

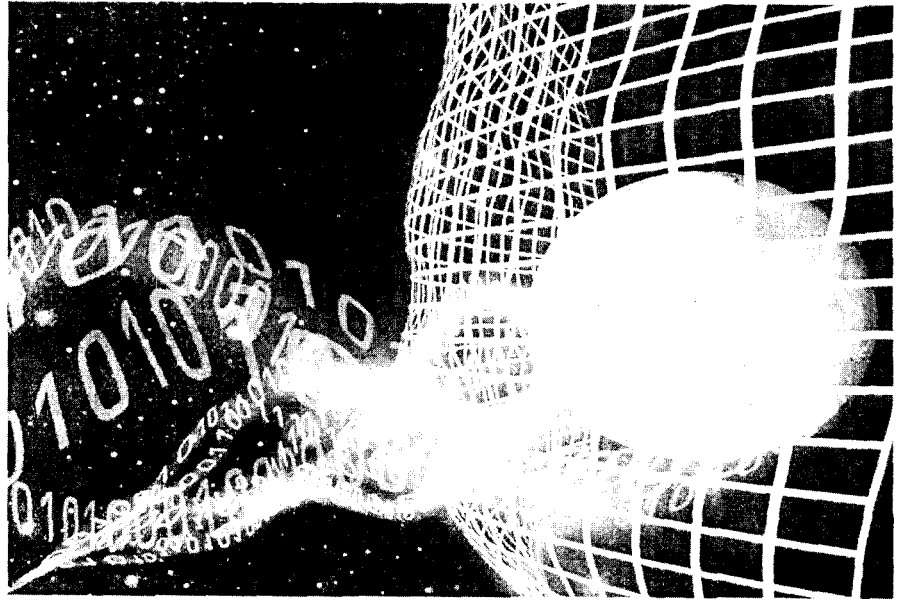


Индекс 70463



ISSN 0023-1274

Институт кибернетики им. В.М. Глушкова НАН Украины



Международный  
научно-теоретический  
журнал

ISSN 0023-1274. Кибернетика и системный анализ. 2012 № 1. 1-192

**КИБЕРНЕТИКА И СИСТЕМНЫЙ АНАЛИЗ 1 2012**

# КИБЕРНЕТИКА И СИСТЕМНЫЙ АНАЛИЗ

1 2012



# КИБЕРНЕТИКА И СИСТЕМНЫЙ АНАЛИЗ

Том 48 № 1 ЯНВАРЬ — ФЕВРАЛЬ 2012

МЕЖДУНАРОДНЫЙ  
НАУЧНО-ТЕОРЕТИЧЕСКИЙ ЖУРНАЛ  
ИНСТИТУТА КИБЕРНЕТИКИ им. В.М. ГЛУШКОВА  
НАН УКРАИНЫ  
ОСНОВАН В ЯНВАРЕ 1965 ГОДА

## СОДЕРЖАНИЕ

### СИСТЕМНЫЙ АНАЛИЗ

<b>Наум Зуселевич Шор</b> . . . . .	<b>3</b>
<b>Сергиенко И.В., Стецюк П.И.</b> О трех научных идеях Н.З. Шора	<b>4</b>
<b>Глазунов Н.М.</b> Арифметическое моделирование случайных процессов и $t$ -алгоритмы . . . . .	<b>23</b>
<b>Березовский О.А.</b> О точности двойственных оценок для квадратичных экстремальных задач . . . . .	<b>33</b>
<b>Ясинский В.К., Довгунь А.Я., Ясинский Е.В.</b> Оптимальная линейная фильтрация для систем стохастических дифференциальных уравнений с пуассоновскими возмущениями . . . . .	<b>40</b>
<b>Фомин-Шаташвили А.А., Фомина Т.А., Шаташвили А.Д.</b> Об эквивалентности вероятностных мер, порожденных решениями нелинейных эволюционных дифференциальных уравнений в гильбертовом пространстве, возмущенных гауссовскими процессами. II . . . . .	<b>49</b>
<b>Зак Ю.А.</b> Построение допустимых и оптимальных расписаний выполнения работ на одной машине . . . . .	<b>62</b>
<b>Кирик Е.Е., Клименко В.М., Остапенко В.В.</b> Методы нахождения динамических потоков в сетях с обобщенным законом Кирхгофа . . . . .	<b>83</b>

### КИБЕРНЕТИКА

<b>Михайлюк В.А., Сергиенко И.В.</b> Реоптимизация обобщенных проблем о выполнимости с аппроксимационно-устойчивыми предикатами . . . . .	<b>89</b>
---	-----------

© ИНСТИТУТ  
КИБЕРНЕТИКИ  
им. В.М. ГЛУШКОВА  
НАН УКРАИНЫ, 2012.

Свидетельство  
о регистрации  
КВ № 1331 от 22.03.95

<b>Коваленко Н.С., Павлов П.А., Овсеец М.И.</b> Асинхронные распределенные вычисления при ограниченном числе копий структурированного программного ресурса . . . . .	<b>105</b>
<b>Маслянюк П.П., Майстренко А.С.</b> Система сущностей бизнес-моделей организационных систем . . . . .	<b>118</b>
<b>Грубый А.М.</b> Автоматные реализации процесса порождения последовательности Коллатца . . . . .	<b>129</b>
<b>Алиев Р.Т. , Ханиев Т.А.</b> О скорости сходимости в асимптотическом разложении для эргодического распределения полумарковской модели управления типа $(s,S)$ . . . . .	<b>138</b>
<b>ПРОГРАММНО-ТЕХНИЧЕСКИЕ КОМПЛЕКСЫ</b>	
<b>Адуцкевич Е.В., Лиходед Н.А., Сикорский А.О.</b> К распараллеливанию последовательных программ: распределение массивов между процессорами и структуризация коммуникаций	<b>144</b>
<b>Никоненко А.А.</b> Порождающие паттерны проектирования в компьютерной лингвистике: Factory Method, Prototype, Singleton	<b>163</b>
<b>НОВЫЕ СРЕДСТВА КИБЕРНЕТИКИ, ИНФОРМАТИКИ, ВЫЧИСЛИТЕЛЬНОЙ ТЕХНИКИ И СИСТЕМНОГО АНАЛИЗА</b>	
<b>Рачковский Д.А., Мисуно И.С., Слипченко С.В.</b> Рандомизированные проекционные методы формирования бинарных разреженных векторных представлений . . . . .	<b>175</b>
<b>РЕЦЕНЗИИ НА НОВЫЕ КНИГИ . . . . .</b>	<b>188</b>

Научные редакторы: **В.Б. Белова, Г.В. Яроцкая, Л.И. Лесько, А.М. Ковалевская**  
Набор и компьютерная верстка: **Н.Б. Шишкина, А.Ю. Чижевская, Е.И. Нагорный**

Подписано и сдано в печать 25.11.2011. Формат 70x108/16.  
Бум. офсетная. Офсетн. печ. Уч.-изд. л. 17. Тираж 450 экз. Заказ № 153.

Напечатано на полиграфическом участке  
Института кибернетики им. В.М. Глушкова НАН Украины.  
03680, ГСП, Киев–187, проспект Академика Глушкова, 40.

**ГЛАВНЫЙ РЕДАКТОР**

**И.В. СЕРГИЕНКО,** академик  
НАН Украины

**РЕДАКЦИОННАЯ КОЛЛЕГИЯ**

**И.Н. КОВАЛЕНКО,** зам. главного  
редактора, академик  
НАН Украины

**Н.С. ФУРС** зам. главного  
редактора

**А.В. АНИСИМОВ,** чл.-кор.  
НАН Украины

**В.С. ДЕЙНЕКА,** академик  
НАН Украины

**Г.А. ДОНЕЦ,** доктор физ.-мат. наук

**Ю.М. ЕРМОЛЬЕВ,** академик  
НАН Украины

**М.З. ЗГУРОВСКИЙ,** академик  
НАН Украины

**В.С. КОРОЛЮК,** академик  
НАН Украины

**В.М. КУНЦЕВИЧ,** академик  
НАН Украины

**А.А. ЛЕТИЧЕВСКИЙ,** академик  
НАН Украины

**В.Н. РЕДЬКО,** академик  
НАН Украины

**МЕЖДУНАРОДНЫЙ  
РЕДАКЦИОННЫЙ СОВЕТ**

**Д. БАУМ,** профессор, Германия

**Ж. БОННИН,** профессор, Франция

**А.Д. ГВИШАНИ,** академик РАН

**Д. ГИЛЬБЕРТ,** профессор, Англия

**Ф. ГЛОВЕР,** профессор, США

**В.А. ЕМЕЛИЧЕВ,** профессор, Беларусь

**Ю.И. ЖУРАВЛЕВ,** академик РАН

**А.Б. КУРЖАНСКИЙ,** академик РАН

**В.Л. МАКАРОВ,** академик РАН

**А. ПАКШТАС,** профессор, Англия

**П.М. ПАРДАЛОС,** профессор, США

**Э.Х. ТЫГУГУ,** академик  
АН Эстонии

**АДРЕС РЕДАКЦИИ:**

03680, ГСП, Киев 187  
Проспект Академика Глушкова, 40  
Институт кибернетики им. В.М. Глушкова  
НАН Украины  
Телефоны: +38(044) 526-00-59, 526-64-61  
Факс: +38(044) 526-74-18  
E-mail: [kisa-casa@ukr.net](mailto:kisa-casa@ukr.net)  
<http://www.kibernetika.org>

Журнал публикует оригинальные и обзорные статьи, материалы проблемного и дискуссионного характера, отчеты о конференциях и совещаниях по вопросам кибернетики и системного анализа, библиографические обзоры, рецензии на монографии, информирует читателей о новейших достижениях отечественной и зарубежной кибернетики.

**Основные тематические разделы:**

**КИБЕРНЕТИКА**

Теоретические проблемы кибернетики  
Проектирование кибернетических систем  
Проблемы искусственного интеллекта  
Экономическая кибернетика

**СИСТЕМНЫЙ АНАЛИЗ**

Теория систем и математические вопросы системного анализа  
Теория оптимальных решений  
Прикладные методы системного анализа

**ПРОГРАММНО-ТЕХНИЧЕСКИЕ  
КОМПЛЕКСЫ**

Архитектура программно-технических комплексов  
Математическое и программное обеспечение  
Новые информационные технологии в медицине, биологии, лингвистике, юриспруденции и др.

**НОВЫЕ СРЕДСТВА КИБЕРНЕТИКИ,  
ИНФОРМАТИКИ, ВЫЧИСЛИТЕЛЬНОЙ  
ТЕХНИКИ И СИСТЕМНОГО АНАЛИЗА**

**ДИСКУССИОННЫЕ СООБЩЕНИЯ**

ЖУРНАЛ ПЕРЕИЗДАЕТСЯ В США  
НА АНГЛИЙСКОМ ЯЗЫКЕ ИЗДАТЕЛЬСТВОМ  
**Springer** ПОД НАЗВАНИЕМ  
**CYBERNETICS AND SYSTEMS ANALYSIS**

Информация для авторов на сайте  
<http://www.springeronline.com/10559>

Журнал *Cybernetics and Systems Analysis* реферируется или индексируется агентствами ABI/INFORM, Academic OneFile, Academic Search, Compendex, CompuScience, Computer Abstracts International Database, Computer Science Index, Current Abstracts, Current Index to Statistics, Digital Mathematics Registry, EBSCO, Gale, Google Scholar, INIS Atomindex, Inspec, io-port.net, Mathematical Reviews, OCLC, SCOPUS, Summon by Serial Solutions, Zentralblatt Math.

Журнал включен в перечень научных профильных изданий Украины в раздел «Технические и математические науки» и реферируется в Реферативном журнале и Базах данных ВИНТИ, Москва, Россия,  
тел.: (0-07-495) 155-42-17

## АСИНХРОННЫЕ РАСПРЕДЕЛЕННЫЕ ВЫЧИСЛЕНИЯ ПРИ ОГРАНИЧЕННОМ ЧИСЛЕ КОПИЙ СТРУКТУРИРОВАННОГО ПРОГРАММНОГО РЕСУРСА

**Ключевые слова:** *распределенный конкурирующий процесс, программный ресурс, асинхронный режим, синхронный режим, ограниченный параллелизм, неограниченный параллелизм, однородная система, одинаково распределенная система.*

### ВВЕДЕНИЕ

Во многих приложениях, связанных с проектированием многопроцессорных систем (МС), вычислительных комплексов (ВК), системного и прикладного программного обеспечения [1], оптимальной организации параллельных вычислительных процессов, значительный интерес представляют задачи, когда множество конкурирующих процессов могут использовать не одну, а несколько копий структурированного программного ресурса (ПР). Случай, когда в общей памяти многопроцессорной системы имеется одна копия ПР, с различных позиций изучен в работах [2–8]. При этом были решены задачи нахождения минимального общего времени выполнения распределенных конкурирующих процессов, использующих структурированный на блоки программный ресурс в различных режимах взаимодействия процессов, процессоров и блоков [2–6], получены критерии эффективности и оптимальности структурирования программных ресурсов [7], проведен сравнительный анализ режимов взаимодействия процессов, процессоров и блоков [8], решен ряд оптимизационных задач по расчету числа процессов, минимального числа процессоров и др. Изучение этих и других задач, относящихся к оптимальной организации параллельных вычислений, приобретает особую актуальность в случае, когда в общей памяти МС могут быть одновременно размещены  $c \geq 2$  копий программного ресурса. Такое обобщение носит принципиальный характер, поскольку отражает основные черты мультиконвейерной обработки, а также позволяет сравнить эффективность конвейерной и параллельной обработки.

В настоящей статье строится и исследуется математическая модель организации конкурирующих процессов, использующих ограниченное число копий программного ресурса. При этом, используя идеи метода структурирования программных ресурсов на блоки с их последующей конвейеризацией по процессам и процессорам, исследуются оптимальные временные характеристики такой организации.

### 1. МАТЕМАТИЧЕСКАЯ МОДЕЛЬ РАСПРЕДЕЛЕННЫХ ВЫЧИСЛЕНИЙ ПРИ ОГРАНИЧЕННОМ ЧИСЛЕ КОПИЙ ПРОГРАММНОГО РЕСУРСА

Конструктивными элементами для построения математических моделей систем распределенных вычислений являются понятия процесса и программного ресурса.

Процесс будем рассматривать как последовательность блоков (команд, процедур)  $Q_1, Q_2, \dots, Q_s$ , для выполнения которых используется множество процессоров (процессорных узлов, обрабатывающих устройств, интеллектуальных клиентов). При этом процесс называется распределенным, если все блоки или часть из них обрабатываются разными процессорами [2]. Для ускорения выполнения

процессов вычисления могут обрабатываться параллельно, взаимодействуя путем обмена информацией. Такие процессы называются кооперативными или взаимодействующими процессами.

Понятие ресурса применяется для обозначения любых объектов вычислительной системы, которые могут быть использованы процессами для своего выполнения. Реентерабельные (многократно используемые) ресурсы характеризуются возможностью одновременного использования несколькими вычислительными процессами. Для параллельных систем характерной является ситуация, когда одну и ту же последовательность блоков или ее часть необходимо процессорам выполнять многократно. Такую последовательность будем называть программным ресурсом, а множество соответствующих процессов — конкурирующими.

Математическая модель распределенной обработки конкурирующих взаимодействующих процессов при ограниченном числе копий программного ресурса включает  $p, p \geq 2$ , процессоров многопроцессорной системы, которые имеют доступ к общей памяти;  $n, n \geq 2$ , распределенных конкурирующих процессов;  $s, s \geq 2$ , блоков структурированного программного ресурса; матрицу  $T = [t_{ij}]$ ,  $i = \overline{1, n}, j = \overline{1, s}$ , времен выполнения блоков программного ресурса распределенными взаимодействующими конкурирующими процессами;  $2 \leq c \leq p$ , число копий структурированного на блоки программного ресурса, которые могут одновременно находиться в оперативной памяти, доступной для всех  $p$  процессоров, причем  $\left\lceil \frac{p}{c} \right\rceil \geq 2$ ;  $\varepsilon > 0$  — параметр, характеризующий время дополнительных системных расходов, связанных с организацией конвейерного режима использования блоков структурированного программного ресурса множеством взаимодействующих конкурирующих процессов при распределенной обработке.

Будем также предполагать, что число процессов  $n$  кратно числу копий  $c$  структурированного программного ресурса, т.е.  $n = mc, m \geq 2$ , при этом взаимодействие процессов, процессоров и блоков программного ресурса подчинено следующим условиям:

- 1) ни один из процессоров не может обрабатывать одновременно более одного блока;
- 2) процессы выполняются в параллельно-конвейерном режиме группами, т.е. осуществляется одновременное (параллельное) выполнение  $c$  копий каждого блока в сочетании с конвейеризацией групп из  $c$  блоков по процессорам и процессам;
- 3) обработка каждого блока программного ресурса осуществляется без прерываний;
- 4) распределение блоков программного ресурса по процессорам для каждого процесса  $i = lc + q, i = \overline{1, n}, l \geq 0, q = \overline{1, c}$ , осуществляется циклически по правилу: блок с номером  $j = k \left\lceil \frac{p}{c} \right\rceil + r, j = \overline{1, s}, k \geq 0, r = \overline{1, \left\lceil \frac{p}{c} \right\rceil}$ , распределяется на процессор с номером  $q + c(r - 1)$ .

Введем следующие режимы взаимодействия процессов, процессоров и блоков с учетом наличия  $c$  копий программного ресурса:

- 1) асинхронный режим, при котором начало выполнения очередной группы из  $c$  копий блока  $Q_j, j = \overline{1, s}$ , определяется наличием  $c$  процессоров и готовностью этой группы блоков к выполнению (программный блок считается готовым к выполнению, если он не выполняется ни на одном из процессоров);
- 2) первый синхронный режим, обеспечивающий линейный порядок выполнения блоков программного ресурса внутри каждого процесса без задержек, т.е.

для каждого процесса  $i = lc + q$ ,  $i = \overline{1, n}$ ,  $l \geq 0$ ,  $q = \overline{1, c}$ , момент завершения выполнения  $j$ -го блока на  $(q + c(r-1))$ -м процессоре совпадает с моментом начала выполнения следующего  $(j+1)$ -го блока на  $(q + cr)$ -м процессоре,  $j = \overline{1, s-1}$ ,

$$r = 1, \left\lceil \frac{p}{c} \right\rceil;$$

3) второй синхронный режим, при котором  $c$  копий каждого блока непрерывно переходит по группам из  $c$  процессоров, т.е. момент окончания обработки  $c$  копий текущего блока совпадает с моментом начала их обработки на следующей группе из  $c$  процессоров.

На рис. 1–3 представлены диаграммы Ганта, иллюстрирующие выполнение  $n = 4$  распределенных конкурирующих процессов, использующих  $c = 2$  копии структурированного программного ресурса в МС с  $p = 7$  процессорами в рассмотренных выше режимах и с заданной матрицей времен выполнения блоков ПР с учетом дополнительных системных расходов

$$\text{дов } T^E = \begin{bmatrix} 3 & 1 & 4 \\ 2 & 2 & 1 \\ 1 & 3 & 3 \\ 4 & 1 & 2 \end{bmatrix}.$$

**Определение 1.** Система  $n$  распределенных конкурирующих процессов называется неоднородной, если времена выполнения блоков программного ресурса  $Q_1, Q_2, \dots, Q_s$  зависят от объемов

обрабатываемых данных и/или их структуры, т.е. разные для разных процессов.

**Определение 2.** Систему распределенных конкурирующих процессов будем называть однородной, если времена выполнения  $Q_j$ -го блока каждым  $i$ -м процессом равны между собой, т.е.  $t_{ij} = t_j$ ,  $i = \overline{1, n}$ ,  $j = \overline{1, s}$ .

**Определение 3.** Систему конкурирующих процессов будем называть одинаково распределенной, если времена  $t_{ij}$  выполнения блоков  $Q_j$ ,  $j = \overline{1, s}$ , программного ресурса каждым  $i$ -м процессом совпадают и равны  $t_i$  для всех  $i = \overline{1, n}$ , т.е. справедлива цепочка равенств  $t_{i1} = t_{i2} = \dots = t_{is} = t_i$  для всех  $i = \overline{1, n}$ .

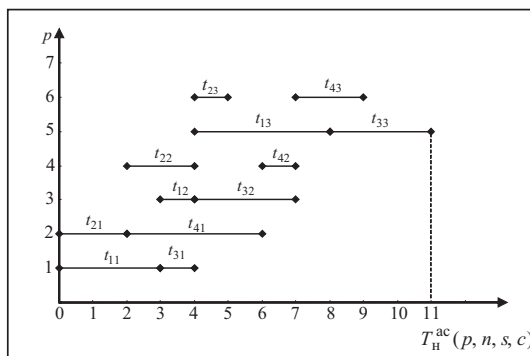


Рис. 1. Диаграмма асинхронного режима

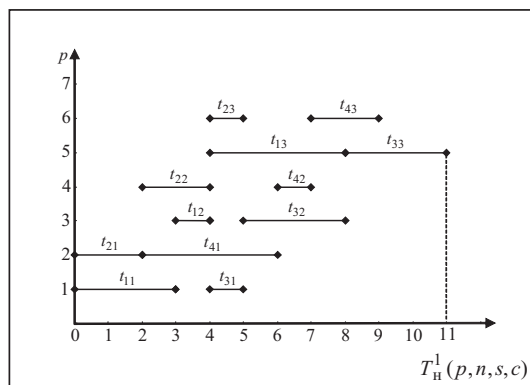


Рис. 2. Диаграмма первого синхронного режима

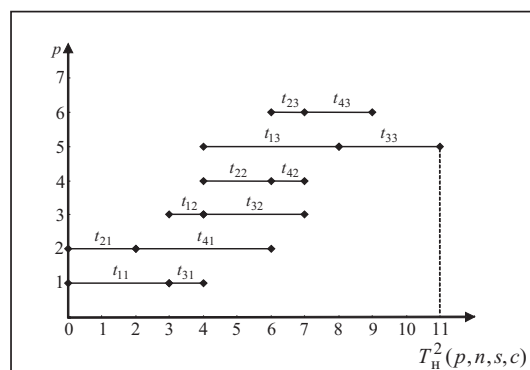


Рис. 3. Диаграмма второго синхронного режима

**2. МИНИМАЛЬНОЕ ОБЩЕЕ ВРЕМЯ ВЫПОЛНЕНИЯ НЕОДНОРОДНЫХ РАСПРЕДЕЛЕННЫХ ПРОЦЕССОВ В АСИНХРОННОМ РЕЖИМЕ ПРИ ДОСТАТОЧНОМ ЧИСЛЕ ПРОЦЕССОРОВ**

Обозначим  $T_H^{ac}(p, n, s, c)$  минимальное общее время выполнения  $n$  неоднородных распределенных конкурирующих процессов при ограниченном числе  $c$  копий программного ресурса в многопроцессорной системе с  $p$  процессорами в асинхронном режиме с учетом параметра  $\varepsilon$ . Для вычисления  $T_H^{ac}(p, n, s, c)$  рассмотрим случаи неограниченного ( $s \leq \left\lfloor \frac{p}{c} \right\rfloor$ ) и ограниченного ( $s > \left\lfloor \frac{p}{c} \right\rfloor$ ) параллелизма.

Пусть имеется система  $n = mc$ ,  $m \geq 2$ ,  $2 \leq c \leq p$ , неоднородных распределенных конкурирующих процессов, причем число блоков  $s$  структурированного программного ресурса не превосходит числа групп процессоров по  $c$  процессоров в каждой, т.е.  $2 \leq s \leq \left\lfloor \frac{p}{c} \right\rfloor$ . В этом случае без ограничения общности можно считать, что каждый  $Q_j$ -й,  $j = \overline{1, s}$ , блок  $i$ -го процесса, где  $i = lc + q$ ,  $i = \overline{1, n}$ ,  $l \geq 0$ ,  $q = \overline{1, c}$ , закреплен за  $(q + c(r-1))$ -м процессором,  $r = \overline{1, \left\lfloor \frac{p}{c} \right\rfloor}$ . Тогда для выполнения  $n$  процессов достаточно взять  $p = \left\lfloor \frac{p}{c} \right\rfloor s$  процессоров, а остальные  $p - \left\lfloor \frac{p}{c} \right\rfloor s$  процессоров будут незадействованы.

Пусть  $T^\varepsilon = [t_{ij}^\varepsilon]$  —  $n \times s$ -матрица времен выполнения блоков программного ресурса каждым  $i$ -м процессом с учетом параметра  $\varepsilon > 0$ , где  $t_{ij}^\varepsilon = t_{ij} + \varepsilon$ ,  $i = \overline{1, n}$ ,  $j = \overline{1, s}$ . Для вычисления минимального общего времени  $T_H^{ac}(p, n, s, c)$  можно воспользоваться функционалом задачи Беллмана–Джонсона, который в данном случае будет иметь вид

$$T_H^{ac}(p, n, s, c) = \max_{1 \leq u_1 \leq u_2 \leq \dots \leq u_{s-1} \leq m} \left[ \sum_{i=1}^{u_1} t_{q+(i-1)c,1}^\varepsilon + \sum_{i=u_1}^{u_2} t_{q+(i-1)c,2}^\varepsilon + \dots + \sum_{i=u_{s-1}}^m t_{q+(i-1)c,s}^\varepsilon \right], \quad (1)$$

где  $m = \frac{n}{c}$ ,  $t_{q+(i-1)c,j}^\varepsilon = t_{q+(i-1)c,j} + \varepsilon$ ,  $q = \overline{1, c}$ ,  $i = \overline{1, m}$ ,  $j = \overline{1, s}$ , а  $u_1, u_2, \dots, u_{s-1}$  — целые числа.

**Пример 1.** Рассмотрим интерпретацию формулы (1) на числовом примере. Пусть  $p = 7$ ,  $n = 6$ ,  $s = 3$ ,  $c = 2$ , а времена выполнения блоков процессами заданы

матрицей  $T^\varepsilon = \begin{bmatrix} 3 & 1 & 4 \\ 2 & 2 & 1 \\ 1 & 3 & 3 \\ 4 & 1 & 2 \\ 3 & 2 & 1 \\ 1 & 4 & 1 \end{bmatrix}$ . Тогда  $m = 3$ ; следовательно, функционал (1) примет вид

$$T_H^{ac}(p = 7, n = 6, s = 3, c = 2) = \max_{1 \leq u_1 \leq u_2 \leq 3} \left[ \sum_{i=1}^{u_1} t_{q+(i-1)2,1}^\varepsilon + \sum_{i=u_1}^{u_2} t_{q+(i-1)2,2}^\varepsilon + \sum_{i=u_2}^3 t_{q+(i-1)2,3}^\varepsilon \right], \quad q = \overline{1, 2}.$$



При  $q = 1$  имеем

$$\begin{aligned} & \max_{1 \leq u_1 \leq u_2 \leq 3} \left[ \sum_{i=1}^{u_1} t_{q+(i-1)2,1}^\varepsilon + \sum_{i=u_1}^{u_2} t_{q+(i-1)2,2}^\varepsilon + \sum_{i=u_2}^3 t_{q+(i-1)2,3}^\varepsilon \right] = \\ & = \max_{1 \leq u_1 \leq u_2 \leq 3} \left[ \sum_{i=1}^{u_1} t_{2i-1,1}^\varepsilon + \sum_{i=u_1}^{u_2} t_{2i-1,2}^\varepsilon + \sum_{i=u_2}^3 t_{2i-1,3}^\varepsilon \right]. \end{aligned}$$

Если  $u_1 = 1$ , то  $u_2 = \overline{1, 3}$ ; если  $u_1 = 2$ , то  $u_2 = 2, 3$ ; если  $u_1 = 3$ , то  $u_2 = 3$ . Тогда

$$\begin{aligned} & \max_{1 \leq u_1 \leq u_2 \leq 3} \left[ \sum_{i=1}^{u_1} t_{2i-1,1}^\varepsilon + \sum_{i=u_1}^{u_2} t_{2i-1,2}^\varepsilon + \sum_{i=u_2}^3 t_{2i-1,3}^\varepsilon \right] = \\ & = \max \left[ \begin{array}{ccc} \sum_{i=1}^1 t_{2i-1,1}^\varepsilon + \sum_{i=1}^1 t_{2i-1,2}^\varepsilon + \sum_{i=1}^3 t_{2i-1,3}^\varepsilon, & \sum_{i=1}^1 t_{2i-1,1}^\varepsilon + \sum_{i=1}^2 t_{2i-1,2}^\varepsilon + \sum_{i=2}^3 t_{2i-1,3}^\varepsilon, \\ \sum_{i=1}^1 t_{2i-1,1}^\varepsilon + \sum_{i=1}^3 t_{2i-1,2}^\varepsilon + \sum_{i=3}^3 t_{2i-1,3}^\varepsilon, & \sum_{i=1}^2 t_{2i-1,1}^\varepsilon + \sum_{i=2}^2 t_{2i-1,2}^\varepsilon + \sum_{i=2}^3 t_{2i-1,3}^\varepsilon, \\ \sum_{i=1}^2 t_{2i-1,1}^\varepsilon + \sum_{i=2}^3 t_{2i-1,2}^\varepsilon + \sum_{i=3}^3 t_{2i-1,3}^\varepsilon, & \sum_{i=1}^3 t_{2i-1,1}^\varepsilon + \sum_{i=3}^2 t_{2i-1,2}^\varepsilon + \sum_{i=3}^3 t_{2i-1,3}^\varepsilon \end{array} \right] = \\ & = \max \left[ \begin{array}{ccc} t_{1,1}^\varepsilon + t_{1,2}^\varepsilon + t_{1,3}^\varepsilon + t_{3,3}^\varepsilon + t_{5,3}^\varepsilon, & t_{1,1}^\varepsilon + t_{1,2}^\varepsilon + t_{3,2}^\varepsilon + t_{3,3}^\varepsilon + t_{5,3}^\varepsilon, \\ t_{1,1}^\varepsilon + t_{1,2}^\varepsilon + t_{3,2}^\varepsilon + t_{5,2}^\varepsilon + t_{5,3}^\varepsilon, & t_{1,1}^\varepsilon + t_{3,1}^\varepsilon + t_{3,2}^\varepsilon + t_{3,3}^\varepsilon + t_{5,3}^\varepsilon, \\ t_{1,1}^\varepsilon + t_{3,1}^\varepsilon + t_{3,2}^\varepsilon + t_{5,2}^\varepsilon + t_{5,3}^\varepsilon, & t_{1,1}^\varepsilon + t_{3,1}^\varepsilon + t_{5,1}^\varepsilon + t_{5,2}^\varepsilon + t_{5,3}^\varepsilon \end{array} \right] = \\ & = \max \left[ \begin{array}{ccc} [3+1+4+3+1, 3+1+3+3+1], \\ [3+1+3+2+1, 3+1+3+3+1], \\ [3+1+3+2+1, 3+1+3+2+1] \end{array} \right] = \max [12, 11, 10, 11, 10, 10] = 12. \end{aligned}$$

При  $q = 2$  имеем

$$\begin{aligned} & \max_{1 \leq u_1 \leq u_2 \leq 3} \left[ \sum_{i=1}^{u_1} t_{q+(i-1)2,1}^\varepsilon + \sum_{i=u_1}^{u_2} t_{q+(i-1)2,2}^\varepsilon + \sum_{i=u_2}^3 t_{q+(i-1)2,3}^\varepsilon \right] = \\ & = \max_{1 \leq u_1 \leq u_2 \leq 3} \left[ \sum_{i=1}^{u_1} t_{2i,1}^\varepsilon + \sum_{i=u_1}^{u_2} t_{2i,2}^\varepsilon + \sum_{i=u_2}^3 t_{2i,3}^\varepsilon \right]. \end{aligned}$$

Если  $u_1 = 1$ , то  $u_2 = \overline{1, 3}$ ; если  $u_1 = 2$ , то  $u_2 = 2, 3$ ; если  $u_1 = 3$ , то  $u_2 = 3$ . Тогда

$$\begin{aligned} & \max_{1 \leq u_1 \leq u_2 \leq 3} \left[ \sum_{i=1}^{u_1} t_{2i,1}^\varepsilon + \sum_{i=u_1}^{u_2} t_{2i,2}^\varepsilon + \sum_{i=u_2}^3 t_{2i,3}^\varepsilon \right] = \\ & = \max \left[ \begin{array}{ccc} \sum_{i=1}^1 t_{2i,1}^\varepsilon + \sum_{i=1}^1 t_{2i,2}^\varepsilon + \sum_{i=1}^3 t_{2i,3}^\varepsilon, & \sum_{i=1}^1 t_{2i,1}^\varepsilon + \sum_{i=1}^2 t_{2i,2}^\varepsilon + \sum_{i=2}^3 t_{2i,3}^\varepsilon, \\ \sum_{i=1}^1 t_{2i,1}^\varepsilon + \sum_{i=1}^3 t_{2i,2}^\varepsilon + \sum_{i=3}^3 t_{2i,3}^\varepsilon, & \sum_{i=1}^2 t_{2i,1}^\varepsilon + \sum_{i=2}^2 t_{2i,2}^\varepsilon + \sum_{i=2}^3 t_{2i,3}^\varepsilon, \\ \sum_{i=1}^2 t_{2i,1}^\varepsilon + \sum_{i=2}^3 t_{2i,2}^\varepsilon + \sum_{i=3}^3 t_{2i,3}^\varepsilon, & \sum_{i=1}^3 t_{2i,1}^\varepsilon + \sum_{i=3}^2 t_{2i,2}^\varepsilon + \sum_{i=3}^3 t_{2i,3}^\varepsilon \end{array} \right] = \end{aligned}$$

$$= \max \begin{bmatrix} t_{2,1}^\varepsilon + t_{2,2}^\varepsilon + t_{2,3}^\varepsilon + t_{4,3}^\varepsilon + t_{6,3}^\varepsilon, & t_{2,1}^\varepsilon + t_{2,2}^\varepsilon + t_{4,2}^\varepsilon + t_{4,3}^\varepsilon + t_{6,3}^\varepsilon, \\ t_{2,1}^\varepsilon + t_{2,2}^\varepsilon + t_{4,2}^\varepsilon + t_{6,2}^\varepsilon + t_{6,3}^\varepsilon, & t_{2,1}^\varepsilon + t_{4,1}^\varepsilon + t_{4,2}^\varepsilon + t_{4,3}^\varepsilon + t_{6,3}^\varepsilon, \\ t_{2,1}^\varepsilon + t_{4,1}^\varepsilon + t_{4,2}^\varepsilon + t_{6,2}^\varepsilon + t_{6,3}^\varepsilon, & t_{2,1}^\varepsilon + t_{4,1}^\varepsilon + t_{6,1}^\varepsilon + t_{6,2}^\varepsilon + t_{6,3}^\varepsilon \end{bmatrix} =$$

$$\max \begin{bmatrix} 2+2+1+2+1, & 2+2+1+2+1, \\ 2+2+1+4+1, & 2+4+1+2+1, \\ 2+4+1+4+1, & 2+4+1+4+1 \end{bmatrix} = \max [8, 8, 10, 10, 12, 12] = 12.$$

(Подчеркнутая сумма обозначает максимальное время выполнения.)

Следовательно, минимальное общее время выполнения  $n = 6$  неоднородных распределенных взаимодействующих конкурирующих процессов, использующих  $c = 2$  копии структурированного на  $s = 3$  блока программного ресурса, в многопроцессорной системе с  $p = 7$  процессорами в асинхронном режиме составит  $T_H^{ac}(p, n, s, c) = 12$ . При этом будет использовано шесть процессоров.

Рассмотрим алгоритм, который позволяет решить задачу определения минимального общего времени  $T_H^{ac}(p, n, s, c)$  выполнения неоднородных распределенных конкурирующих процессов в асинхронном режиме более эффективно.

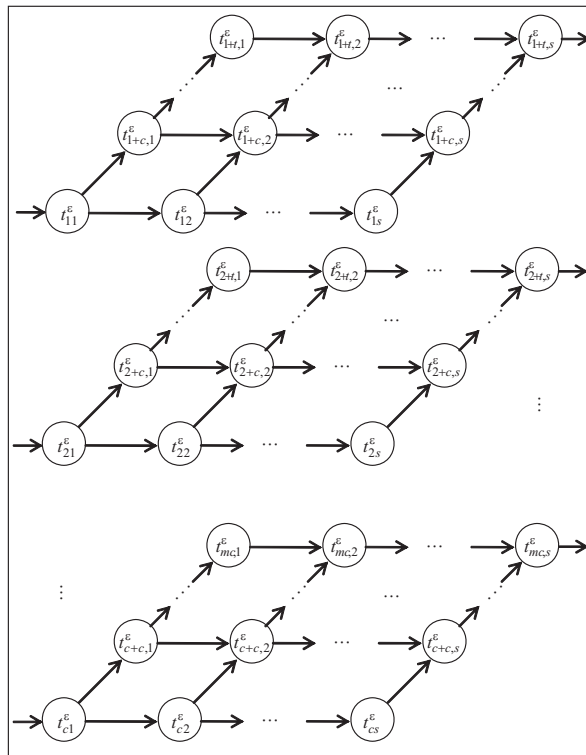


Рис. 4. Граф  $G_1^c$

По заданным  $s, c, m = \frac{n}{c}$  и матрице  $T^\varepsilon = [t_{q+(i-1)c,j}^\varepsilon]$ ,  $q = \overline{1, c}, i = \overline{1, m}, j = \overline{1, s}$ , строим  $c$ -слойный вершинно-взвешенный граф  $G_1^c$ . Каждый  $q$ -й,  $q = \overline{1, c}$ , слой графа  $G_1^c$  состоит из вершин  $t_{q+(i-1)c,j}^\varepsilon$ ,  $i = \overline{1, m}, j = \overline{1, s}$ , которые расположены в узлах прямоугольной  $m \times s$ -решетки, причем  $t_{q1}^\varepsilon$  — входные вершины,  $t_{q+t,s}^\varepsilon$  — выходные,  $q = \overline{1, c}, t = (m-1)c$  (рис. 4). Дуги в каждом слое  $q$  отражают линейный порядок выполнения блоков  $Q_j, j = \overline{1, s}$ , программного ресурса каждым  $(q+(i-1)c)$ -м процессором,  $q = \overline{1, c}, i = \overline{1, m}$ , а также

линейный порядок использования каждого блока всеми  $m$  процессами. Таким образом, имеет место следующая теорема.

**Теорема 1.** Минимальное общее время выполнения  $n = mc, m \geq 2$ , неоднородных распределенных конкурирующих процессов, использующих  $2 \leq c \leq p$  копии структурированного на  $2 \leq s \leq \left\lfloor \frac{p}{c} \right\rfloor$  блока программного ресурса с временами

выполнения блоков при учете дополнительных системных расходов  $[t_{ij}^\varepsilon]$ ,  $i = \overline{1, n}$ ,  $j = \overline{1, s}$ , в многопроцессорной системе с  $p$ ,  $\left[\frac{p}{c}\right] \geq 2$ , процессорами в асинхронном режиме определяется длиной критического пути в  $c$ -слойном вершинно-взвешенном графе  $G_1^c$  из начальной вершины  $t_{q1}^\varepsilon$  в конечную  $t_{q+(m-1)c,s}^\varepsilon$ ,  $q = \overline{1, c}$ ,  $m = \frac{n}{c}$ .

**Пример 2.** Используя данные примера 1, найти минимальное общее время  $T_n^{ac}(p, n, s, c)$ , используя алгоритм нахождения критического пути в  $c$ -слойном вершинно-взвешенном графе  $G_1^c$ .

По заданным  $n = 6$ ,  $s = 3$  и матрице  $T^\varepsilon$  строим 2-слойный ( $c = 2$ ) вершинно-взвешенный граф  $G_1^c$  (рис. 5). Каждый слой

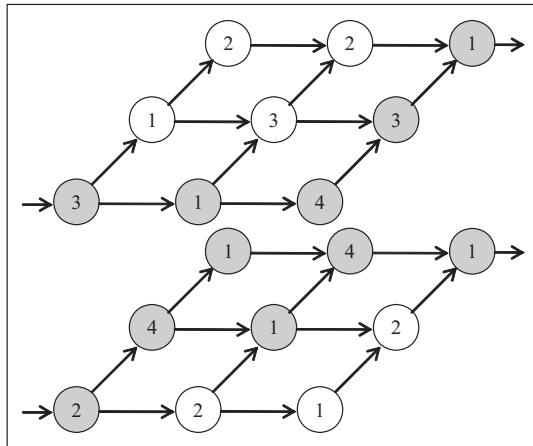


Рис. 5.  $c$ -слойный вершинно-взвешенный граф  $G_1^c$

содержит  $ms$  вершин, где  $m = n/c = 3$ . Длина критического пути в графе равна 12, что совпадает с минимальным общим временем, полученным в примере 1.

### 3. АСИНХРОННЫЙ РЕЖИМ ВЫПОЛНЕНИЯ РАСПРЕДЕЛЕННЫХ КОНКУРИРУЮЩИХ ПРОЦЕССОВ В УСЛОВИЯХ ОГРАНИЧЕННОГО ПАРАЛЛЕЛИЗМА

Рассмотрим случай ограниченного параллелизма, т.е. когда число блоков структурированного программного ресурса больше числа групп, имеющих по  $c$  процессоров, т.е.  $s > \left[\frac{p}{c}\right]$ ,  $s = k \left[\frac{p}{c}\right] + r$ ,  $k \geq 1$ ,  $1 \leq r < \left[\frac{p}{c}\right]$ .

Как и в случае, когда в общей памяти МС имеется одна копия программного ресурса, множество из  $s$  блоков разобьем на  $(k+1)$  группу по  $\left[\frac{p}{c}\right]$  блока в каждой, за исключением  $(k+1)$ -й группы, которая содержит  $r$  блоков [6]. Тогда матрицу  $T^\varepsilon = [t_{ij}^\varepsilon]$ ,  $i = \overline{1, n}$ ,  $j = 1, \left(k \left[\frac{p}{c}\right] + r\right)$ , времен выполнения блоков разбиваем на  $(k+1)$  подматрицу  $T_l^\varepsilon$ ,  $l = \overline{1, k+1}$ , размера  $n \times \left[\frac{p}{c}\right]$  каждая, за исключением последней  $T_{k+1}^\varepsilon$ , которая будет содержать при  $s$ , не кратном  $\left[\frac{p}{c}\right]$ , только  $r$  столбцов, а остальные  $\left[\frac{p}{c}\right] - r$  столбцов будут нулевыми. По каждой подматрице  $T_l^\varepsilon$ ,  $l = \overline{1, k+1}$ , строим  $(k+1)$ -ю линейную диаграмму Ганта, каждая из которых отображает во времени выполнение очередных  $\left[\frac{p}{c}\right]$  блоков структурированного программного ресурса на  $p \left[\frac{p}{c}\right]$  процессорах всеми  $n$  процессами, использующи-

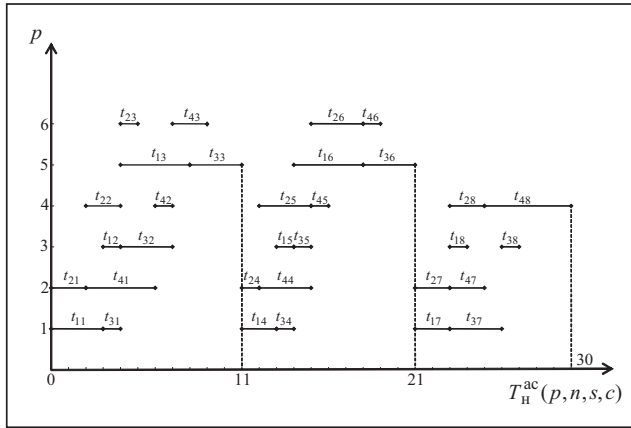


Рис. 6. Несовмещенная диаграмма Ганта

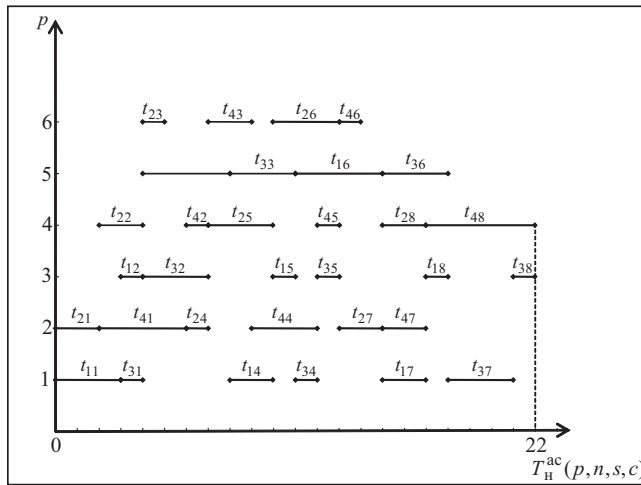


Рис. 7. Совмещенная диаграмма Ганта

ми ограниченное число  $c$  копий структурированного программного ресурса. При  $r \neq 0$   $(k+1)$ -я диаграмма будет отражать выполнение последних  $r$  блоков на  $cr$  процессорах. На рис. 6 представлена диаграмма Ганта для МС с параметрами  $p = 7, n = 4, s = 3, c = 2$ ,

$$T^\varepsilon = \begin{bmatrix} 3 & 1 & 4 & 2 & 1 & 4 & 2 & 1 \\ 2 & 2 & 1 & 1 & 3 & 3 & 2 & 2 \\ 1 & 3 & 3 & 1 & 1 & 3 & 3 & 1 \\ 4 & 1 & 2 & 3 & 1 & 1 & 2 & 5 \end{bmatrix}.$$

Суммарное время выполнения всех процессов, использующих  $c$  копий ПР, в этом случае будет определяться как сумма длин критических путей в каждой из последовательно идущих несовмещенных диаграмм Ганта. Однако это время можно сократить, если последовательно поблочко совмещать диаграммы Ганта, начиная со второй диаграммы, по оси времени справа налево на максимально воз-

можную величину, не нарушая технологических условий асинхронного режима. В результате совмещения получим результирующую совмещенную диаграмму Ганта (рис. 7).

В работе [6] показано, что полученная структура результирующей совмещенной диаграммы Ганта определяется представленной ниже матрицей  $T^*$ , которая состоит из подматриц  $T_1^\varepsilon, T_2^\varepsilon, \dots, T_{k+1}^\varepsilon$ . В матрице  $T^*$  учтены как все горизонтальные, так и все вертикальные связи между блоками, а также связи между блоками из разных диаграмм Ганта. Отметим также, что результирующая матрица  $T^*$  будет иметь размер  $(k+1)n \times (k+1) \left[ \frac{P}{c} \right]$ , считаться блочной, симметрич-

ной, верхней диагональной относительно второй диагонали, типа Ганкелевой порядка  $k+1$ :

$$T^* = \begin{bmatrix} T_1^\varepsilon & T_2^\varepsilon & T_3^\varepsilon & \dots & T_k^\varepsilon & T_{k+1}^\varepsilon \\ T_2^\varepsilon & T_3^\varepsilon & T_4^\varepsilon & \dots & T_{k+1}^\varepsilon & 0 \\ T_3^\varepsilon & T_4^\varepsilon & T_5^\varepsilon & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ T_k^\varepsilon & T_{k+1}^\varepsilon & 0 & \dots & 0 & 0 \\ T_{k+1}^\varepsilon & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad (2)$$

где подматрицы  $T_l^\varepsilon$  и  $T_{k+1}^\varepsilon$  имеют вид

$$T_l^\varepsilon = \begin{bmatrix} t^\varepsilon & & & \\ 1, (l-1) \left[ \frac{p}{c} \right] + 1 & t^\varepsilon & & \dots & t^\varepsilon \\ & 1, (l-1) \left[ \frac{p}{c} \right] + 2 & & & 1, l \left[ \frac{p}{c} \right] \\ t^\varepsilon & t^\varepsilon & & \dots & t^\varepsilon \\ 2, (l-1) \left[ \frac{p}{c} \right] + 1 & 2, (l-1) \left[ \frac{p}{c} \right] + 2 & & & 2, l \left[ \frac{p}{c} \right] \\ & \vdots & & \ddots & \vdots \\ t^\varepsilon & t^\varepsilon & & \dots & t^\varepsilon \\ n, (l-1) \left[ \frac{p}{c} \right] + 1 & n, (l-1) \left[ \frac{p}{c} \right] + 2 & & & n, l \left[ \frac{p}{c} \right] \end{bmatrix}, \quad l = \overline{1, k},$$

$$T_{k+1}^\varepsilon = \begin{bmatrix} t^\varepsilon & & & & 0 & \dots & 0 \\ 1, k \left[ \frac{p}{c} \right] + 1 & t^\varepsilon & & \dots & t^\varepsilon & & 0 \\ & 1, k \left[ \frac{p}{c} \right] + 2 & & & 1, k \left[ \frac{p}{c} \right] + r & & 0 \\ t^\varepsilon & t^\varepsilon & & \dots & t^\varepsilon & & 0 \\ 2, k \left[ \frac{p}{c} \right] + 1 & 2, k \left[ \frac{p}{c} \right] + 2 & & & 2, k \left[ \frac{p}{c} \right] + r & & 0 \\ & \vdots & & \ddots & \vdots & & \vdots \\ t^\varepsilon & t^\varepsilon & & \dots & t^\varepsilon & & 0 \\ n, k \left[ \frac{p}{c} \right] + 1 & n, k \left[ \frac{p}{c} \right] + 2 & & & n, k \left[ \frac{p}{c} \right] + r & & 0 \end{bmatrix}.$$

С помощью матрицы  $T^*$  построим  $c$ -слойный вершинно-взвешенный граф  $G_2^c$ , аналогичный графу  $G_1^c$ . Вершинам каждого слоя  $q$  размера  $(k+1)m \times (k+1) \left[ \frac{p}{c} \right]$  графа  $G_2^c$  будут приписаны веса  $t_{q+(i-1)c, j}^\varepsilon$ ,  $q = \overline{1, c}$ ,  $i = \overline{1, (k+1)m}$ ,  $j = \overline{1, s}$ . Вершины  $t_{q1}^\varepsilon$  будут входными, а  $t_{q+(k+1)m-1, c, s}^\varepsilon$  — выходными,  $q = \overline{1, c}$ . Имеет место следующая теорема.

**Теорема 2.** Минимальное общее время  $T_{\text{H}}^{\text{ac}}(p, n, s, c)$  выполнения  $n$ ,  $n \geq 2$ , неоднородных распределенных конкурирующих процессов, использующих линейно структурированный на  $s$ ,  $s \geq 2$ , блоков программный ресурс, с временами выполнения блоков при учете дополнительных системных расходов  $\varepsilon > 0$ , задаваемых матрицей  $T^\varepsilon = [t_{ij}^\varepsilon]$ ,  $i = \overline{1, n}$ ,  $j = \overline{1, s}$ , в многопроцессорной системе с  $p$ ,  $p \geq 2$ , процессорами и  $c \geq 2$  копиями структурированного программного ресурса ( $\left[ \frac{p}{c} \right] \geq 2$ ) в асинхронном режиме в случае неограниченного параллелизма ( $s > \left[ \frac{p}{c} \right]$ ) определяется длиной критического пути из начальной вершины  $t_{q1}^\varepsilon$  в конечную вершину  $t_{q+(k+1)m-1, c, s}^\varepsilon$ ,  $q = \overline{1, c}$ , графа  $G_2^c$ .

**Пример 3.** Используя значения параметров диаграммы Ганта, изображенной на рис. 6, найти минимальное общее время  $T_{\text{H}}^{\text{ac}}(p, n, s, c)$ , применяя алгоритм нахождения критического пути в  $c$ -слойном вершинно-взвешенном графе  $G_2^c$ .

Так как  $\left[ \frac{p}{c} \right] = 3$ , то  $8 = s = k \left[ \frac{p}{c} \right] + r = 2 \cdot 3 + 2$ ; следовательно,  $k = 2$ ,  $r = 2$ . Матрицу  $T^\varepsilon$  разбиваем на подматрицы  $T_l^\varepsilon$ ,  $l = \overline{1, 3}$ , размера  $4 \times 3$  каждая. Матрица  $T^*$  будет размера  $(k+1)n \times (k+1) \left[ \frac{p}{c} \right] = 12 \times 9$  и иметь следующий вид:

$$T^* = \begin{bmatrix} \begin{bmatrix} 3 & 1 & 4 \\ 2 & 2 & 1 \\ 1 & 3 & 3 \\ 4 & 1 & 2 \end{bmatrix} & \begin{bmatrix} 2 & 1 & 4 \\ 1 & 3 & 3 \\ 1 & 1 & 3 \\ 3 & 1 & 1 \end{bmatrix} & \begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 2 & 2 & 0 \\ 3 & 1 & 0 \\ 2 & 5 & 0 \end{bmatrix} \\ \begin{bmatrix} 2 & 1 & 4 \\ 1 & 3 & 3 \\ 1 & 1 & 3 \\ 3 & 1 & 1 \end{bmatrix} & \begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 2 & 2 & 0 \\ 3 & 1 & 0 \\ 2 & 5 & 0 \end{bmatrix} & \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \\ \begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 2 & 2 & 0 \\ 3 & 1 & 0 \\ 2 & 5 & 0 \end{bmatrix} & \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} & \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \end{bmatrix}.$$

Построим по матрице  $T^*$  2-слойный вершинно-взвешенный граф  $G_2^c$  (рис. 8). Длина критического пути равна 22.

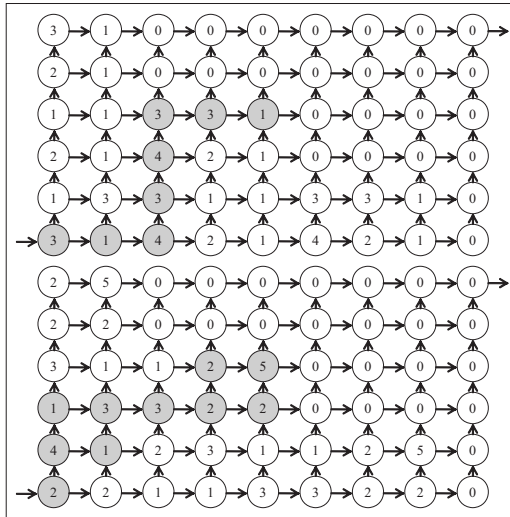


Рис. 8. Граф  $G_2^c$

#### 4. ВРЕМЯ ВЫПОЛНЕНИЯ ОДНОРОДНЫХ И ОДИНАКОВО РАСПРЕДЕЛЕННЫХ КОНКУРИРУЮЩИХ ПРОЦЕССОВ

Согласно определению 2 систему распределенных конкурирующих процессов будем считать однородной, если времена выполнения каждого блока  $Q_j$ ,  $j = \overline{1, s}$ , каждым процессом равны, т.е.  $t_{ij}^\varepsilon = t_j^\varepsilon$ ,  $i = \overline{1, n}$ ,  $j = \overline{1, s}$ .

На рис. 9 представлена диаграмма Ганта, иллюстрирующая выполнение однородных распределенных конкурирующих процессов при ограниченном числе копий программного ресурса в МС с параметрами  $p = 7$ ,  $n = 4$ ,

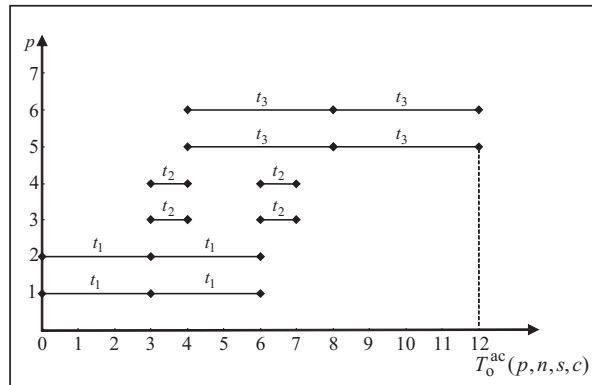


Рис. 9. Диаграмма Ганта асинхронного режима (однородные процессы)

$$s = 3, c = 2, T^\varepsilon = \begin{bmatrix} 3 & 1 & 4 \\ 3 & 1 & 4 \\ 3 & 1 & 4 \\ 3 & 1 & 4 \end{bmatrix}.$$

Оценим общее время выполнения  $n$  однородных распределенных конкурирующих процессов в асинхронном режиме, использующих  $c$  копий структурированного программного ресурса.

Пусть  $(t_1^\varepsilon, t_2^\varepsilon, \dots, t_s^\varepsilon)$  — длительности выполнения каждого из блоков  $Q_j$ ,  $j = \overline{1, s}$ , программного ресурса

с учетом накладных расходов  $\varepsilon$ ,  $t_j^\varepsilon = t_j + \varepsilon$ ,  $j = \overline{1, s}$ . Обозначим  $T_\varepsilon^s = \sum_{j=1}^s t_j^s$  длительность выполнения всего программного ресурса каждым процессом.

Покажем, что в этих условиях вычисление общего времени  $T_0^{ac}(p, n, s, c)$  в случае неограниченного параллелизма сводится к нахождению общего времени выполнения однородных распределенных процессов при одной копии структурированного программного ресурса. При  $n = mc$ ,  $m \geq 2$ ,  $2 \leq c \leq p$ , выполнение  $c$  копий структурированного программного ресурса в асинхронном режи-

ме равносильно выполнению  $c$  групп по  $m$  процессов, конкурирующих за использование одной копии программного ресурса на  $\left\lceil \frac{p}{c} \right\rceil$  процессорах.

На основании формулы [6] вычисления общего времени выполнения  $n$  однородных конкурирующих процессов, использующих одну копию структурированного программного ресурса и с учетом того, что  $n = mc$ ,  $m \geq 2$ ,  $2 \leq c \leq p$ , получаем

$$T_0^{\text{ac}}(p, mc, s, c) = T_0^{\text{ac}}\left(\left\lceil \frac{p}{c} \right\rceil, m, s, 1\right) = T_\varepsilon^s + (m-1) \max_{1 \leq j \leq s} t_j^\varepsilon. \quad (3)$$

Для доказательства формулы (3) воспользуемся функционалом (1) задачи Беллмана–Джонсона, который для систем однородных конкурирующих процессов примет вид

$$T_0^{\text{ac}}(p, n, s, c) = \max_{1 \leq u_1 \leq u_2 \leq \dots \leq u_{s-1} \leq m} \left[ \sum_{i=1}^{u_1} t_1^\varepsilon + \sum_{i=u_1}^{u_2} t_2^\varepsilon + \dots + \sum_{i=u_{s-1}}^m t_s^\varepsilon \right] = \sum_{j=1}^s t_j^\varepsilon + (m-1) \max_{1 \leq j \leq s} t_j^\varepsilon,$$

где  $m = \frac{n}{c}$ ,  $t_j^\varepsilon = t_j + \varepsilon$ ,  $j = \overline{1, s}$ , а  $u_1, u_2, \dots, u_{s-1}$  — целые числа.

В случае, когда  $s > \left\lceil \frac{p}{c} \right\rceil$ ,  $s = k \left\lceil \frac{p}{c} \right\rceil$ ,  $k > 1$ , матрица времен выполнения блоков

программного ресурса строится аналогично, как и матрица  $T^*$ . Отличие состоит в том, что в каждой из подматриц  $T_l^\varepsilon$ ,  $l = \overline{1, k}$ , матрицы  $T^*$  все строки совпадают.

Тогда, по аналогии с теоремой 2, общее время  $T_{\text{H}}^{\text{ac}}(p, n, s, c)$  выполнения  $n$  распределенных однородных конкурирующих процессов при ограниченном числе копий программного ресурса определяется длиной критического пути из начальной вершины в конечную соответствующего сетевого графа.

Если  $s > \left\lceil \frac{p}{c} \right\rceil$ ,  $s = k \left\lceil \frac{p}{c} \right\rceil + r$ ,  $k \geq 1$ ,  $1 \leq r < \left\lceil \frac{p}{c} \right\rceil$ , то последняя подматрица  $T_{k+1}^\varepsilon$

матрицы  $T^*$  будет содержать  $\left\lceil \frac{p}{c} \right\rceil - r$  нулевых столбцов.

**Определение 4.** Однородное структурирование программного ресурса на  $s$  блоков с временами выполнения  $(t_1^\varepsilon, t_2^\varepsilon, \dots, t_s^\varepsilon)$ ,  $\sum_{j=1}^s t_j^\varepsilon = T_\varepsilon^s$ , будем называть равномерным, если  $t_1^\varepsilon = t_2^\varepsilon = \dots = t_s^\varepsilon = t^\varepsilon$ .

**Следствие.** В случае равномерного структурирования для вычисления минимального общего времени выполнения распределенных конкурирующих процессов при ограниченном числе копий программного ресурса имеют место формулы

$$T_p^{\text{ac}}(p, n, s, c) = \begin{cases} (m+s-1)t^\varepsilon, & \left\lceil \frac{p}{c} \right\rceil \geq \min\{m, s\}, \\ (km + \left\lceil \frac{p}{c} \right\rceil - 1)t^\varepsilon, & \left\lceil \frac{p}{c} \right\rceil < \min\{m, s\}, s = k \left\lceil \frac{p}{c} \right\rceil, k > 1, \\ ((k+1)m + r - 1)t^\varepsilon, & \left\lceil \frac{p}{c} \right\rceil < \min\{m, s\}, s = k \left\lceil \frac{p}{c} \right\rceil + r, k \geq 1, 1 \leq r < \left\lceil \frac{p}{c} \right\rceil. \end{cases}$$

Рассмотрим систему одинаково распределенных конкурирующих процессов. Времена выполнения всех блоков рассматриваемой системы с учетом накладных расходов  $\varepsilon$  каждым  $i$ -м процессом совпадают и равны  $t_i^\varepsilon$ , т.е. справедлива цепочка ра-

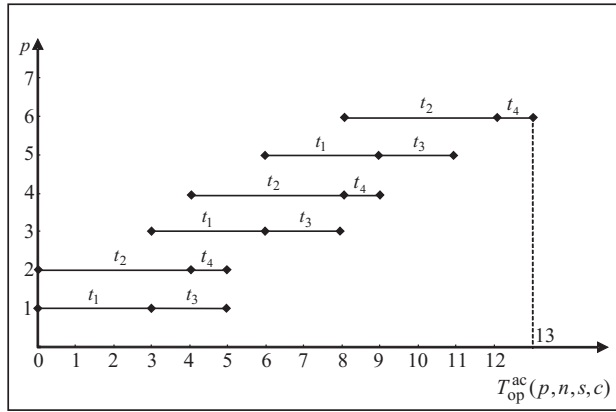


Рис. 10. Диаграмма Ганта асинхронного режима (одинаково распределенные процессы)

в случае неограниченного ( $s \leq \left\lfloor \frac{p}{c} \right\rfloor$ ) параллелизма.

Обозначим  $T_\varepsilon^q = \sum_{i=1}^m t_{q+(i-1)c}^\varepsilon$  суммарное время выполнения каждого из блоков

$Q_j, j = \overline{1, s}$ , всеми  $m$  процессами из  $q$ -й группы, а  $t_{\max}^q = \max_{1 \leq i \leq m} t_{q+(i-1)c}^\varepsilon$  — максимальное время выполнения блока из этой группы,  $q = \overline{1, c}$ . Справедлива следующая теорема.

**Теорема 3.** Минимальное общее время выполнения  $n, n \geq 2$ , одинаково распределенных конкурирующих процессов, использующих структурированный на  $s, s \geq 2$ , блоков программный ресурс в многопроцессорной системе с  $p, p \geq 2$ , процессорами в асинхронном режиме при ограниченном числе копий программного ресурса, составляет величину  $T_{\text{оп}}^{\text{ac}}(p, n, s, c)$ :

$$T_{\text{оп}}^{\text{ac}}(p, n, s, c) = \max_{1 \leq q \leq c} \begin{cases} T_\varepsilon^q + (s-1)t_{\max}^q & \text{при } s \leq \left\lfloor \frac{p}{c} \right\rfloor \text{ или } s > \left\lfloor \frac{p}{c} \right\rfloor, \\ & \text{при этом } T_\varepsilon^q \leq \left\lfloor \frac{p}{c} \right\rfloor t_{\max}^q; \\ kT_\varepsilon^q + \left( \left\lfloor \frac{p}{c} \right\rfloor - 1 \right) t_{\max}^q & \text{при } s = k \left\lfloor \frac{p}{c} \right\rfloor, k > 1, T_\varepsilon^q > \left\lfloor \frac{p}{c} \right\rfloor t_{\max}^q; \\ (k+1)T_\varepsilon^q + (r-1)t_{\max}^q & \text{при } s = k \left\lfloor \frac{p}{c} \right\rfloor + r, k \geq 1, \\ & 1 \leq r < \left\lfloor \frac{p}{c} \right\rfloor, T_\varepsilon^q > \left\lfloor \frac{p}{c} \right\rfloor t_{\max}^q. \end{cases}$$

Для доказательства рассмотрим сначала случай, когда  $s \leq \left\lfloor \frac{p}{c} \right\rfloor$ , или  $s > \left\lfloor \frac{p}{c} \right\rfloor$ ,

но при этом  $T_\varepsilon^q \leq \left\lfloor \frac{p}{c} \right\rfloor t_{\max}^q$ . Воспользуемся функционалом (1) задачи Беллмана–Джонсона, который для систем одинаково распределенных конкурирующих процессов примет вид

$$T_{\text{оп}}^{\text{ac}}(p, n, s, c) = \max_{1 \leq u_1 \leq u_2 \leq \dots \leq u_{s-1} \leq m} \left[ \sum_{i=1}^{u_1} t_{q+(i-1)c}^\varepsilon + \sum_{i=u_1}^{u_2} t_{q+(i-1)c}^\varepsilon + \dots + \sum_{i=u_{s-1}}^m t_{q+(i-1)c}^\varepsilon \right] =$$

$$= T_\varepsilon^q + (s-1) \max_{1 \leq i \leq m} t_{q+(i-1)c}^\varepsilon,$$

где  $m = n/c, t_{q+(i-1)c}^\varepsilon = t_{q+(i-1)c} + \varepsilon, q = \overline{1, c}, i = \overline{1, m}, u_1, u_2, \dots, u_{s-1}$  — целые числа.

венств  $t_{i1}^\varepsilon = t_{i2}^\varepsilon = \dots = t_{is}^\varepsilon = t_i^\varepsilon$  для всех  $i = \overline{1, n}$ .

На рис. 10 представлена диаграмма Ганта, иллюстрирующая выполнение одинаково распределенных конкурирующих процессов в МС с параметрами  $p = 7, n = 4,$

$$s = 3, c = 2, T^\varepsilon = \begin{bmatrix} 3 & 3 & 3 \\ 4 & 4 & 4 \\ 2 & 2 & 2 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix},$$



Далее рассмотрим случай, когда  $s = k \left\lfloor \frac{p}{c} \right\rfloor$ ,  $k > 1$ , и  $T_\varepsilon^q > \left\lfloor \frac{p}{c} \right\rfloor t_{\max}^q$ . Вычисление общего времени  $T_{\text{оп}}^{\text{ac}}(p, n, s, c)$  в этом случае с помощью функционала задачи Беллмана–Джонсона приводит к формуле

$$T_{\text{оп}}^{\text{ac}}(p, n, s, c) = \max_{1 \leq u_1 \leq u_2 \leq \dots \leq u_{\left\lfloor \frac{p}{c} \right\rfloor - 1} \leq km} \left[ \sum_{i=1}^{u_1} t_{q+(i-1)c}^\varepsilon + \sum_{i=u_1}^{u_2} t_{q+(i-1)c}^\varepsilon + \dots + \sum_{i=u_{\left\lfloor \frac{p}{c} \right\rfloor - 1}}^{km} t_{q+(i-1)c}^\varepsilon \right] = kT_\varepsilon^q + \left( \left\lfloor \frac{p}{c} \right\rfloor - 1 \right) t_{\max}^q.$$

Здесь  $t_{q+(i-1)c+km}^\varepsilon = t_{q+(i-1)c}^\varepsilon$ ,  $q = \overline{1, c}$ ,  $i = \overline{1, m}$ .

В случае, когда  $s = k \left\lfloor \frac{p}{c} \right\rfloor + r$ ,  $k \geq 1$ ,  $1 \leq r < \left\lfloor \frac{p}{c} \right\rfloor$  и  $T_\varepsilon^q \geq \left\lfloor \frac{p}{c} \right\rfloor t_{\max}^q$ , вычисление общего времени с помощью функционала задачи Беллмана–Джонсона приводит к третьей формуле для вычисления общего времени выполнения одинаково распределенных конкурирующих процессов при ограниченном числе копий программного ресурса.

#### ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Рассмотренное обобщение математической модели с одним структурированным программным ресурсом (конвейером) на случай ограниченного числа программных ресурсов позволяет установить взаимосвязи мультиконвейерной обработки с аналогичной обработкой при одном программном конвейере. При этом можем получить аналитические оценки общего времени выполнения конкурирующих процессов при ограниченном параллелизме и провести математическое исследование эффективности и оптимальности мультиконвейерной организации конкурирующих процессов, определить потенциальные возможности роста ускорения вычислений, выполнить сравнительный анализ различных режимов такой обработки.

#### СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

- Капитонова Ю.В., Летичевский А.А. Математическая теория проектирования вычислительных систем. — М.: Наука, 1988. — 296 с.
- Капитонова Ю.В., Коваленко Н.С., Павлов П.А. Оптимальность систем одинаково распределенных конкурирующих процессов // Кибернетика и системный анализ. — 2005. — № 6. — С. 3–10.
- Капитонова Ю.В., Коваленко Н.С., Павлов П.А. Оптимальность систем одинаково распределенных конкурирующих процессов // Кибернетика и системный анализ. — 2005. — № 6. — С. 3–10.
- Капитонова Ю.В., Коваленко Н.С., Овсец М.И. Эффективность конвейерной реализации конкурирующих процессов при ограниченном числе копий программного ресурса // Кибернетика. — 1989. — № 3. — С. 60–65.
- Иванников В.П., Коваленко Н.С., Метельский В.М. О минимальном времени реализации распределенных конкурирующих процессов в синхронных режимах // Программирование. — 2000. — № 5. — С. 44–52.
- Коваленко Н.С., Метельский В.М. О времени реализации конкурирующих процессов при распределенной обработке // Кибернетика и системный анализ. — 1996. — № 1. — С. 54–64.
- Коваленко Н.С., Павлов П.А. Системы одинаково распределенных конкурирующих процессов в условиях ограниченного параллелизма и их оптимальность // Докл. НАН Беларуси. Сер. физ.-мат. наук. — 2006. — № 2. — С. 25–29.
- Павлов П.А. Анализ режимов организации одинаково распределенных конкурирующих процессов // Вестник БГУ. Сер. 1. — 2006. — № 1. — С. 116–120.

Поступила 25.05.2010