

**МОДЕЛИРОВАНИЕ ДИНАМИКИ ЧИСЛЕННОСТИ ОХОТНИЧЬИХ
МЛЕКОПИТАЮЩИХ С ИСПОЛЬЗОВАНИЕМ ЛОГИСТИЧЕСКИХ
РЕКУРРЕНТНЫХ УРАВНЕНИЙ**

Трач Ирина Анатольевна, к.т.н., доцент
Винницкий национальный технический университет
Trach Iryna, PhD, trachiryna2103@gmail.com
Vinnitsa National Technical University

Проведен регрессионный анализ динамики популяций охотничьих млекопитающих. Проведено моделирование популяционной динамики охотничьих млекопитающих с использованием логистической системы рекуррентных уравнений на основе Mathcad и доказана адекватность модели.

Ключевые слова: математическое моделирование, популяционная динамика, регрессионный анализ, межвидовые взаимодействия, динамическая модель.

Использование математического моделирования открывает новые возможности создания модели динамики численности и прогнозирования численности населения, что значительно облегчает анализ первичных данных. В то же время возникают трудности: а) данные моделирования требуют достаточно длительного периода времени (поскольку точность модели определяется количеством данных в количестве); б) в обычных моделях сложно отразить влияние определенных факторов и межвидовых отношений [2-5].

На основе статистики динамики численности охотничьих млекопитающих Хмельницкого лесного хозяйства (ЛХ) проведен их регрессионный анализ с помощью программы Statistica 6.1. В качестве регрессионной модели использовалась экспоненциальная функция, соответствующая моделированию динамики отдельных популяций без межвидовых взаимодействий.

В результате регрессионного анализа были получены математические модели изменения численности отдельных популяций охотничьих животных в экспоненциальном приближении. Кроме того, функциональный индекс включает параметры рождаемости, смертности, миграции и антропогенного воздействия (охота, браконьерство, сельское хозяйство, транспортные системы и т.д.).

Проанализирована корреляционная связь между популяциями некоторых видов охотничьих млекопитающих Хмельницкого лесничества. В частности, зависимость между популяциями пятнистого оленя и зубра, лисицы и зайца-русака, пятнистого оленя и кабана (рис. 1).

В результате корреляционного анализа между популяциями оленя пятнистого и зубра в Хмельницком ЛГ полученный коэффициент корреляции 0,69, который указывает на тесную связь этих популяций. Это объясняется тем, что экологические ниши зубра и оленя пятнистого совпадают. Хотя, в оленя пятнистого она значительно шире за счет лучшего приспособления существования в небольших лесных массивах. Пятнистый олень и зубр, в плане трофических связей, не конкурируют. В данном случае, такой высокий коэффициент корреляции объясняется тем, что зубр конкурирует с оленем, как фактор беспокойства. В весенне-летний период, когда у копытных происходит отел, олени стараются избегать встреч с другими животными. При этом, места вывода молодняка в большинстве случаев заросшие вырубки и молодняки. Во время питания зубры используют эти же заросшие вырубки и молодняки. При этом стадо расходится по всей территории, создавая громкий шум и треск. Другие виды животных, которые вывели потомство в таком месте, пытаются его покинуть, что сопровождается смертью части молодняка [1-5].

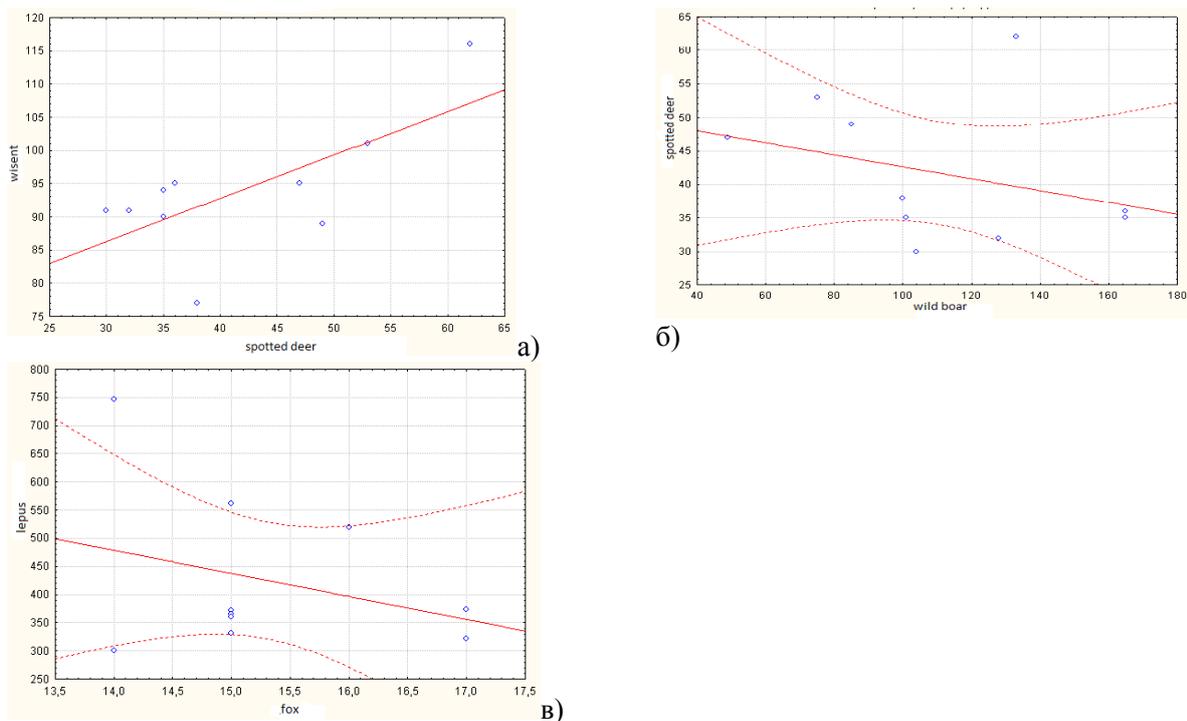


Рисунок 1. – Корреляционный анализ наблюдений между популяциями в Хмельницком ЛГ: а) пятнистый олень и зубр, б) пятнистый олень и кабан, в) заяц-русак и лисица

Отсутствие заметной корреляционной связи между популяциями лисы и зайца в Хмельницком ЛХ объясняется сильным антропогенным вмешательством в экологические ниши животных и значительной охотничьей нагрузкой по сравнению с межвидовым взаимодействием хищник-жертва. Между популяциями оленя и кабана выраженной корреляционной связи не обнаружено, хотя их экологические ниши совпадают. Это объясняется тем, что их численность незначительна и не являются друг для друга факторами беспокойства.

В плане трофических связей, они также значительную конкуренцию друг для друга не создают. Дикий кабан способен проживать в любых лесных угодьях так и в водно-болотных. Он всеядный, что позволяет в течение всего года неоднократно менять кормовую базу.

Математическая модель динамики численности отдельной популяции при условиях достаточного количества пищи, отсутствия скученности и врагов описывается следующим уравнением:

$$N(t) = N_0 e^{r(t-t_0)}; \quad (1)$$

где N_0 – численность популяции в начальный момент времени; r – удельная скорость размножения.

Уравнения (1) полученное при решении дифференциального уравнения Мальтуса

$$\frac{dN}{dt} = rN$$

При некоторой потере точности анализа и замене на, возможно заменить систему нелинейных дифференциальных уравнений системой рекуррентных уравнений. Это позволяет значительно упростить расчеты и сделать их прозрачными и наглядными (2):

$$\begin{cases} N_{i+1} = N_i + \left(r_n N_i - \frac{r_n}{K_n} N_i^2 + \gamma_n N_i M_i \right); \\ M_{i+1} = M_i + \left(r_m M_i - \frac{r_m}{K_m} M_i^2 + \gamma_m M_i N_i \right). \end{cases} \quad (2)$$

В системе (2) используется дискретное время и, что соответствует шагу реального времени (среднем периода размножения $T = \min (T_n, T_m)$).

Проведено моделирование динамики популяций в экосистеме с шестью наиболее распространенными популяциями охотничьих млекопитающих. Исходные данные для моделирования приведены в таблица 1.

Таблица – Исходные данные для моделирования динамики популяций

Вид	Начальная численность	Удельная скорость изменения популяции	Максимальная численность популяции
Олень пятнистый	564	-0,0585	200
Дикий кабан	49	0,1003	160
Европейская косуля	384	0,0262	800
Зубр	96	-0,0073	100
Заец-русак	584	-0,0932	600
Лисица	15	0,0041	17

Система рекуррентных логистических уравнений для моделирования динамики популяций

(3):

$$\begin{pmatrix} N_{1_{i+1}} \\ N_{2_{i+1}} \\ N_{3_{i+1}} \\ N_{4_{i+1}} \\ N_{5_{i+1}} \\ N_{6_{i+1}} \\ N_{7_{i+1}} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} N_{1_i} + m_1 \cdot N_{1_i} - \frac{m_1}{K_1} \cdot \{N_{1_i}\}^2 + \gamma_{12} \cdot N_{1_i} \cdot N_{2_i} + \gamma_{13} \cdot N_{1_i} \cdot N_{3_i} + \gamma_{14} \cdot N_{1_i} \cdot N_{4_i} + \gamma_{15} \cdot N_{1_i} \cdot N_{5_i} + \gamma_{16} \cdot N_{1_i} \cdot N_{6_i} + \gamma_{17} \cdot N_{1_i} \cdot N_{7_i} \\ N_{2_i} + m_2 \cdot N_{2_i} - \frac{m_2}{K_2} \cdot \{N_{2_i}\}^2 + \gamma_{21} \cdot N_{2_i} \cdot N_{1_i} + \gamma_{23} \cdot N_{2_i} \cdot N_{3_i} + \gamma_{24} \cdot N_{2_i} \cdot N_{4_i} + \gamma_{25} \cdot N_{2_i} \cdot N_{5_i} + \gamma_{26} \cdot N_{2_i} \cdot N_{6_i} + \gamma_{27} \cdot N_{2_i} \cdot N_{7_i} \\ N_{3_i} + m_3 \cdot N_{3_i} - \frac{m_3}{K_3} \cdot \{N_{3_i}\}^2 + \gamma_{31} \cdot N_{3_i} \cdot N_{1_i} + \gamma_{32} \cdot N_{3_i} \cdot N_{2_i} + \gamma_{34} \cdot N_{3_i} \cdot N_{4_i} + \gamma_{35} \cdot N_{3_i} \cdot N_{5_i} + \gamma_{36} \cdot N_{3_i} \cdot N_{6_i} + \gamma_{37} \cdot N_{3_i} \cdot N_{7_i} \\ N_{4_i} + m_4 \cdot N_{4_i} - \frac{m_4}{K_4} \cdot \{N_{4_i}\}^2 + \gamma_{41} \cdot N_{4_i} \cdot N_{1_i} + \gamma_{42} \cdot N_{4_i} \cdot N_{2_i} + \gamma_{43} \cdot N_{4_i} \cdot N_{3_i} + \gamma_{45} \cdot N_{4_i} \cdot N_{5_i} + \gamma_{46} \cdot N_{4_i} \cdot N_{6_i} + \gamma_{47} \cdot N_{4_i} \cdot N_{7_i} \\ N_{5_i} + m_5 \cdot N_{5_i} - \frac{m_5}{K_5} \cdot \{N_{5_i}\}^2 + \gamma_{51} \cdot N_{5_i} \cdot N_{1_i} + \gamma_{52} \cdot N_{5_i} \cdot N_{2_i} + \gamma_{53} \cdot N_{5_i} \cdot N_{3_i} + \gamma_{54} \cdot N_{5_i} \cdot N_{4_i} + \gamma_{56} \cdot N_{5_i} \cdot N_{6_i} + \gamma_{57} \cdot N_{5_i} \cdot N_{7_i} \\ N_{6_i} + m_6 \cdot N_{6_i} - \frac{m_6}{K_6} \cdot \{N_{6_i}\}^2 + \gamma_{61} \cdot N_{6_i} \cdot N_{1_i} + \gamma_{62} \cdot N_{6_i} \cdot N_{2_i} + \gamma_{63} \cdot N_{6_i} \cdot N_{3_i} + \gamma_{64} \cdot N_{6_i} \cdot N_{4_i} + \gamma_{65} \cdot N_{6_i} \cdot N_{5_i} + \gamma_{67} \cdot N_{6_i} \cdot N_{7_i} \\ N_{7_i} + m_7 \cdot N_{7_i} - \frac{m_7}{K_7} \cdot \{N_{7_i}\}^2 + \gamma_{71} \cdot N_{7_i} \cdot N_{1_i} + \gamma_{72} \cdot N_{7_i} \cdot N_{2_i} + \gamma_{73} \cdot N_{7_i} \cdot N_{3_i} + \gamma_{74} \cdot N_{7_i} \cdot N_{4_i} + \gamma_{75} \cdot N_{7_i} \cdot N_{5_i} + \gamma_{76} \cdot N_{7_i} \cdot N_{6_i} \end{pmatrix} \quad (3)$$

Результаты моделирования указаны на рис. 2.

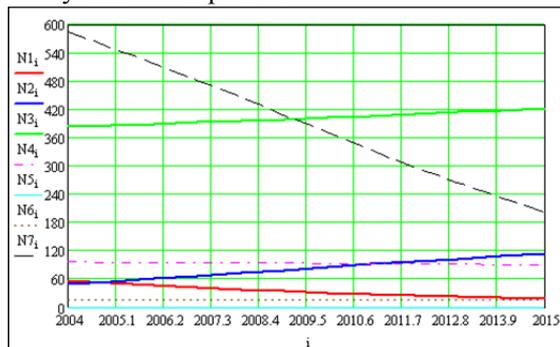


Рисунок 2. - Динамика численности популяций охотничьих млекопитающих в Хмельницком ЛХ

Сравним результаты моделирования динамики популяции оленя пятнистого в Хмельницком ЛХ из системы рекуррентных уравнений с регрессионной модели на основе обработки результатов наблюдений с использованием экспоненциальной функции. Для сравнения используем критерий Пирсона. Поскольку $\chi^2 = 0,998$, то это указывает на адекватность модели на основе системы рекуррентных уравнений результатам наблюдений (рис. 3).

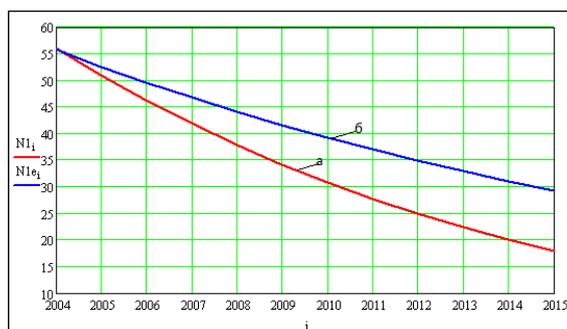


Рисунок 3. – Динамика численности популяции оленя пятнистого в Хмельницьком ЛХ (а - результати моделювання із системи рівнянь (3), б - експоненціальна регресія результатів спостережень)

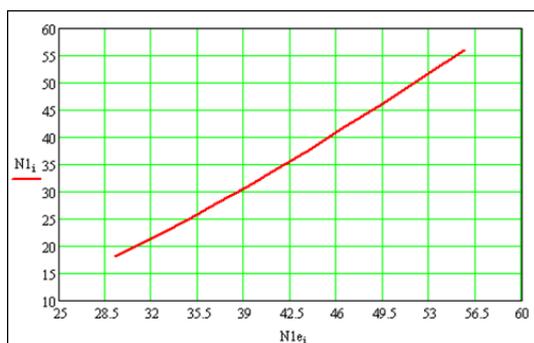


Рисунок 4. – Аналіз адекватності моделі даних результатів спостережень на прикладі динаміки численності популяції оленя пятнистого (критерій Пірсона $\chi^2 = 0,998$)

Итак, полученная модель некоторой степени условна и не может быть использована как абсолютно точный прогноз численности популяций охотничьих млекопитающих.

Список использованных источников

1. Бигон М. Экология. Особи, популяції і сообщества: в 2-х т. Т. 2 / М. Бигон, Д. Харпер, К. Таунсенд; пер. с англ. Под ред. А.М. Гилярова. – М.: Мир, 189. – 477 с.
2. Лаврик В.І. Методи математичного моделювання в екології: навч. посіб. / В.І. Лаврик. – К.: КМ Академія, 2002. – 203 с.
3. Пількевич І.А. Математичне моделювання динаміки популяцій: Монографія. – Житомир: Вид-во ЖДУ ім. І. Франка, 2010. – 87 с.
3. Пількевич, І. А. Оцінювання адекватності логістичних моделей динаміки популяцій копитних України [Текст] / І. А. Пількевич, О. В. Масєвський, В. І. Котков // Збірник наукових праць Подільського державного аграрно-технічного університету. – Кам'янець-Подільський, 2011. – Спец. вип. до VI науково-практичної конференції „Сучасні проблеми збалансованого природокористування”, 24-25 лист. 2011 р. – С. 35–39.
4. Smith J.M. Models in ecology. – Cambridge university press. 1976. – 220 p.