

Міністерство освіти і науки України

ВІСНИК

Харківського національного
університету імені В. Н. Каразіна



№ 926

Харків
2010

ISSN 0453–8048

Міністерство освіти і науки України
Харківський національний університет імені В. Н. Каразіна

ВІСНИК

Харківського національного
університету імені В.Н. Каразіна



№ 926

Серія

«Математичне моделювання.

Інформаційні технології.

Автоматизовані системи управління»

Випуск 15

Серія заснована у 2003 р.

Харків
2010

До випуску увійшли статті, присвячені дослідженням у галузі математичного моделювання та обчислювальних методів, інформаційних технологій, захисту інформації, висвітлюються нові математичні методи дослідження та керування фізичними, технічними та інформаційними процесами, дослідження з програмування та комп'ютерного моделювання в наукоємких технологіях.

Для викладачів, наукових працівників, аспірантів, працюючих у відповідних або суміжних напрямках.

Затверджено до друку рішенням Вченої ради Харківського національного університету імені В. Н. Каразіна (протокол № 11 від 29.10.2010 р.)

Редакційна колегія:

Азаренков М.О. (гол. редактор), д.ф.-м.н., член-кор. НАН України, проф., ІВТ ХНУ імені В.Н. Каразіна

Гандель Ю.В., д.ф.-м.н., проф., ММФ ХНУ імені В.Н. Каразіна

Жолткевич Г.М., (заст. гол. редактора), д.т.н., проф. ММФ ХНУ імені В.Н. Каразіна

Золотарьов В.О., д.ф.-м.н., проф., ММФ ХНУ імені В.Н. Каразіна

Куклін В.М., д.ф.-м.н., проф., ФКН ІВТ ХНУ імені В.Н. Каразіна

Лазурик В.Т., д.ф.-м.н., проф., ФКН ІВТ ХНУ імені В.Н. Каразіна

Мацевитий Ю.М., д.т.н., академік НАН України, проф., фізико-енергетичний ф-т ХНУ імені В.Н. Каразіна

Мищенко В.О. (відпов. секретар), к.ф.-м.н., доц., ММФ і ФКН ІВТ ХНУ імені В.Н. Каразіна

Раскін Л.Г., д.т.н., проф., Національний технічний університет "ХПІ"

Стрельникова О.О., д.т.н., проф. Ін-т проблем машинобудування НАН України

Руткас А.Г., д.ф.-м.н., проф., ММФ ХНУ імені В. Н. Каразіна

Соколов О.Ю., д.т.н., проф., Національний аерокосмічний університет імені М.Є. Жуковського "ХАІ"

Сорока Л.С., д.т.н., проф., ФКН ІВТ ХНУ імені В.Н. Каразіна

Стервоєдов М.Г., к.т.н., доц., ФКН ІВТ ХНУ імені В.Н. Каразіна

Целуйко О.Ф., к.ф.-м.н., проф., ІВТ ХНУ імені В.Н. Каразіна

Черваньов І.Г., д.т.н., проф., геолого-географічний ф-т ХНУ імені В.Н. Каразіна

Шейко Т.І., д.т.н., проф., фізико-енергетичний ф-т ХНУ імені В.Н. Каразіна

Щербина В.А., д.ф.-м.н., проф., ММФ ХНУ імені В.Н. Каразіна

Адреса редакційної колегії: 61077, м. Харків, пл. Свободи, 6, ХНУ імені В. Н. Каразіна, к. 538.

Тел. +380 (57) 707-55-35, Email: Victor.O.Mischenko@univer.kharkov.ua .

Статті прорецензовано.

Свідоцтво про державну реєстрацію КВ № 11825-696 ПР від 04.10.2006.

© Харківський національний університет імені В.Н.Каразіна, оформлення, 2010

ЗМІСТ

▪ Д. В. Агеев	5
Проектирование сети доступа мультисервисной телекоммуникационной системы, обеспечивающей максимум прибыли оператора сети	
▪ Н. А. Азаренков, В. И. Ткаченко, И. В. Ткаченко	11
Сходящиеся бесконечные определители в исследованиях периодических плазменных волноводов и анализ их влияния на дисперсию электромагнитных волн	
▪ И. А. Астионенко, Е. И. Литвиненко, А. Н. Хомченко	25
Трикубическая интерполяция по Кунсу как задача на геометрическую вероятность	
▪ О. М. Бердник	31
Моделювання ламінарного потоку в еліптичному каналі з легкопроникною жорсткістю	
▪ Тарек Юсеф Бади Биштави, Г. Н. Жолткевич, Ю. В. Соляник	39
О прототипе экспертной системы для поддержки автоматизации прогнозирования характеристик телетрафика	
▪ В. А. Богомолов, Р. Х. Низаев, С. П. Плохотников, Д. С. Плохотников	46
Моделирование фильтрации с модифицированными проницаемостями и при линейных, квадратичных и кубических исходных проницаемостях	
▪ А. В. Борисов, А. В. Карпухин, Л. И. Маркова	53
Использование симулятора ns-3 для моделирования поведения сетевых протоколов	
▪ А. И. Боровик, С. В. Деркач, И. А. Колтунов	60
Построение субоптимального метода распознавания и классификации на смешевых моделях вероятностных распределений для обработки дистанционных данных	
▪ И. Д. Бреславский	75
Распределение напряжений по пластине при нелинейных колебаниях	
▪ В. І. Волинець	85
Рекурентні методи обчислення дискретних перетворень Фур'є та Хартлі з підвищеною точністю обчислення в арифметиці з фіксованою комою	
▪ О. В. Гевко, В. Л. Дунець, М. О. Хвостівський, Є. Б. Яворська	93
Метод комп'ютерного опрацювання електрокардіосигналу під впливом дозованого фізичного навантаження	
▪ Г. В. Голубев	100
Компьютерный метод решения задачи определения поля давлений, в нелинейном случае	
▪ С. П. Губарев, М. И. Золототрубова, Г. П. Опалева, В. С. Таран	108
Автоматизированная система сбора диагностической информации на экспериментальной физической установке "Ураган – 2М"	
▪ Г. И. Загинайлов, С. С. Яременко	115
Метод повышения эффективности компьютерных расчетов в задачах с кусочно-координатными границами	

▪ Д. Ю. Косьянов, А. В. Русанов	123
Явная схема для численного интегрирования уравнений гиперболического типа на неструктурированных сетках	
▪ П. О. Кравченко, Л. В. Макутоніна	139
Результати порівняльного аналізу стандартів криптосистем на ідентифікаторах IEEE P1636.3, RFC 5091, RFC 5408	
▪ И. В. Лимаренко	147
Построение математической модели и решение задачи оптимального размещения кругов в кольце	
▪ О. М. Литвин, О. П. Нечуйвітер	153
Кубатурна формула для обчислення 2 D коефіцієнтів Фур'є з використанням інтерлінації функцій	
▪ П. П. Маслянюк, А. В. Рябушенко	161
Математичні методи для системної інженерії проектів інформатизації фінансово-інвестиційної діяльності	
▪ С. И. Матюхин, А. А. Писарев, А. В. Ставцев	169
Влияние микротрещин на вольтамперные характеристики полупроводниковых диодов	
▪ А. М. Мильцин, В. И. Олевский, В. В. Плетин	175
Моделирование несущей способности тонкостенных цилиндрических оболочек с несовершенством формы	
▪ П. А. Павлов	181
Синхронные распределенные вычисления в условиях неограниченного параллелизма при ограниченном числе копий программного ресурса	
▪ М. Р. Петрик	195
Математична модель та побудова розв'язку систем конкурентивного переносу в неоднорідному середовищі нанопористих частинок	
▪ В. А. Черкасский	204
Численное решение уравнения Шредингера: метод диагонализации и спектральный метод	
▪ Т. З. Чочиев	212
Линейные уравнения в частных производных высшего порядка	
▪ CONTENTS	223

УДК 681.3.06

Синхронные распределенные вычисления в условиях неограниченного параллелизма при ограниченном числе копий программного ресурса

П. А. Павлов

Полесский государственный университет, Беларусь

В статье решены задачи определения минимального общего времени выполнения распределенных конкурирующих процессов, при ограниченном числе копий программного ресурса в условиях неограниченного параллелизма.

Ключевые слова: *распределенный процесс, программный ресурс, асинхронный режим, ограниченный параллелизм.*

У статті вирішені питання визначення мінімального загального часу виконання розподілених конкурентних процесів, при обмеженні числі копій програмного ресурсу в умовах необмеженого паралелізма.

Ключові слова: *розподілений процес, програмний ресурс, асинхронний режим, обмежений паралелізм.*

In article problems of definition of minimum general time of performance of the distributed competing processes are solved at the limited number of copies of a program resource in the conditions of unlimited parallelism.

Keywords: *distributed process, program resource, asynchronous mode, limited parallelism.*

1. Введение

Во многих приложениях, связанных с оптимальной организацией параллельных вычислений в многопроцессорных системах (МС) и вычислительных комплексах (ВК), значительный интерес представляют задачи, когда множество конкурирующих процессов могут использовать не одну, а несколько копий структурированного программного ресурса (ПР). Случай, когда в общей памяти многопроцессорной системы имеется одна копия ПР, с различных точек зрения был изучен в работах [1–11]. При этом были решены задачи определения минимального общего времени выполнения распределенных конкурирующих процессов, использующих структурированный на блоки программный ресурс в различных режимах взаимодействия процессов, процессоров и блоков [1–4], получены критерии эффективности и оптимальности структурирования программных ресурсов [5], проведен сравнительный анализ режимов взаимодействия процессов, процессоров и блоков [6–7], решен ряд оптимизационных задач по расчету числа процессов, минимального числа процессоров и др. [8–11]. Изучение этих и других задач, относящихся к оптимальной организации параллельных вычислений, приобретает особую актуальность в случае, когда в общей памяти МС могут быть одновременно размещены $c \geq 2$ копий программного ресурса. Такое обобщение носит принципиальный характер в виду того, что отражает основные черты мультиконвейерной обработки, а также позволяет сравнить эффективность конвейерной и параллельной обработки.

В данной работе строится и исследуется математическая модель организации конкурирующих процессов, использующих ограниченное число копий

программного ресурса. При этом, используя идеи метода структурирования программных ресурсов на блоки с их последующей конвейеризацией по процессам и процессорам, исследуются оптимальные временные характеристики такой организации.

2. Математическая модель распределенных вычислений при ограниченном числе копий программного ресурса

Конструктивными элементами для построения математических моделей систем распределенных вычислений являются понятия процесса и программного ресурса [1–11].

Процесс будем рассматривать как последовательность блоков (команд, процедур) Q_1, Q_2, \dots, Q_s , для выполнения которых используется множество процессоров (процессорных узлов, обрабатывающих устройств, интеллектуальных клиентов). При этом процесс называется *распределённым*, если все блоки или часть из них обрабатываются разными процессорами. Для ускорения выполнения процессы могут обрабатываться параллельно, взаимодействуя путем обмена информацией. Такие процессы называются *кооперативными* или *взаимодействующими* процессами.

Понятие *ресурса* используется для обозначения любых объектов вычислительной системы, которые могут быть использованы процессами для своего выполнения. *Реентерабельные* (множественно используемые) ресурсы характеризуются возможностью одновременного использования несколькими вычислительными процессами. Для параллельных систем характерной является ситуация, когда одну и ту же последовательность блоков или ее часть необходимо процессорам выполнять многократно, такую последовательность будем называть *программным ресурсом*, а множество соответствующих процессов – *конкурирующими*.

Математическая модель распределенной обработки конкурирующих взаимодействующих процессов при ограниченном числе копий программного ресурса включает в себя:

p , $p \geq 2$, процессоров многопроцессорной системы, которые имеют доступ к общей памяти;

n , $n \geq 2$, распределенных конкурирующих процессов;

s , $s \geq 2$, блоков структурированного на блоки программного ресурса;

матрицу $T = [t_{ij}]$, $i = \overline{1, n}$, $j = \overline{1, s}$, времен выполнения блоков программного ресурса распределенными взаимодействующими конкурирующими процессами;

$2 \leq c \leq p$, число копий структурированного на блоки программного ресурса, которые могут одновременно находиться в оперативной памяти, доступной для

всех p процессоров, причем $\left\lceil \frac{p}{c} \right\rceil \geq 2$;

$\varepsilon > 0$ – параметр, характеризующий время дополнительных системных расходов, связанных с организацией конвейерного режима использования блоков структурированного программного ресурса множеством взаимодействующих конкурирующих процессов при распределенной обработке.

Будем также предполагать, что число процессов n кратно числу копий c структурированного программного ресурса, т.е. $n = mc$, $m \geq 2$, и что взаимодействие процессов, процессоров и блоков программного ресурса подчинено следующим условиям:

1) ни один из процессоров не может обрабатывать одновременно более одного блока;

2) процессы выполняются в параллельно–конвейерном режиме группами, т.е. осуществляется одновременное (параллельное) выполнение c копий каждого блока в сочетании с конвейеризацией групп из c блоков по процессорам и процессам;

3) обработка каждого блока программного ресурса осуществляется без прерываний;

4) распределение блоков программного ресурса по процессорам для каждого из процессов $i = lc + q$, $i = \overline{1, n}$, $l \geq 0$, $q = \overline{1, c}$, осуществляется циклически по

правилу: блок с номером $j = k \left[\frac{p}{c} \right] + r$, $j = \overline{1, s}$, $k \geq 0$, $r = 1, \left[\frac{p}{c} \right]$,

распределяется на процессор с номером $q + c(r - 1)$.

Введем следующие режимы взаимодействия процессов, процессоров и блоков с учетом наличия c копий программного ресурса:

1) *асинхронный режим*, при котором начало выполнения очередной группы из c копий блока Q_j , $j = \overline{1, s}$, определяется наличием c процессоров и готовностью этой группы блоков к выполнению (программный блок считается готовым к выполнению, если он не выполняется ни на одном из процессоров);

2) *первый синхронный режим*, обеспечивающий линейный порядок выполнения блоков программного ресурса внутри каждого из процессов без задержек, т.е. для каждого процесса $i = lc + q$, $i = \overline{1, n}$, $l \geq 0$, $q = \overline{1, c}$, момент завершения выполнения j -го блока на $(q + c(r - 1))$ -м процессоре совпадает с моментом начала выполнения следующего $(j + 1)$ -го блока на $(q + cr)$ -м процессоре, $j = \overline{1, s - 1}$, $r = 1, \left[\frac{p}{c} \right]$;

3) *второй синхронный режим*, при котором c копий каждого блока непрерывно переходит по группам из c процессоров, т.е. момент окончания обработки c копий текущего блока совпадает с моментом начала их обработки на следующей группе из c процессоров.

На Рис.1–3 представлены диаграммы Ганта, иллюстрирующие выполнение $n = 4$ распределенных конкурирующих процессов, использующих $c = 2$ копии структурированного программного ресурса в МС с $p = 7$ процессорами в рассмотренных выше режимах и с заданной матрицей времен выполнения

блоков ПР с учетом дополнительных системных расходов $T^E = \begin{bmatrix} 3 & 1 & 4 \\ 2 & 2 & 1 \\ 1 & 3 & 3 \\ 4 & 1 & 2 \end{bmatrix}$.

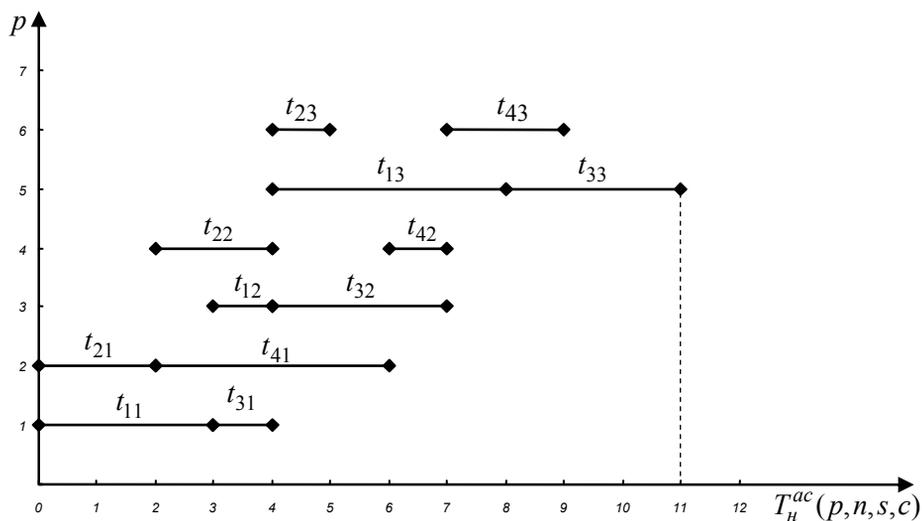


Рис.1. Асинхронный режим

Определение 1. Система n распределенных конкурирующих процессов называется *неоднородной*, если времена выполнения блоков программного ресурса Q_1, Q_2, \dots, Q_s зависят от объемов обрабатываемых данных и/или их структуры, т. е. разные для разных процессов.

Определение 2. Систему распределенных конкурирующих процессов будем называть *однородной*, если времена выполнения Q_j -го блока каждым из i -х процессов равны, т.е. $t_{ij} = t_j$, $i = \overline{1, n}$, $j = \overline{1, s}$.

Определение 3. Систему конкурирующих процессов будем называть *одинаково распределенной*, если времена t_{ij} выполнения блоков Q_j , $j = \overline{1, s}$, программного ресурса каждым из i -х процессов совпадают и равны t_i для всех $i = \overline{1, n}$, т.е. справедлива цепочка равенств $t_{i1} = t_{i2} = \dots = t_{is} = t_i$ для всех $i = \overline{1, n}$.

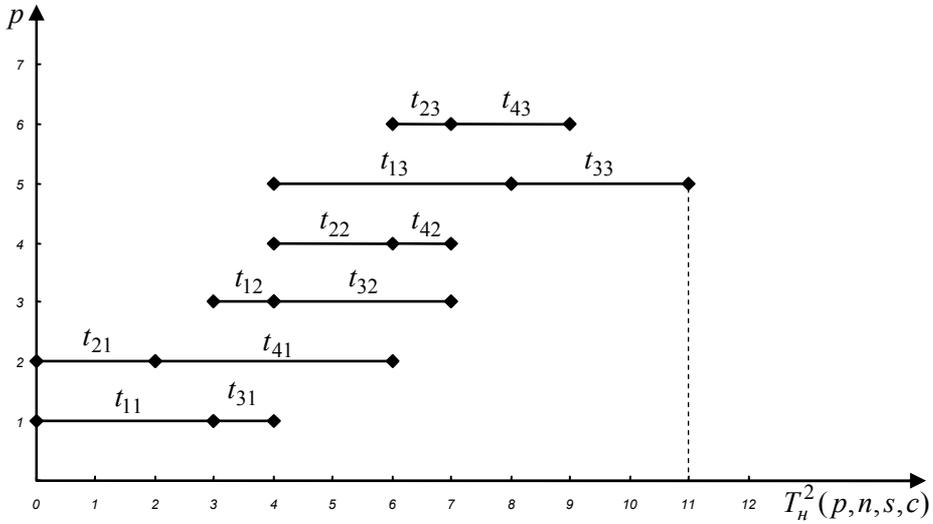


Рис. 2. Первый синхронный режим

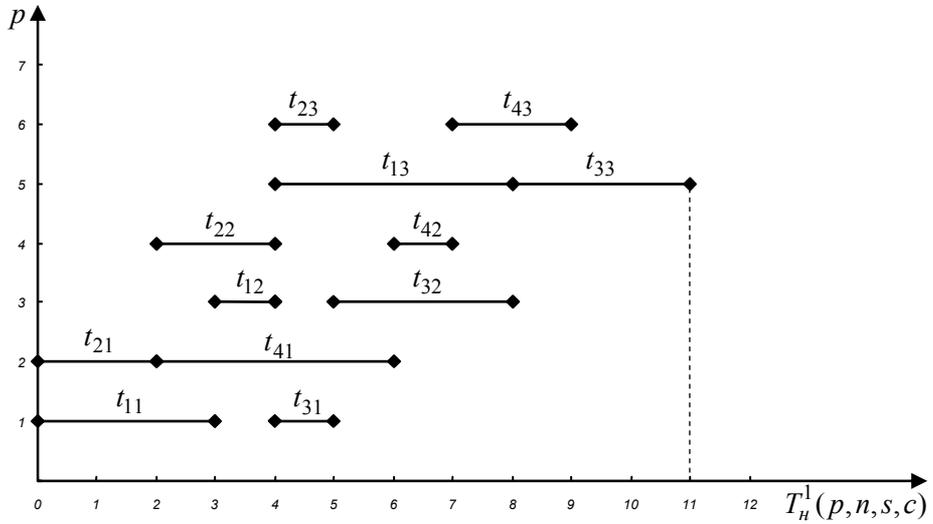


Рис.3. Второй синхронный режим

Заметим, что для системы однородных процессов в матрице времен выполнения блоков конкурирующими процессами будут одинаковы все строки, а для одинаково распределенной системы – столбцы.

3. Минимальное общее время выполнения неоднородных распределенных процессов в асинхронном режиме при достаточном числе процессоров

Обозначим минимальное общее время выполнения n неоднородных распределенных конкурирующих процессов при ограниченном числе s копий программного ресурса в многопроцессорной системе с p процессорами в

асинхронном режиме, с учетом параметра ε , через $T_n^{ac}(p, n, s, c)$. Для вычисления $T_n^{ac}(p, n, s, c)$ рассмотрим случаи неограниченного $\left(s \leq \left\lceil \frac{p}{c} \right\rceil\right)$ параллелизма.

Пусть имеется система $n = mc$, $m \geq 2$, $2 \leq c \leq p$, неоднородных распределенных конкурирующих процессов, причем число блоков s структурированного программного ресурса не превосходит числа групп процессоров по c процессоров в каждой, т.е. $2 \leq s \leq \left\lceil \frac{p}{c} \right\rceil$. В этом случае без ограничения общности можно считать, что каждый Q_j -й, $j = \overline{1, s}$, блок i -го процесса, где $i = lc + q$, $i = \overline{1, n}$, $l \geq 0$, $q = \overline{1, c}$, закреплен за $(q + c(r - 1))$ -м процессором, $r = 1, \left\lceil \frac{p}{c} \right\rceil$. Тогда для выполнения n процессов достаточно взять $p = \left\lceil \frac{p}{c} \right\rceil s$ процессоров, а остальные $p - \left\lceil \frac{p}{c} \right\rceil s$ процессоров будут не задействованы.

Пусть $T^\varepsilon = [t_{ij}^\varepsilon]$ – $n \times s$ -матрица времен выполнения блоков программного ресурса каждым из i -х процессов с учетом параметра $\varepsilon > 0$, где $t_{ij}^\varepsilon = t_{ij} + \varepsilon$, $i = \overline{1, n}$, $j = \overline{1, s}$. Для вычисления минимального общего времени $T_n^{ac}(p, n, s, c)$ можно воспользоваться функционалом задачи Беллмана–Джонсона, который в нашем случае будет иметь вид:

$$T_n^{ac}(p, n, s, c) = \max_{1 \leq u_1 \leq u_2 \leq \dots \leq u_{s-1} \leq m} \left[\sum_{i=1}^{u_1} t_{q+(i-1)c, 1}^\varepsilon + \sum_{i=u_1}^{u_2} t_{q+(i-1)c, 2}^\varepsilon + \dots + \sum_{i=u_{s-1}}^m t_{q+(i-1)c, s}^\varepsilon \right], \quad (1)$$

где $m = \frac{n}{c}$, $t_{q+(i-1)c, j}^\varepsilon = t_{q+(i-1)c, j} + \varepsilon$, $q = \overline{1, c}$, $i = \overline{1, m}$, $j = \overline{1, s}$, а u_1, u_2, \dots, u_{s-1} – целые числа.

Пример 1. Рассмотрим интерпретацию формулы (1) на числовом примере. Пусть $p = 7$, $n = 6$, $s = 3$, $c = 2$, а времена выполнения блоков процессами

$$\text{заданы матрицей } T^\varepsilon = \begin{bmatrix} 3 & 1 & 4 \\ 2 & 2 & 1 \\ 1 & 3 & 3 \\ 4 & 1 & 2 \\ 3 & 2 & 1 \\ 1 & 4 & 1 \end{bmatrix}. \text{ Тогда } m = 3, \text{ следовательно, функционал (1)}$$

примет вид:

$$T_n^{ac} (p=7, n=6, s=3, c=2) = \\ = \max_{1 \leq u_1 \leq u_2 \leq 3} \left[\sum_{i=1}^{u_1} t_{q+(i-1)2,1}^\varepsilon + \sum_{i=u_1}^{u_2} t_{q+(i-1)2,2}^\varepsilon + \sum_{i=u_2}^3 t_{q+(i-1)2,3}^\varepsilon \right], \quad q = \overline{1,2}.$$

1) При $q=1$, имеем:

$$\max_{1 \leq u_1 \leq u_2 \leq 3} \left[\sum_{i=1}^{u_1} t_{q+(i-1)2,1}^\varepsilon + \sum_{i=u_1}^{u_2} t_{q+(i-1)2,2}^\varepsilon + \sum_{i=u_2}^3 t_{q+(i-1)2,3}^\varepsilon \right] = \\ = \max_{1 \leq u_1 \leq u_2 \leq 3} \left[\sum_{i=1}^{u_1} t_{2i-1,1}^\varepsilon + \sum_{i=u_1}^{u_2} t_{2i-1,2}^\varepsilon + \sum_{i=u_2}^3 t_{2i-1,3}^\varepsilon \right].$$

Если $u_1 = 1, u_2 = \overline{1,3}$, если $u_1 = 2, u_2 = 2,3$, если $u_1 = 3, u_2 = 3$, тогда:

$$\max_{1 \leq u_1 \leq u_2 \leq 3} \left[\sum_{i=1}^{u_1} t_{2i-1,1}^\varepsilon + \sum_{i=u_1}^{u_2} t_{2i-1,2}^\varepsilon + \sum_{i=u_2}^3 t_{2i-1,3}^\varepsilon \right] = \\ = \max \left[\begin{array}{l} \sum_{i=1}^1 t_{2i-1,1}^\varepsilon + \sum_{i=1}^3 t_{2i-1,2}^\varepsilon + \sum_{i=1}^3 t_{2i-1,3}^\varepsilon, \quad \sum_{i=1}^1 t_{2i-1,1}^\varepsilon + \sum_{i=1}^2 t_{2i-1,2}^\varepsilon + \sum_{i=2}^3 t_{2i-1,3}^\varepsilon, \\ \sum_{i=1}^1 t_{2i-1,1}^\varepsilon + \sum_{i=1}^3 t_{2i-1,2}^\varepsilon + \sum_{i=3}^3 t_{2i-1,3}^\varepsilon, \quad \sum_{i=1}^2 t_{2i-1,1}^\varepsilon + \sum_{i=2}^2 t_{2i-1,2}^\varepsilon + \sum_{i=2}^3 t_{2i-1,3}^\varepsilon, \\ \sum_{i=1}^2 t_{2i-1,1}^\varepsilon + \sum_{i=2}^3 t_{2i-1,2}^\varepsilon + \sum_{i=3}^3 t_{2i-1,3}^\varepsilon, \quad \sum_{i=1}^3 t_{2i-1,1}^\varepsilon + \sum_{i=3}^3 t_{2i-1,2}^\varepsilon + \sum_{i=3}^3 t_{2i-1,3}^\varepsilon \end{array} \right] = \\ = \max \left[\begin{array}{l} t_{1,1}^\varepsilon + t_{1,2}^\varepsilon + t_{1,3}^\varepsilon + t_{3,3}^\varepsilon + t_{5,3}^\varepsilon, \quad t_{1,1}^\varepsilon + t_{1,2}^\varepsilon + t_{3,2}^\varepsilon + t_{3,3}^\varepsilon + t_{5,3}^\varepsilon, \\ t_{1,1}^\varepsilon + t_{1,2}^\varepsilon + t_{3,2}^\varepsilon + t_{5,2}^\varepsilon + t_{5,3}^\varepsilon, \quad t_{1,1}^\varepsilon + t_{3,1}^\varepsilon + t_{3,2}^\varepsilon + t_{3,3}^\varepsilon + t_{5,3}^\varepsilon, \\ t_{1,1}^\varepsilon + t_{3,1}^\varepsilon + t_{3,2}^\varepsilon + t_{5,2}^\varepsilon + t_{5,3}^\varepsilon, \quad t_{1,1}^\varepsilon + t_{3,1}^\varepsilon + t_{5,1}^\varepsilon + t_{5,2}^\varepsilon + t_{5,3}^\varepsilon \end{array} \right] = \\ = \max \left[\begin{array}{l} \underline{3+1+4+3+1}, \quad 3+1+3+3+1, \\ 3+1+3+2+1, \quad 3+1+3+3+1, \\ 3+1+3+2+1, \quad 3+1+3+2+1 \end{array} \right] = \max[12,11,10,11,10,10] = 12.$$

2) При $q=2$, имеем:

$$\max_{1 \leq u_1 \leq u_2 \leq 3} \left[\sum_{i=1}^{u_1} t_{q+(i-1)2,1}^\varepsilon + \sum_{i=u_1}^{u_2} t_{q+(i-1)2,2}^\varepsilon + \sum_{i=u_2}^3 t_{q+(i-1)2,3}^\varepsilon \right] = \\ = \max_{1 \leq u_1 \leq u_2 \leq 3} \left[\sum_{i=1}^{u_1} t_{2i,1}^\varepsilon + \sum_{i=u_1}^{u_2} t_{2i,2}^\varepsilon + \sum_{i=u_2}^3 t_{2i,3}^\varepsilon \right].$$

Если $u_1 = 1, u_2 = \overline{1,3}$, если $u_1 = 2, u_2 = 2,3$, $u_1 = 3, u_2 = 3$, тогда:

$$\begin{aligned}
& \max_{1 \leq u_1 \leq u_2 \leq 3} \left[\sum_{i=1}^{u_1} t_{2i,1}^{\varepsilon} + \sum_{i=u_1}^{u_2} t_{2i,2}^{\varepsilon} + \sum_{i=u_2}^3 t_{2i,3}^{\varepsilon} \right] = \\
& = \max \left[\begin{array}{ccc} \sum_{i=1}^1 t_{2i,1}^{\varepsilon} + \sum_{i=1}^1 t_{2i,2}^{\varepsilon} + \sum_{i=1}^3 t_{2i,3}^{\varepsilon}, & \sum_{i=1}^1 t_{2i,1}^{\varepsilon} + \sum_{i=1}^2 t_{2i,2}^{\varepsilon} + \sum_{i=2}^3 t_{2i,3}^{\varepsilon}, \\ \sum_{i=1}^1 t_{2i,1}^{\varepsilon} + \sum_{i=1}^3 t_{2i,2}^{\varepsilon} + \sum_{i=3}^3 t_{2i,3}^{\varepsilon}, & \sum_{i=1}^2 t_{2i,1}^{\varepsilon} + \sum_{i=2}^2 t_{2i,2}^{\varepsilon} + \sum_{i=2}^3 t_{2i,3}^{\varepsilon}, \\ \sum_{i=1}^2 t_{2i,1}^{\varepsilon} + \sum_{i=2}^3 t_{2i,2}^{\varepsilon} + \sum_{i=3}^3 t_{2i,3}^{\varepsilon}, & \sum_{i=1}^3 t_{2i,1}^{\varepsilon} + \sum_{i=3}^3 t_{2i,2}^{\varepsilon} + \sum_{i=3}^3 t_{2i,3}^{\varepsilon} \end{array} \right] = \\
& = \max \left[\begin{array}{cc} t_{2,1}^{\varepsilon} + t_{2,2}^{\varepsilon} + t_{2,3}^{\varepsilon} + t_{4,3}^{\varepsilon} + t_{6,3}^{\varepsilon}, & t_{2,1}^{\varepsilon} + t_{2,2}^{\varepsilon} + t_{4,2}^{\varepsilon} + t_{4,3}^{\varepsilon} + t_{6,3}^{\varepsilon}, \\ t_{2,1}^{\varepsilon} + t_{2,2}^{\varepsilon} + t_{4,2}^{\varepsilon} + t_{6,2}^{\varepsilon} + t_{6,3}^{\varepsilon}, & t_{2,1}^{\varepsilon} + t_{4,1}^{\varepsilon} + t_{4,2}^{\varepsilon} + t_{4,3}^{\varepsilon} + t_{6,3}^{\varepsilon}, \\ t_{2,1}^{\varepsilon} + t_{4,1}^{\varepsilon} + t_{4,2}^{\varepsilon} + t_{6,2}^{\varepsilon} + t_{6,3}^{\varepsilon}, & t_{2,1}^{\varepsilon} + t_{4,1}^{\varepsilon} + t_{6,1}^{\varepsilon} + t_{6,2}^{\varepsilon} + t_{6,3}^{\varepsilon} \end{array} \right] = \\
& = \max \left[\begin{array}{cc} \underline{2+2+1+2+1}, & \underline{2+2+1+2+1}, \\ \underline{2+2+1+4+1}, & \underline{2+4+1+2+1}, \\ \underline{2+4+1+4+1}, & \underline{2+4+1+4+1} \end{array} \right] = \max[8,8,10,10,12,12] = 12.
\end{aligned}$$

Следовательно, минимальное общее время выполнения $n = 6$ неоднородных распределенных взаимодействующих конкурирующих процессов, использующих $c = 2$ копии структурированного на $s = 3$ блока программного ресурса, в многопроцессорной системе с $p = 7$ процессорами в асинхронном режиме составит $T_n^{ac}(p, n, s, c) = 12$. При этом будет использовано 6 процессоров.

Рассмотрим алгоритм, который позволяет решить задачу определения минимального общего времени $T_n^{ac}(p, n, s, c)$ выполнения неоднородных распределенных конкурирующих процессов в асинхронном режиме значительно эффективнее.

По заданным $s, c, m = \frac{n}{c}$ и матрице $T^{\varepsilon} = [t_{q+(i-1)c, j}^{\varepsilon}]$, $q = \overline{1, c}$, $i = \overline{1, m}$, $j = \overline{1, s}$, строим c -слойный вершинно-взвешенный граф G_1^c . Каждый q -й, $q = \overline{1, c}$, слой графа G_1^c состоит из вершин $t_{q+(i-1)c, j}^{\varepsilon}$, $i = \overline{1, m}$, $j = \overline{1, s}$, которые расположены в узлах прямоугольной $m \times s$ -решетки, причем t_{q1}^{ε} – входные вершины, $t_{q+t, s}^{\varepsilon}$ – выходные, $q = \overline{1, c}$, $t = (m-1)c$ (Рис.4). Дуги в каждом слое q отражают линейный порядок выполнения блоков Q_j , $j = \overline{1, s}$, программного ресурса каждым из $(q+(i-1)c)$ -м процессом, $q = \overline{1, c}$, $i = \overline{1, m}$, а также линейный

порядок использования каждого блока всеми t процессами, Таким образом, имеет место следующая теорема.

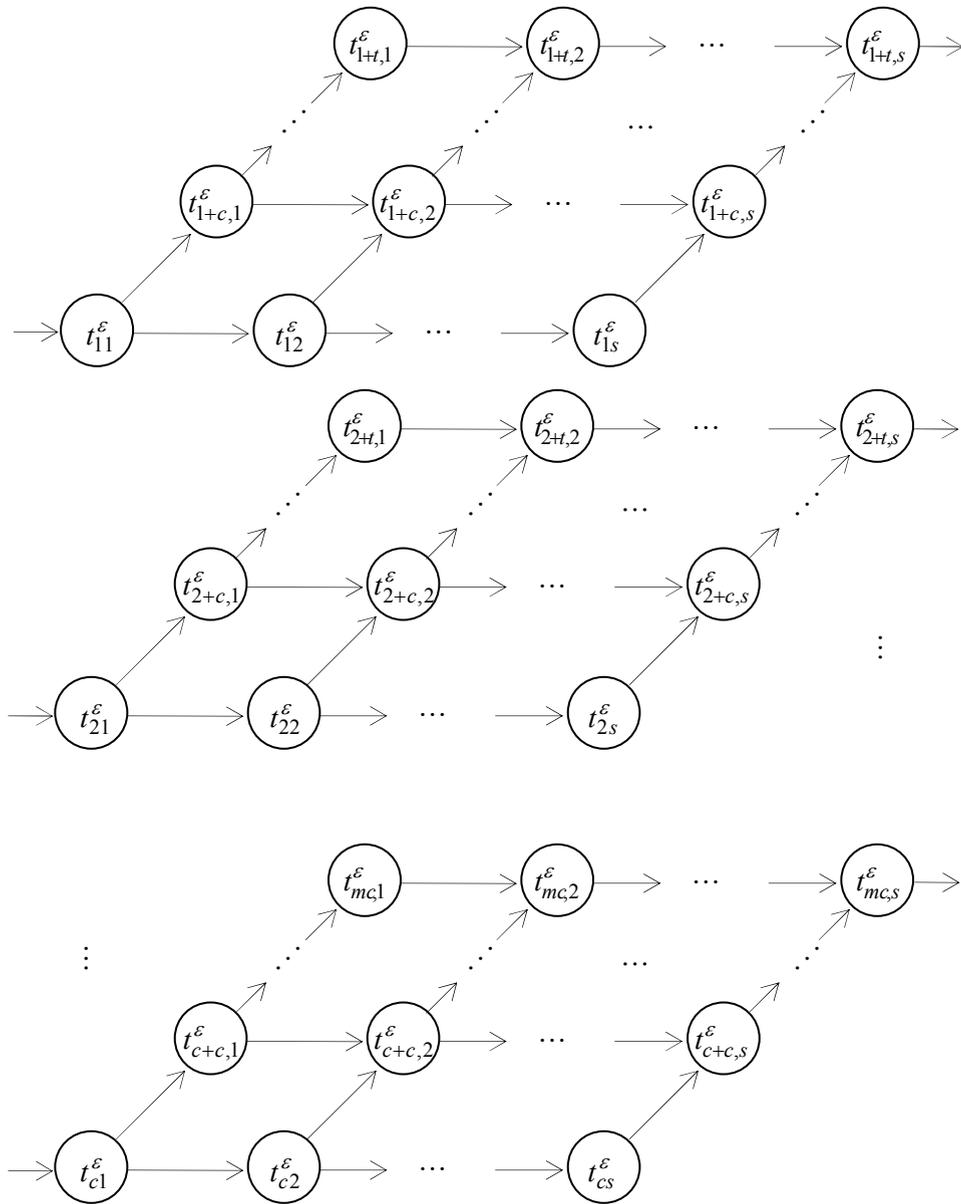


Рис.4. Граф G_1^c

Теорема 1. Минимальное общее время выполнения $n = tc$, $t \geq 2$, неоднородных распределенных конкурирующих процессов, использующих $2 \leq c \leq p$ копии структурированного на $2 \leq s \leq \left\lfloor \frac{p}{c} \right\rfloor$ блока программного ресурса

с временами выполнения блоков с учетом дополнительных системных расходов $[t_{ij}^\varepsilon]$, $i = \overline{1, n}$, $j = \overline{1, s}$, в многопроцессорной системе с p , $\left[\frac{p}{c} \right] \geq 2$, процессорами в асинхронном режиме определяется длиной критического пути в c -слойном вершинно-взвешенном графе G_1^c из начальной вершины $t_{q_1}^\varepsilon$ в конечную $t_{q+(m-1)c, s}^\varepsilon$, $q = \overline{1, c}$, $m = \frac{n}{c}$.

Пример 2. Используя данные примера 1, найти минимальное общее время $T_n^{ac}(p, n, s, c)$, используя алгоритм нахождения критического пути в c -слойном вершинно-взвешенном графе G_1^c .

По заданным $n = 6$, $s = 3$, и матрице T^ε строим 2-слойный ($c = 2$) вершинно-взвешенный граф G_1^c (Рис.5). Каждый слой содержит ms вершин, где $m = n/c = 3$. Длина критического пути в графе равна 12, что совпадает с минимальным общим временем, полученном в примере 1.

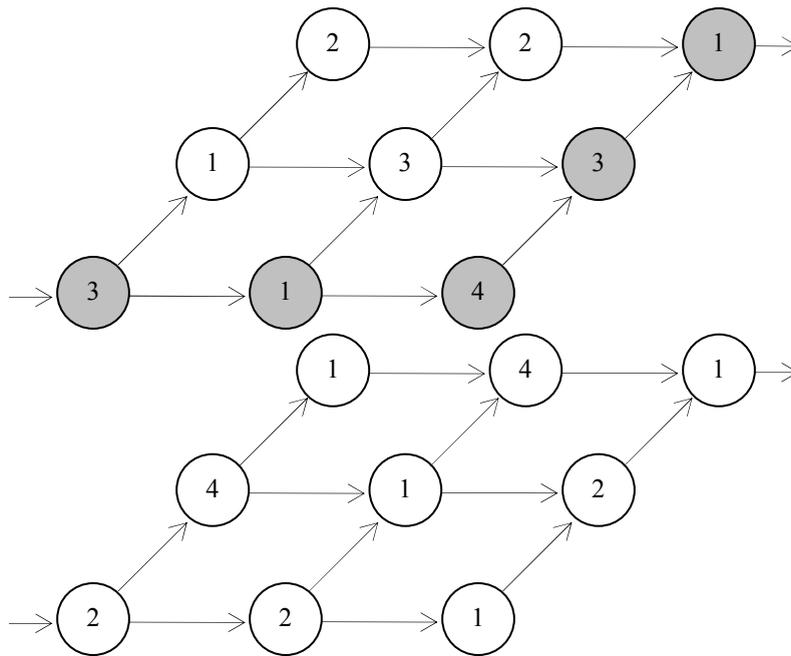


Рис.5. c -слойный вершинно-взвешенный граф G_1^c

4. Время выполнения однородных и одинаково распределенных конкурирующих процессов

Согласно определению 2 систему распределенных конкурирующих процессов будем считать *однородной*, если времена выполнения каждого

блока $Q_j, j = \overline{1, s}$, каждым из процессов равны, т.е. $t_{ij}^\varepsilon = t_j^\varepsilon, i = \overline{1, n}, j = \overline{1, s}$.

На Рис.6 представлена диаграмма Ганта, иллюстрирующая выполнение однородных распределенных конкурирующих процессов при ограниченном числе копий программного ресурса в МС с параметрами: $p = 7, n = 4, s = 3,$

$$c = 2, T^\varepsilon = \begin{bmatrix} 3 & 1 & 4 \\ 3 & 1 & 4 \\ 3 & 1 & 4 \\ 3 & 1 & 4 \end{bmatrix}.$$

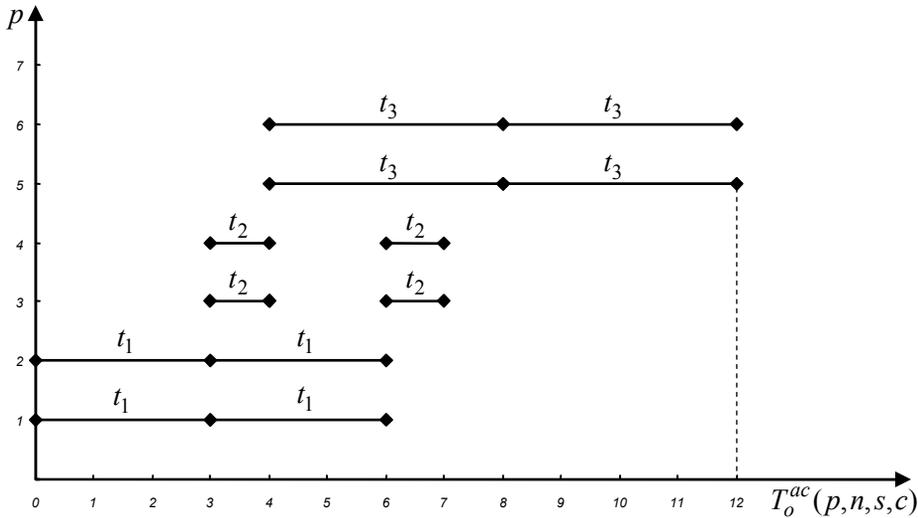


Рис.6. Асинхронный режим – однородные процессы

Оценим общее время выполнения n однородных распределенных конкурирующих процессов в асинхронном режиме, использующих c копий структурированного программного ресурса. Пусть $(t_1^\varepsilon, t_2^\varepsilon, \dots, t_s^\varepsilon)$ – длительности выполнения каждого из блоков $Q_j, j = \overline{1, s}$, программного ресурса с учетом накладных расходов $\varepsilon, t_j^\varepsilon = t_j + \varepsilon, j = \overline{1, s}$. Обозначим длительность выполнения всего программного ресурса каждым из процессов через

$$T_\varepsilon^s = \sum_{j=1}^s t_j^s.$$

Покажем, что в этих условиях вычисление общего времени $T_o^{ac}(p, n, s, c)$ в случае неограниченного параллелизма сводится к нахождению общего времени выполнения однородных распределенных процессов при одной копии структурированного программного ресурса. При $n = mc, m \geq 2, 2 \leq c \leq p,$ выполнение c копий структурированного программного ресурса в асинхронном

режиме равносильно выполнению s групп по m процессов, конкурирующих за использование одной копии программного ресурса на $\left\lceil \frac{p}{c} \right\rceil$ процессорах.

В силу формулы вычисления общего времени выполнения n однородных конкурирующих процессов, использующих одну копию структурированного программного ресурса, полученной в [1,4], и с учетом того, что $n = mc$, $m \geq 2$, $2 \leq c \leq p$, получаем:

$$T_o^{ac}(p, mc, s, c) = T_o^{ac}\left(\left\lceil \frac{p}{c} \right\rceil, m, s, 1\right) = T_\varepsilon^s + (m-1) \max_{1 \leq j \leq s} t_j^\varepsilon.$$

Матрица времен выполнения блоков программного ресурса в этом случае будет иметь размерность $n \times s$ и состоять из n одинаковых строк.

Рассмотрим систему *одинаково распределенных* конкурирующих процессов. Времена выполнения всех блоков рассматриваемой системы с учетом накладных расходов ε каждым из i -х процессов совпадают и равны t_i^ε , т. е. справедлива цепочка равенств $t_{i1}^\varepsilon = t_{i2}^\varepsilon = \dots = t_{is}^\varepsilon = t_i^\varepsilon$, для всех $i = \overline{1, n}$.

На Рис.7 представлена диаграмма Ганта выполнения одинаково распределенных конкурирующих процессов в МС с параметрами: $p = 7$, $n = 4$,

$s = 3$, $c = 2$, $T^\varepsilon = \begin{bmatrix} 3 & 3 & 3 \\ 4 & 4 & 4 \\ 2 & 2 & 2 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$, в случае *неограниченного* $\left(s \leq \left\lceil \frac{p}{c} \right\rceil\right)$ параллелизма.

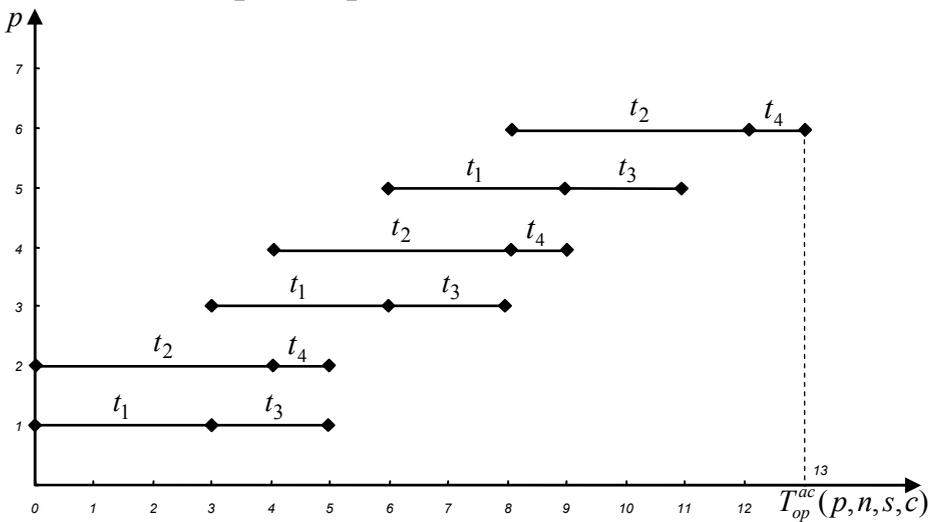


Рис.7. Асинхронный режим – одинаково распределенные процессы

Обозначим через $T_\varepsilon^q = \sum_{i=1}^m t_{q+(i-1)c}^\varepsilon$ – суммарное время выполнения каждого из блоков Q_j , $j = \overline{1, s}$, всеми m процессами из q -й группы, а $t_{\max}^q = \max_{1 \leq i \leq m} t_{q+(i-1)c}^\varepsilon$ – максимальное время выполнения блока из этой группы, $q = \overline{1, c}$. Справедлива следующая теорема.

Теорема 3. *Минимальное общее время выполнения n , $n \geq 2$, одинаково распределенных конкурирующих процессов, использующих структурированный на s , $s \geq 2$, блоков программный ресурс в многопроцессорной системе с p , $p \geq 2$, процессорами в асинхронном режиме при ограниченном числе копий программного ресурса составляет величину $T_{op}^{ac}(p, n, s, c)$, равную*

$$T_{op}^{ac}(p, n, s, c) = \max_{1 \leq q \leq c} (T_\varepsilon^q + (s-1)t_{\max}^q).$$

Для доказательства воспользуемся функционалом (1) задачи Беллмана–Джонсона, который для системы m одинаково распределенных конкурирующих процессов из q -й группы примет вид:

$$\begin{aligned} T_n^{ac}(p, n, s, c) &= \max_{1 \leq u_1 \leq u_2 \leq \dots \leq u_{s-1} \leq m} \left[\sum_{i=1}^{u_1} t_{q+(i-1)c}^\varepsilon + \sum_{i=u_1}^{u_2} t_{q+(i-1)c}^\varepsilon + \dots + \sum_{i=u_{s-1}}^m t_{q+(i-1)c}^\varepsilon \right] = \\ &= T_\varepsilon^q + (s-1)t_{\max}^q, \end{aligned}$$

где $m = \frac{n}{c}$, $t_{q+(i-1)c}^\varepsilon = t_{q+(i-1)c} + \varepsilon$, $q = \overline{1, c}$, $i = \overline{1, m}$, u_1, u_2, \dots, u_{s-1} – целые числа.

4. Заключение

В заключении отметим, что рассмотренное обобщение математической модели с одним программным ресурсом (конвейером) на случай ограниченного числа программных ресурсов позволяет установить взаимосвязи мультиконвейерной обработки с аналогичной обработкой при одном программном конвейере, получить аналитические оценки общего времени выполнения конкурирующих процессов при ограниченном параллелизме и провести математическое исследование эффективности и оптимальности мультиконвейерной организации конкурирующих процессов, вскрыть потенциальные возможности роста ускорения вычислений, выполнить сравнительный анализ различных режимов такой обработки.

ЛИТЕРАТУРА

1. Коваленко Н.С., Метельский В.М. О времени реализации конкурирующих процессов при распределенной обработке. // Кибернетика и системный анализ. – 1996. – №1. – С. 54–64.

2. Коваленко Н.С., Метельский В.М. Режимы взаимодействия неоднородных распределенных конкурирующих процессов // Кибернетика и системный анализ. – 1997. – №3. – С. 31–43.
3. Иванников В.П., Коваленко Н.С., Метельский В.М. О минимальном времени реализации распределенных конкурирующих процессов в синхронных режимах // Программирование. – 2000. – №5. – С. 44–52.
4. Павлов П.А. О времени реализации систем параллельных распределенных процессов // Вестник Полесского государственного университета. – 2008. – №1. – С. 60–67.
5. Коваленко Н.С., Павлов П.А. Эффективность и оптимальность структурирования программных ресурсов при распределенной обработке // Труды минского института управления. – 2005. – №1. – С. 104–107.
6. Павлов П.А. Анализ режимов организации одинаково распределенных конкурирующих процессов // Вестник БГУ. Сер. 1: Физ.Мат.Информ. – 2006. – №1. – С. 116–120.
7. Павлов П.А. Сравнительный анализ одинаково распределенных конкурирующих процессов с учетом дополнительных системных расходов // Вестник Фонда фундаментальных исследований. – 2006. – №1. – С. 55–58.
8. Капитонова Ю.В., Коваленко Н.С., Павлов П.А. Оптимальность систем одинаково распределенных конкурирующих процессов // Кибернетика и системный анализ. – 2005. – №6. – С. 3–10.
9. Коваленко Н.С., Павлов П.А. Эффективность систем конкурирующих процессов с учетом накладных расходов // Доклады НАН Беларуси. Сер. физ.–мат. наук. – 2005. – №6. – С. 32–36.
10. Коваленко Н.С., Павлов П.А. Системы одинаково распределенных конкурирующих процессов в условиях ограниченного параллелизма и их оптимальность // Доклады НАН Беларуси. Сер. физ.–мат. наук. – 2006. – №2. – С. 25–29.
11. Yu.V. Kapitonova, N.S. Kovalenko, P.A. Pavlov, Optimality of systems of identically distributed competing processes, Cybernetics and Systems Analysis. – New York: Springer, 2006. – P. 793–799.

Наукове видання

**Вісник Харківського національного університету
№926**

Серія: «Математичне моделювання. Інформаційні технології.
Автоматизовані системи управління».

Випуск 15.

Збірник наукових праць

Українською, російською та англійською мовами

Комп'ютерне верстання А.В. Гахов

Підписано до друку 17.12.2010 р.

Формат 70×108/16. Папір офсетний. Друк ризограф.

Ум. друк. арк. – 15,05

Обл. – вид. арк. – 17,5

Тираж 100 пр.

Ціна договірна

61077, м. Харків, пл. Свободи, 4
Харківський національний університет імені В.Н. Каразіна.

Надруковано: ФОП «Петрова І.В.»
61144 м. Харків-144, вул. Гв. Широнінців, 79в, к. 137
Тел.: 362-01-52
Свідоцтво про державну реєстрацію ВОО №948011 від 03.01.03