УДК 517.925

О ДОПУСТИМЫХ ВОЗМУЩЕНИЯХ ОБОБЩЕННОЙ СИСТЕМЫ ЛЭНГФОРДА В ОДНОМ СЛУЧАЕ

Мусафиров Эдуард Владимирович, к.ф.-м.н., доцент
Гродненский государственный университет имени Янки Купалы
Musafirov Eduard, PhD, musafirov@bk.ru
Yanka Kupala State University of Grodno

Получены допустимые возмущения (т.е. возмущения которые не изменяют отражающей функции системы) для обобщенной системы Лэнгфорда с пятью параметрами при нулевых значениях параметров. При этом многие качественные свойства решений допустимо возмущенных систем сохраняются.

Ключевые слова: *отражающая функция, допустимое возмущение, обобщенная система Лэнгфорда, система обыкновенных дифференциальных уравнений.*

Введение. Многие процессы, происходящие в окружающем нас мире, моделируются с помощью систем обыкновенных дифференциальных уравнений. Большинство таких систем невозможно проинтегрировать даже в квадратурах и тем более через элементарные функции. В связи с этим встает вопрос об изучении решений таких систем дифференциальных уравнений по виду самих систем (т.е. о применении качественной теории дифференциальных уравнений). Одним из новых инструментов качественной теории дифференциальных уравнений является отражающая функция (ОФ), введенная профессором В.И. Мироненко (см [1, 2]).

Для системы обыкновенных дифференциальных уравнений

$$\dot{x} = X(t,x), \quad t \in \mathbf{R}, x \in D \subset \mathbf{R}^n \tag{1}$$

с общим решением в форме Коши $x = \varphi(t;t_0,x_0)$ ОФ определяется формулой $F(t,x) := \varphi(-t;t,x)$. Теория ОФ позволяет проводить исследование качественного поведения решений даже неинтегрируемых в замкнутом виде систем несмотря на то, что ОФ определяется (формально) через общее решение этой системы. ОФ позволяет решать такие задачи качественной теории дифференциальных уравнений, как вопросы существования и устойчивости периодических решений, существования решений краевых задач, вопросы глобального поведения семейств решений дифференциальных систем. Изучению качественного поведения решений дифференциальных уравнений с помощью ОФ посвящены работы J. Zhou, Z. Zhou, Л.А. Альсевич, М.С. Белокурского, В.А. Бельского, Е.В. Варенниковой, П.П. Вересовича, С.В. Майоровской, В.И. Мироненко, В.В. Мироненко и других.

Любая непрерывно дифференцируемая функция $F(t,x)$, удовлетворяющая условию $F\left(-t,F(t,x)\right) \equiv F(0,x) \equiv x$, является ОФ множества систем. Все системы с одинаковой ОФ имеют один и тот же оператор сдвига на любом интервале $(-\alpha;\alpha)$. Поэтому все 2ω-периодические системы с одинаковой ОФ имеют одно и то же отображение за период $[-\omega;\omega]$.

Пусть система (1) и система

$$\dot{y} = Y(t,x), \quad t \in \mathbf{R}, y \in D \subset \mathbf{R}^n \tag{2}$$

имеют одинаковую ОФ $F(t,x)$, и пусть система (1), является 2ω-периодической. Тогда если решение $\phi(t;-\omega,x)$ системы (1) и решение $\psi(t;-\omega,x)$ системы (2) продолжимы на отрезок $[-\omega,\omega]$, то отображение за период $[-\omega,\omega]$ для системы (1) есть $\phi(\omega;-\omega,x) \equiv F(-\omega,x) \equiv \psi(\omega;-\omega,x)$, хотя система (2) может быть непериодической. Т.е. между 2ω-периодическими решениями системы (1) и решениями двухточечной задачи $y(-\omega) = y(\omega)$ для системы (2) можно установить взаимно однозначное соответствие.

Таким образом, решения систем дифференциальных уравнений с одинаковой ОФ имеют много одинаковых качественных свойств. Поэтому при исследовании качественных свойств решений систем целесообразно заменять сложную систему на более простую.

Основная часть. В настоящей работе объектом исследования является обобщенная система Лэнгфорда [3]:

$$\begin{aligned} &\dot{x} = ax + by + xz, \\ &\dot{y} = cx + dy + yz, \\ &\dot{z} = ez - \left(x^2 + y^2 + z^2\right); \quad x,y,z,a,b,c,d,e \in \mathbf{R}, \end{aligned} \tag{3}$$

где a,b,c,d,e – параметры модели.

Целью исследования является поиск допустимых возмущений системы (3), т.е. возмущений которые не изменяют ее ОФ. Заметим, что для допустимо возмущенных систем (ОФ которых совпадает с ОФ исходной системы) многие качественные свойства решений сохраняются. О допустимых возмущениях необощенной системы Лэнгфорда см. [4, 5].

Допустимые возмущения искались в виде:

$$\Delta \cdot \alpha(t) = \begin{pmatrix} \sum\limits_{i+j+k=0}^{n} q_{ijk} x^i y^j z^k \\ \sum\limits_{i+j+k=0}^{n} r_{ijk} x^i y^j z^k \\ \sum\limits_{i+j+k=0}^{n} s_{ijk} x^i y^j z^k \end{pmatrix} \alpha(t),$$

где $q_{ijk}, r_{ijk}, s_{ijk} \in \mathbf{R}$, $i,j,k,n \in \mathbb{N}\cup\{0\}$; $\alpha(t)$ – произвольная непрерывная скалярная нечетная функция.

Теорема. *Пусть* $\alpha_i(t)$, $i=\overline{1,2}$ *– произвольные скалярные непрерывные нечетные функции. Тогда при* $a=b=c=d=e=0$ *ОФ системы (3) совпадает с ОФ системы*

$$\begin{aligned} \dot{x} &= xz\left(1+\alpha_1(t)\right) + y\alpha_2(t), \\ \dot{y} &= yz\left(1+\alpha_1(t)\right) - x\alpha_2(t), \qquad (4) \\ \dot{z} &= -\left(x^2+y^2+z^2\right)\left(1+\alpha_1(t)\right). \end{aligned}$$

Доказательство. Выпишем из правой части системы (4) вектор-множители при $\alpha_i(t)$:

$$\Delta_1 = \begin{pmatrix} xz \\ yz \\ -\left(x^2+y^2+z^2\right) \end{pmatrix}, \ \Delta_2 = \begin{pmatrix} y \\ -x \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Последовательной проверкой тождества $\frac{\partial \Delta}{\partial t} + \frac{\partial \Delta}{\partial x} X(t,x) - \frac{\partial X(t,x)}{\partial x}\Delta = 0$ для каждого вектор-множителя Δ_i убедимся в его истинности. Тогда утверждение теоремы вытекает из теоремы 1 [1].

Замечание. При моделировании реальных процессов обычно рассматривается время $t \geq 0$, поэтому требование нечетности функций $\alpha_i(t)$ не существенно, т.к. их можно доопределить непрерывно нечетным образом на отрицательную временную полуось (при условии $\alpha_i(0) = 0$).

Заключение. Полученно множество нестационарных систем обыкновенных дифференциальных уравнений, ОФ которых совпадает с ОФ автономной обобщенной системы Лэнгфорда (3). Одинаковая ОФ этих систем обуславливает совпадение некоторых качественных свойств поведения их решений, что позволяет использовать результаты исследования качественного поведения решений хорошо изученной обобщенной системы Лэнгфорда [3] для изучения более сложных по своей природе нестационарных возмущенных систем.

При этом, в частности, характер устойчивости решений, при $t = t_0$ выходящих из одной и той же точки, всех допустимо возмущенных систем такой же как и у исходной системы.

Автор выражает благодарность за оказанную помощь ресурсному центру “СКИФ” Гродненского государственного университета имени Янки Купалы.

Список использованных источников

1. Mironenko, V.I. How to construct equivalent differential systems / V.I. Mironenko, V.V. Mironenko // Applied Mathematics Letters. – 2009. – Vol. 22. – № 9. – P. 1356-1359.

2. Мусафиров, Э.В. Двумерные линейные дифференциальные системы с отражающей матрицей, представляющей собой произведение двух матричных экспонент / Э.В. Мусафиров // Вестник фонда фундаментальных исследований. – 2006. – № 4. – С. 75-84.

3. Yang, Q. Complex dynamics in a generalized Langford system / Q. Yang, T. Yang // Nonlinear Dynamics. – 2018. – Vol. 91. – P. 2241-2270.

4. Мусафиров, Э.В. Допустимые возмущения системы Лэнгфорда / Э.В. Мусафиров // Проблемы физики, математики и техники. – 2016. – № 3 (28). – С. 47–51.

5. Musafirov, E.V. Perturbations of the Lanford system which do not change the reflecting function / E.V. Musafirov // International journal of bifurcation and chaos. – 2017. – Vol. 27. – № 10. – 1750154 (5 pages).