплекснозначную функцию F на $\hat{S} \setminus X$ будем называть обобщенной аналитической, если для любых полухарактеров ρ , ψ из $\hat{S} \setminus X$, $\rho \geq 0$ отображение $z \mapsto F(\rho^z \psi)$ аналитично в открытой правой полуплоскости Π и непрерывно в $+0$.

Равномерную алгебру всех функций, непрерывных на \hat{S} и обобщенных аналитических в смысле определения 1.3, обозначим $A(\hat{S})$.

Известно [8], что $A_0(\hat{S}) \subset A(\hat{S})$, причём строгое включение возможно. Основной целью данной заметки является доказательство следующей теоремы.

2 Характеризация обобщенных аналитических функций в смысле Аренса и Зингера для случая максимальных полугрупп

Теорема 2.1. Пусть полугруппа S максимальна в группе G . Тогда алгебра $A(\hat{S})$ совпадает с $A_0(\hat{S})$, если и только если $\partial_{A(\hat{S})} = X$.

Доказательство. Необходимость следует из того, что $\partial_{A_0(\hat{S})} = X$ [1, теорема 4.6].

Достаточность. Пусть $\partial_{A(\hat{S})} = X$. Тогда отображение сужения $F \mapsto F|_X$ есть изометрический изоморфизм алгебры $A(\hat{S})$ и некоторой равномерной алгебры $A(X)$ на группе X . Так как $A(\hat{S})$ инвариантна относительно действия группы X (т. е. вместе с функцией F содержит и все функции $F_\chi : \psi \mapsto F(\chi\psi)$, $\chi \in X$), то этим же свойством обладает и $A(X)$. Обозначим через S_1 подполугруппу группы G , порожденную носителями преобразований Фурье функций из $A(X)$. В силу [10, предложение 4.1.8] алгебра $A(X)$ равна алгебре A_{S_1} , состоящей из всех непрерывных на X функций, преобразование Фурье которых сосредоточено на полугруппе S_1 .

Пусть $a \in S$. Свойство ортогональности характеров компактной группы влечет, что носителем преобразования Фурье сужения $\hat{a}|_X$ служит множество $\{a\}$. Поэтому $S \subseteq S_1$.

Предположим, что $S_1 = G$. Тогда алгебра $A_{S_1} = A(X)$ совпадает с алгеброй $C(X)$ всех непрерывных функций на X (т. е. множество X является интерполяционным для алгебры $A(\hat{S})$ в смысле [8]). Покажем, что это невозможно. Для этого установим сначала, что существует строго положительный полухарактер $\rho_0 \in \hat{S}_+$, отличный от 1. Пусть $G(S) = S^{-1} \cap S$ – максимальная подгруппа полугруппы S , $H = G/G(S)$ – факторгруппа, и $\pi: G \rightarrow H$ – канонический гомоморфизм. Тогда множество $T := \pi(S)$, как легко проверить, есть максимальная подполугруппа группы H , порождающая H и такая, что группа $G(T)$ тривиальна. При этих условиях полугруппа T задает на группе H архимедов порядок по следующему правилу: $x \leq y$, если и только если $x^{-1}y \in T$ (см. [3, теорема 8.1.3] или [11]). В соответствии с известной теоремой Гёльдера полугруппа T порядково изоморфна подполугруппе аддитивной полугруппы \mathbf{R}_+ (см., например, [11,

глава XI, теорема 2]). Значит, на ней существует строго положительный полухарактер $r \neq 1$ (например, $r(s) = e^{-s}$, если считать, что $T \subset \mathbf{R}_+$), и осталось положить $\rho_0 = r \circ \pi$.

Воспользуемся гармонической мерой μ_{ρ_0} на X , построенной в [1]. Интеграл по мере μ_{ρ_0} определяется для любой ограниченной борелевской функции g на X формулой

$$\int_X g d\mu_{\rho_0} = \frac{1}{\pi} \int_{\mathbf{R}} g(\rho_0^{iv}) \frac{dv}{1+v^2}.$$

Известно [1, теорема 5.7], что некоторая замкнутая подгруппа $X^{\rho_0} \subset X$ является носителем гармонической меры μ_{ρ_0} . Выберем компакт $K \subset X^{\rho_0}$, $K \neq X^{\rho_0}$ с непустой внутренностью (относительно X^{ρ_0}). Тогда $\mu_{\rho_0}(K) > 0$. Пусть ненулевая функция $g \in C(X)$ обращается в нуль на K (лемма Урысона), и пусть функция F из $A(\hat{S})$ такова, что ее сужение $F|_X$ есть g . В частности, $F|_K = 0$. Для комплексного $z = iy$, $y \in \mathbf{R}$ положим $f(z) := g(\rho_0^z)$. По условию теоремы $f(iy) = 0$, если $y \in B := \{y \in \mathbf{R} \mid \rho_0^{iy} \in K\}$. Но равенство

$$\begin{aligned} \mu_{\rho_0}(K) &= \int_X 1_K d\mu_{\rho_0} = \\ &= \frac{1}{\pi} \int_{\mathbf{R}} 1_K(\rho_0^{iv}) \frac{dv}{1+v^2} = \frac{1}{\pi} \int_B \frac{dv}{1+v^2} \end{aligned}$$

показывает, что множество B имеет положительную меру Лебега, а потому $f = 0$ по граничной теореме единственности Лузина-Привалова. Таким образом, $g(\rho_0^z) = 0$ при всех $z = iy$, $y \in \mathbf{R}$. Поскольку множество $\{\rho_0^{iy} \mid y \in \mathbf{R}\}$ плотно в X^{ρ_0} [1, теорема 7.2], получаем по непрерывности, что $g|_{X^{\rho_0}} = 0$. Таким образом, $F|_{X^{\rho_0}} = g|_{X^{\rho_0}} = 0$, – противоречие.

Теперь из максимальности полугруппы S следует, что $S_1 = S$. А так как в силу [1, теоремы 2.6 и 4.6] алгебра A_S изометрически изоморфна $A_0(\hat{S})$, то теорема доказана.

Следствие 2.1. Пусть полугруппа S задает на группе G архимедов порядок. Тогда алгебра $A(\hat{S})$ совпадает с $A_0(\hat{S})$.

Доказательство. Как уже отмечалось выше, если полугруппа S задает на группе G архимедов порядок, то она максимальна. Кроме того, такая полугруппа порядково изоморфна подполугруппе группы \mathbf{R} вида $H \cap \mathbf{R}_+$ для некоторой подгруппы H группы \mathbf{R} [11]. Поэтому она совпадает со своей слабой оболочкой, является конусом и не содержит нетривиальных простых идеалов (определения этих понятий см. в [12]).

Теперь из основной теоремы в [12] следует, что в случае архимедова порядка $\partial_{A(\hat{S})} = X$, и осталось воспользоваться предыдущей теоремой.

Покажем, как основной результат данной работы может применяться в задачах аппроксимации (ниже T – одномерный тор, т. е. группа вращений окружности).

Следствие 2.2. Обозначим через $A(T^l \times \bar{D})$ алгебру функций, непрерывных на $T^l \times \bar{D}$ и аналитических в D по второму аргументу (l – натуральное число). Пусть $F \in A(T^l \times \bar{D})$. Тогда для любого $\varepsilon > 0$ и любого компакта $K \subset T^l \times D$ найдётся такой полином p от переменных t_1, \dots, t_l и z , что

$$|F(t, z) - p(t, z)| < \varepsilon$$

для всех $(t, z) \in K$.

Доказательство. Пусть $G = \mathbf{Z}^{l+1}$, $S = \mathbf{Z}^l \times \mathbf{Z}_+$ ($l \in \mathbf{N}$) как в примере 1.2. Так как любую точку полугруппы S можно представить в виде

$$(m, n) = (m_1, \dots, m_l, n) = \sum_{j=1}^l m_j e_j + n e_{l+1},$$

где $(e_j)_{j=1}^{l+1}$ – стандартный базис в \mathbf{R}^{l+1} , то полухарактеры этой полугруппы имеют вид

$$\psi(m, n) = t^m z^n \quad (m \in \mathbf{Z}^l, n \in \mathbf{Z}_+),$$

где $t_j = \psi(e_j) \in T$, $t = (t_j)_{j=1}^l \in T^l$, $z = \psi(e_{l+1}) \in \bar{D}$.

Следовательно, полугруппу \hat{S} в этом примере можно отождествить с $T^l \times \bar{D}$, а группу X – с T^{l+1} . При этом алгебра $A(\hat{S})$ отождествляется с алгеброй $A(T^l \times \bar{D})$. Поскольку полугруппа S удовлетворяет условиям основной теоремы из [12], то $\partial_{A(\hat{S})} = X$. Таким образом, имеем

$A(\hat{S}) = A_0(\hat{S})$ в силу теоремы, доказанной выше. Пусть $F \in A(T^l \times \bar{D})$. Так как аналитические полиномы в нашем случае имеют вид

$$p(t, z) = \sum_{m, n} c_{mn} t^m z^n,$$

то из определения аналитичности по Аренсу-Зингеру вытекает, что для любого $\varepsilon > 0$ и любого компакта $K \subset (T^l \times \bar{D}) \setminus T^{l+1}$ найдётся такой аналитический полином $p(t, z)$, что $|F(t, z) - p(t, z)| < \varepsilon$ для всех $(t, z) \in K$, что и требовалось доказать.

ЛИТЕРАТУРА

1. Arens, R. Generalized analytic functions / R. Arens, I.M. Singer // Trans. Amer. Math. Soc. – 1956. – Vol. 81, № 2. – P. 379–393.
2. Гамелин, Т. Равномерные алгебры / Т. Гамелин. – М.: Мир, 1973. – 336 с.

3. *Rudin, W.* Fourier analysis on groups / W. Rudin. – N.Y. : Interscience Publishers, 1962. – 285 p.
4. *Helson, H.* Analyticity on compact abelian groups / H. Helson // Algebras in analysis: proceedings of instructional conference and NATO Advanced Study Institute, Birmingham, 1973 / Kluwer; H. Helson, ed. – London, 1975. – P. 1–62.
5. *Tonev, T.* Analytic functions on compact groups and their applications to almost periodic functions / T. Tonev, S.A. Grigoryan // Contemporary Math. – 2003. – Vol. 328, № 2. – P. 299–322.
6. *Grigoryan, S.A.* Shift-invariant algebras on groups / S.A. Grigoryan, T. Tonev // Contemporary Math. – 2004. – Vol. 363, № 1. – P. 111–127.
7. *Миротин, А.Р.* Теорема Пэли-Винера для конусов в локально компактных абелевых группах / А.Р. Миротин // Известия высших учебных заведений. Математика. – 1995. – № 3. – С. 35–44.
8. *Миротин, А.Р.* Интерполяционные множества алгебры обобщенных аналитических функций / А.Р. Миротин, М.А. Романова // Известия высших учебных заведений. Математика. – 2007. – № 3. – С. 51–59.
9. *Клиффорд, А.* Алгебраическая теория полугрупп: в 2 т. / А. Клиффорд, Г. Престон. – М. : Наука, 1972. – Т. 1. – 285 с.
10. *Grigoryan, S.A.* Shift-invariant uniform algebras on groups / S.A. Grigoryan, T.V. Tonev. – N. Y. – Basel : Birkhauser, 2006. – 292 p.
11. *Фукс, Л.* Частично упорядоченные алгебраические системы / Л. Фукс. – М. : Мир, 1965. – 342 с.
12. *Романова, М.А.* Вычисление пространства максимальных идеалов и границы Шилова некоторых алгебр обобщенных аналитических функций / М.А. Романова // Веснік Мазырсакага дзяржаўнага педагагічнага ўніверсітэта. – 2006. – № 2 (15). – С. 16–22.

Поступила в редакцию 14.02.11.