ЭФФЕКТИВНОСТЬ И ОПТИМАЛЬНОСТЬ СТРУКТУРИРОВАНИЯ ПРОГРАММНЫХ РЕСУРСОВ ПРИ РАСПРЕДЕЛЕННОЙ ОБРАБОТКЕ

Коваленко Н. С., доктор физико-математических наук
Павлов П. А., магистр экономических наук
Белорусского государственного экономического университета

Резюме. В рамках математической модели организации распределенных конкурирующих процессов, получены критерии эффективности и оптимальности структурирования программных ресурсов.

Summary. Mathematical models of the optimum organization of the homogeneous distributed competing processes are investigated. Criteria of efficiency and an optimality of structurization of program resources are received.

С развитием сетевых технологий, в частности сети Интернет, особую актуальность приобретают задачи создания эффективного алгоритмического и программного обеспечения многопроцессорных систем (МС), базирующихся на принципах распараллеливания и конвейеризации [1]. Важное место в их решении занимают задачи построения и исследования математических моделей оптимальной организации конкурирующих процессов. Указанные задачи будем рассматривать в рамках математической модели распределенной обработки конкурирующих процессов [2], которая включает следующие параметры: p, $p \geq 2$ – число процессоров многопроцессорной системы; n, $n \geq 2$ – число конкурирующих процессов; s, $s \geq 2$ – число блоков структурированного програмного ресурса; $[t_{ij}]$, $i=\overline{1,n}$, $j=\overline{1,s}$, матрица времен выполнения блоков програмного ресурса конкурирующими процессами. Предполагается также, что все n распределенных конкурирующих процессов используют только одну копию структурированного на блоки программного ресурса.

1. О времени реализации конкурирующих процессов

В дальнейшем будем использовать следующие определения.

Систему распределенных конкурирующих процессов будем называть *однородной*, если времена выполнения *j-го* блока каждым из *i-х* процессов равны, т. е. $t_{ij} = t_j$, $i=\overline{1,n}$, $j=\overline{1,s}$.

Структурирование $\theta_s = (t_1, t_2, \dots, t_s)$ программного ресурса для системы однородных конкурирующих процессов будем называть *равномерным*, если $t_1 = t_2 = \dots = t_s = t$, $t = \frac{T^s}{s}$, где $T^s = \sum_{j=1}^{s} t_j$ – длительность выполнения программного ресурса каждым из процессов.

Для системы однородных распределенных конкурирующих процессов в *асинхронном* [2] и *первом синхронном режимах* [3] минимальное общее время их выполнения при p, n, $s \geq 2$ и $s \leq p$ определяется по формуле:

$$T_o(p,n,s) = T_o^{ac}(p,n,s) = T_o^1(p,n,s) = T^s + (n-1)t_{\max}^s,$$

где $T^s = \sum_{j=1}^{s} t_j$ – длительность выполнения программного ресурса каждым из процессов,

$t^s_{\max} = \max\limits_{1 \le j \le s} t_j$, $(t_1, t_2, ..., t_s)$ – длительности выполнения каждого из блоков.

Минимальное общее время выполнения системы $n \ge 2$ однородных распределенных конкурирующих процессов во *втором синхронном режиме* [3] при p, $s \ge 2$ и $s \le p$ определяется по формуде:

$$T_o^2(p,n,s) = T^s + (n-1)\left[t_s + \sum_{j=2}^{s} \max\{t_{j-1} - t_j, 0\}\right]. \quad (2)$$

В [3] также доказано, что в случае p, n, $s \ge 2$ и $s \le p$ минимальные общие времена выполнения множества однородных распределенных конкурирующих процессов в асинхронном и базовых синхронных режимах совпадают.

Для всех трех режимов в случае *равномерного структурирования* минимальное общее время выполнения множества распределенных конкурирующих процессов $\overline{T}$ определяется по формуле:

$$\overline{T} = \begin{cases} (n+s-1)t, & при\ p \ge \min\{n,s\}; \\ (kn+p-1)t, & при\ p < \min\{n,s\}, \\ & s = kp, k > 1; \\ ((k+1)n+r-1)t, & при\ p < \min\{n,s\},\ s = kp + r, \\ & k \ge 1, 1 \le r < p. \end{cases} \quad (3)$$

2. Эфективность и оптимальность структурирования программных ресурсов

Структурирование $\theta_s = (t_1, t_2, ..., t_s)$ программного ресурса для системы однородных распределенных конкурирующих процессов будем называть эффективным при фиксированных p, $n \ge 2$, если величина $\Delta(\theta_s) = nT^s - T_o(p,n,s) \ge 0$, где nT^s – время выполнения n процессов в последовательном режиме, а

$$T^s = \sum_{j=1}^{s} t_j$$

Эффективное структурирование, при котором величина $\Delta(\theta_s)$ достигает наибольшего значения, будем называть *оптимальным.*

Покажем, что оптимальное структурирование достаточно искать среди равномерных структурирований программного ресурса.

В силу (1) и свойств функции определения максимума вытекает необходимое условие эффективности и необходимое и достаточное условие оптимальности структурирования.

Теорема 1.

Для любого неравномерного (существуют i, i', что $t_i \ne t_{i'}$) эффективного структурирования на s блоков с $t = \dfrac{T^s}{s}$.

Доказательство.

Условие эффективности для системы однородных распределенных конкурирующих процессов в асинхронном и первом синхронном режимах можно записать в виде:

$$\Delta(\theta_s) = (n-1)(T^s - t^s_{\max}) \ge 0,$$

а для случая равномерного структурирования:

$$\overline{\Delta}(s) = (n-1)(T^s - t^s) \ge 0, \ где\ t^s = T^s / s.$$

Покажем, что $\overline{\Delta}(s) > \Delta(\theta_s)$. Для этого рассмотрим разность $\overline{\Delta}(s) - \Delta(\theta_s) = (n-1)(t^s_{\max} - t^s)$ Случай, когда $\overline{\Delta}(s) - \Delta(\theta_s) \le 0$ будет иметь место только, если $t^s_{\max} \le t^s$. Последнее невозможно, так как из того, что структурирование не является равномерным, следовало бы $\sum_{j=1}^{s} t_j < st^s = T^s$, а по условию $\sum_{j=1}^{s} t_j = T^s$. Получили противоречие $T^s < T^s$, что и доказывает теорему.

Справедлива теорема.

Теорема 2.

Для того чтобы эффективное структурирование $\theta_s = (t_1, t_2, ..., t_s)$ программного ресурса для системы однородных распределенных конкурирующих процессов при $s \le p$ было оптимальным, необходимо и достаточно, что бы оно было равномерным.

3. Эффективность и оптимальность структурирования с учетом накладных расходов.

Введем параметр $\tau > 0$, характеризующий время дополнительных системных расходов, связанных с организацией параллельного использования блоков программного ресурса множеством распределенных конкурирующих процессов.

Нетрудно показать, что формулы вычисления минимального общего времени (1), (2) имеют место и с учетом накладных расходов $\tau > 0$ в точности до замены t_j на $t_j^\tau = t_j + \tau$, а T^s на $T_\tau^s = \sum_{j=1}^{s} t_j^\tau$, т.е.

$$\begin{aligned} T(p,n,s,\tau) &= T_o^{ac}(p,n,s,\tau) = \\ &= T_o^1(p,n,s,\tau) = T_\tau^s + (n-1)t^\tau_{\max}, \end{aligned} \quad (4)$$

$$\begin{aligned} &T_o^2(p,n,s,\tau) = \\ &= T_\tau^s + (n-1)\left[t_s^\tau + \sum_{j=2}^{s} \max\{t_{j-1}^\tau - t_j^\tau, 0\}\right], \end{aligned} \quad (5)$$

где $t^\tau_{\max} = \max\limits_{1 \le j \le s} t^\tau_j$.

В случае равномерного структурирования минимальное общее время выполнения множества распределенных конкурирующих процессов с учетом накладных расходов $\tau > 0$

определяется также в точности до замены в формуле (3) t на $t_\tau = T^s / s + \tau,\ T^s = st$:

$$\overline{T}_\tau = \begin{cases} (n+s-1)t_\tau, & при\ p \ge \min\{n,s\}; \\ (kn+p-1)t_\tau, & при\ p < \min\{n,s\},\ s = kp,\ k > 1; \\ ((k+1)n+r-1)t_\tau, & при\ p < \min\{n,s\},\ s = kp+r,\ k \ge 1,\ 1 \le r < p. \end{cases} \qquad (6)$$

Как видно, в формулах (4) – (6) явно учитывается параметр τ .

С учетом накладных расходов $\tau > 0$ имеют место теоремы 1 и 2. В этом случае, условие эффективности для *системы однородных распределенных конкурирующих процессов* будет иметь вид:

$$\Delta_\tau(s) = (n-1)(T^s - t^s_{\max}) - (n+s-1)\tau \ge 0.$$

В случае *равномерного структурирования:*

$$\overline{\Delta}_\tau(s) = (n-1)(T^s - t^s) - (n+s-1)\tau \ge 0.$$

Сформулируем необходимые и достаточные условия (критерии) существования эффективного структурирования программных ресурсов при достаточном $s \le p$ числе процессоров в зависимости от величины накладных расходов $\tau > 0$.

Теорема 3.

Для существования эффективного структурирования программного ресурса при заданных $p \ge 3,\ T^s,\ \tau$ в случае $s \le p$ и $n \le (p-1)^2$ необходимо и достаточно, чтобы выполнялись следующие условия:

$$\tau \le \begin{cases} f(1+\sqrt{n}), & если \sqrt{n}\ – целое \\ \max\{f(1+[\sqrt{n}]), f(2+[\sqrt{n}])\}, & если \sqrt{n}\ – нецелое \end{cases}$$

Где $f(x) = \dfrac{(n-1)T^s(x-1)}{x(n+x-1)}$, $[x]$ – наибольшее целое, не превосходящее x.

Доказательство.

Необходимость следует из теоремы 1. Действительно, с учетом формул (6) условие эффективности равносильно следующему:

$$\tau \le \frac{(n-1)T^s(s-1)}{s(n+s-1)}. \qquad (7)$$

Введя функцию $f(x) = (n-1)T^S(x-1) / x(n+x-1)$, $x > 0$, легко показать, что она достигает максимума при $x = 1 + \sqrt{n}$. Выбрав в качестве эффективного структурирование на s блоков, при котором $s = x = 1 + \sqrt{n}$, если $\sqrt{n}$ – целое, или $s = x \in \{1+[\sqrt{n}], 2+[\sqrt{n}]\}$, если $\sqrt{n}$ – не целое . Необходимость доказана.

Достаточность следует из (7), поскольку $f(x)$ достигает наибольшего значения при $s = x = 1+\sqrt{n}$, если $\sqrt{n}$ – целое, или при $s = x \in \{1+[\sqrt{n}], 2+[\sqrt{n}]\}$, если $\sqrt{n}$ – не целое.

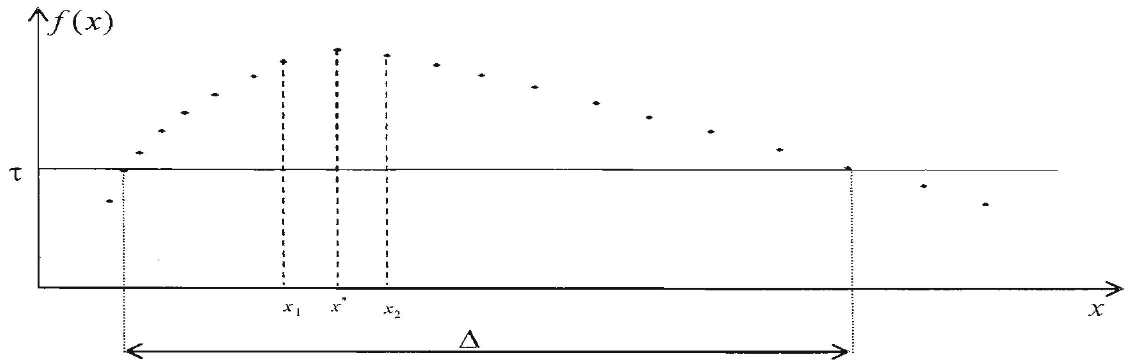
Замечание.

При $p = s = 2$ структурирование будет эффективным, если отношение

$$\frac{\tau}{T^s} \le \frac{n-1}{2(n+1)}.$$

На рисунке изображен график функции $y = f(x),\ x > 0$ при фиксированных $n,\ T,\ \tau$. Существование эффективного структурирования определяется областью Δ . Все целочисленные точки отрезка Δ являются значениями s при которых структурирование будет эффективным, при этом

$$x_1 = 1 + [\sqrt{n}],\ \ x^* = 1 + \sqrt{n},\ \ x_2 = 2 + [\sqrt{n}]$$



Решение задачи об оптимальности равномерного структурирования программного ресурса на s блоков для достаточного числа процессоров следует из теоремы 4.

Теорема 4.

Для того, чтобы эффективное структурирование программного ресурса θ_s и s блоков было оптимальным при $s \le p$, заданных $T^s,\ \tau > 0,\ n \ge 2$, необходимо и достаточно, чтобы оно было равномерным и число блоков s равнялось тому из чисел p,

$$\left[\left[\sqrt{\frac{(n-1)T^s}{\tau}}\right], \left[\sqrt{\frac{(n-1)T^s}{\tau}}\right] + 1\right] \cap [2, p],$$

при котором функция $\Delta(s)$ принимает наибольшее значение.

Доказательство.

В силу теоремы 2 оптимальное структурирование следует искать среди равномерных. Тогда очевидно, что для случая равномерного структурирования:

$$\Delta(s) = (n-1)T^s(1-1/x) - (n+x-1)\tau .$$

Необходимость. Введем функцию действительного аргумента x вида:

$$\Delta(x) = (n-1)T^s(1-1/x) - (n+x-1)\tau,\ x \ge 1 .$$

Так как структурирование будет оптимальным в той точке x, где $\Delta(x)$ достигает своего наибольшего значения. Покажем, что функция $\Delta(x)$ достигает своего наибольшего значения в точке $x = \sqrt{\dfrac{(n-1)T^s}{\tau}}$.

Действительно, $\Delta'(x) = \dfrac{(n-1)T^s}{x^2} - \tau$, $\Delta''(x) = -\dfrac{2T^s(n-1)}{x^3} < 0$, так как $x > 0,\ n \ge 2$.

Следовательно, функция $\Delta(x)$ имеет максимум в точке, где $\Delta'(x) = 0$, т. е. $x = \sqrt{\dfrac{(n-1)T^s}{\tau}}$. Целочисленные точки, в которых достигается наибольшее значение функции $\Delta(x)$, будут $s = [x^*]$ или $s = [x^*]+1$. Следовательно, в качестве s можно выбрать одно из чисел

$$\left[\sqrt{\frac{(n-1)T^s}{\tau}}\right],\ \left[\sqrt{\frac{(n-1)T^s}{\tau}}\right]+1,$$

в которых функция $\Delta(x)$ принимает наибольшее значение.

Если окажется, что ни одна из точек

$$\left[\sqrt{\frac{(n-1)T^s}{\tau}}\right],\ \left[\sqrt{\frac{(n-1)T^s}{\tau}}\right]+1,$$

в которой функция $\Delta(x)$ принимает наибольшее значение, не принадлежит $[2, p]$, то в качестве оптимального структурирования по числу блоков выбираем $s^* = p$.

Достаточность следует из свойств выпуклости функции $\Delta(x)$ при $s \le p$ на $[2, p]$.

Имеет место следующая

Теорема 5.

Если $p,\ n,\ s \ge 3,\ n = s \ne 3$ и $\tau \le \min\limits_{1 \le j \le s} t_j$, то структурирование программного ресурса $\theta_s = (t_1, t_2, \ldots, t_s)$ будет эффективным при выполнении n конкурирующих процессов в МС с p процессорами в случае $s \le p$ тогда и только тогда, когда выполняется условие $sn \ge 2(n+s-1)$.

Доказательство следует из анализа нижеприведенных неравенств.

Условие эффективности равносильно следующему неравенству:

$$\frac{T^s - t^s_{\max}}{\tau} \ge \frac{n+s-1}{n-1}.$$

В силу условия теоремы $\tau \le \min\limits_{1 \le j \le s} t_j$ имеет место неравенство:

$$\frac{T^s - t^s_{\max}}{\tau} \ge s-1.$$

Кроме того, условие теоремы $sn \ge 2(n+s-1)$ равносильно следующему неравенству:

$$s-1 \ge \frac{n+s-1}{n-1}.$$

Полученные критерии эффективности и оптимальности структурирования программных ресурсов могут быть использованы при проектировании системного и прикладного программного обеспечения многопроцессорных систем и вычислительных комплексов, используемых для решения в реальное время сложных задач из различных областей знаний.

Авторы выражают благодарность кандидату физико-математических наук, доценту Астровскому А.И. за полезные замечания и обсуждения.

Литература

1. Воеводин В.В. Параллельные вычисления. СПб.: БХВ-Петербург, 2002. 608 с.
2. Коваленко Н.С., Метельский В.М. О времени реализации конкурирующих процессов при распределенной обработке // Кибернетика и системный анализ. 1996. №1. С. 54–64.
3. Коваленко Н.С., Метельский В.М. Режимы взаимодействия неоднородных распределенных конкурирующих процессов // Кибернетика и системный анализ. 1997. №3. С. 31–43.
4. Коваленко Н.С., Метельский В.М. Оптимальность структурирования программных ресурсов при распределенной обработке // Кибернетика и системный анализ. 1999. №6. С. 59–62.
5. Конвей Р.В., Максвелл В.Л., Миллер Л.В. Теория расписаний. М.: Наука, 1975. 360 с.