

**ОПТИМАЛЬНОЕ ПОРТФЕЛЬНОЕ ИНВЕСТИРОВАНИЕ В ПЕРИОДЫ ПОДЪЕМА
И СПАДА ЭКОНОМИКИ**

П.М. Лаппо, Д.А. Штромберг

Белорусский государственный университет, lapporm@bsu.by, dasasht@mail.ru

Задачи оптимального портфельного инвестирования на протяжении ряда десятков лет остаются в центре внимания исследователей, работающих в области финансовой математики. Начиная со знаменитой работы Гарри Марковица [1], исследователями было предложено немало различных критериев оптимальности. Это и подход Марковица, позволяющий определить оптимальный фронт портфелей, подходы с точки зрения максимизации ожидаемой полезности. Также существует группа критериев, которые можно назвать критериями безопасности в первую очередь (safety first). Эти критерии позволяют выбрать портфель, который либо минимизирует вероятность падения доходности портфеля ниже определенного уровня, либо максимизируют порог, ниже которого нежелательно падение доходности портфеля, при ограничении на вероятность падения ниже этого порога, либо максимизируют ожидаемую доходность портфеля при ограничении на вероятность падения доходности ниже определенного уровня.

В работе рассмотрены три критерия безопасности в первую очередь (иногда их называют критериями повышенной надежности). Это критерии Роя (Roy), Катаока (Kataoka) и Телсера

(Telser). Они используются для определения оптимальных портфелей инвестиций в акции 11 отраслей в зависимости от периода развития экономики. Приведем эти критерии.

Критерий Роя [2]. Предполагается, что минимальная доходность, которая устраивает инвестора, равна R_L . Согласно критерию Роя, наилучший портфель тот, при котором наименьшая вероятность, что полученная доходность меньше некоторого определённого уровня R_L . Если R_p это доходность портфеля, а R_L высшая граница минимальной желаемой доходности, то критерий записывается следующим образом:

$$\min_X Pr(R_p < R_L),$$

ограничении $Xe = 1$,

где $X = (x_1, x_2, \dots, x_N)$ – портфель инвестиций, x_i - доля инвестиций в i -ю ценную бумагу, $e = (1, 1, \dots, 1)^T$ - N -вектор из единиц, $Pr()$ – означает вероятность события.

Критерий Катаока [2]. Этот критерий предполагает максимизацию минимального порога доходности портфеля при условии, что вероятность того, что полученная доходность меньше или равна нижнему допустимому пределу доходности, не больше некоторого заранее определенного значения, т.е.

$$\begin{aligned} &\max_X R_L, \\ &\text{при ограничениях} \quad Pr\{R_p \leq R_L\} \leq \alpha, \\ & \quad \quad \quad Xe = 1. \end{aligned}$$

Критерий Телсера [2]. Этот критерий основывается на том, что должна максимизироваться ожидаемая доходность при условии, что вероятность того, что полученная доходность меньше или равна нижнему допустимому пределу доходности, не больше некоторого заранее определенного значения. Формально:

$$\begin{aligned} &\max_X ER_p, \\ &\text{при ограничениях} \quad Pr\{R_p \leq R_L\} \leq \alpha, \\ & \quad \quad \quad Xe = 1. \end{aligned}$$

Здесь α – некоторая достаточно малая заранее заданная вероятность, E – означает математическое ожидание.

Будем анализировать портфели инвестиций в сектора экономики, доли которых выражены в процентах. Таких секторов выделяют 11: Сырьевой сектор (Basic Materials), Коммуникационные услуги (Communication Services), Товары второй необходимости (Consumer Cyclical), Товары первой необходимости (Consumer Defensive), Энергетический сектор (Energy), Финансовый сектор (Financial), Здравоохранение (Healthcare), Промышленный сектор (Industrials), Недвижимость (Real Estate), Технологии (Technology), Коммунальный сектор (Utilities). Рассмотрен период с 03.01.1995 по 11.12.2020. Для определения периодов спада и роста использовался индекс S&P 500. Определим периоды 03.01.1995 – 31.08.2000, 29.11.2002 – 29.10.2007, 27.02.2009 – 01.10.2018, 20.12.2018 – 31.01.2020, 31.03.2020 – 11.12.2020 как периоды роста экономики, а остальные интервалы – периоды спада экономики.

На Рис.1 и Рис.2 приведены оптимальные портфели по критерию Роя для периодов роста и спада экономики соответственно. На Рис.3 и Рис.4 – по критерию Катаока, а на Рис.5 и Рис.6 - по критерию Телсера. При вычислениях предполагалось отсутствие возможностей коротких продаж.

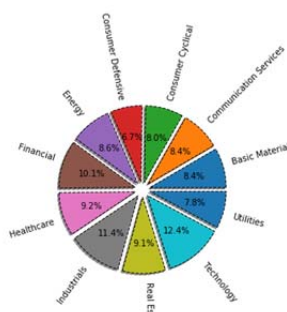


Рис.1



Рис.2



Рис.3



Рис.4



Рис.5



Рис.6

Из диаграмм рисунков 1 и 2 можно сделать вывод, что при переходе экономики к фазе спада долю активов товаров второй необходимости, сектора коммуникаций, технологий, промышленного сектора, финансового и энергетического нужно снижать, заменяя их активами других секторов. Следует действовать наоборот, при развитии экономики и переходе в фазу роста. Подобного рода выводы нетрудно проделать для остальных критериев.

Список использованных источников

1. Markowitz H. Portfolio Selection. / H. Markowitz, The Journal of Finance, Vol. 7, No. 1. (Mar., 1952), pp. 77-91.
2. Elton, Edwin J. and Gruber, Martin J. "Modern portfolio theory and investment analysis"/ Edwin J. Elton and Martin J. Gruber. Leonard N. Stern School of Business New York University, 1995.