МИНИСТЕРСТВО ЭКОНОМИКИ РЕСПУБЛИКИ БЕЛАРУСЬ
НАЦИОНАЛЬНЫЙ БАНК РЕСПУБЛИКИ БЕЛАРУСЬ
БЕЛОРУССКАЯ НАУЧНО-ПРОМЫШЛЕННАЯ АССОЦИАЦИЯ
НАУЧНО-ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ ЭКОНОМИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ
МИНИСТЕРСТВА ЭКОНОМИКИ РЕСПУБЛИКИ БЕЛАРУСЬ

ПРОБЛЕМЫ ПРОГНОЗИРОВАНИЯ И ГОСУДАРСТВЕННОГО РЕГУЛИРОВАНИЯ СОЦИАЛЬНО-ЭКОНОМИЧЕСКОГО РАЗВИТИЯ

Материалы X Международной научной конференции

(Минск, 15–16 октября 2009 г.)

В четырех томах

Том 1

Минск
Государственное научное учреждение «Научно-исследовательский экономический институт Министерства экономики Республики Беларусь»
2009

ОПТИМИЗАЦИЯ РАСПРЕДЕЛЕННЫХ ВЫЧИСЛЕНИЙ ПРИ ОРГАНИЗАЦИИ ПРОИЗВОДСТВЕННО-СБЫТОВЫХ ПРОЦЕССОВ

Коваленко Н.С.,

доктор физико-математических наук, профессор,
Белорусский государственный экономический университет.

Павлов П.А.,

кандидат физико-математических наук,
Полесский государственный университет

Задачи оптимизационного плана развития экономики страны или отдельного региона, задачи проектирования сложных систем, сооружений, технологических процессов, а также задачи логистики можно эффективно решать, используя распараллеливание сложных процессов для обработки больших объемов данных и знаний.

В настоящей работе решены оптимизационные задачи по расчету характеристик систем параллельных процессов, задачи поиска критериев эффективной и оптимальной организации выполнения множества параллельных процессов в условиях неограниченного и ограниченного параллелизма [1]. Интерес к подобным задачам вызван оптимизацией процессов производства и доставки продукции предприятиями, созданием программного обеспечения, позволяющего эффективно решать производственно-сбытовые задачи. В логистической цепи «производство-отгрузка-доставка» продукции узкими местами являются: дефицит транспортных средств; очередь на погрузку; наличие требуемого ассортимента готовой продукции при наличии невыполненных заявок. Возникающая в связи с этим неопределенность снижает производительность всей системы товаропроизводящей сети. Синхронизация всех стадий транспортно-логистической цепи и ее оптимизация возможны при наличии эффективной автоматизированной информационной поддержки всех производственно-сбытовых процессов предприятия. Исследуемая в работе математическая модель учитывает цикличность производственно-сбытовых процессов, ограниченность используемых ресурсов и позволяет решать оптимизационные производственные задачи.

1.Математическая модель распределенных процессов. Основой для построения математических моделей параллельных систем являются понятия процесса и программного ресурса [2].

Процесс будем рассматривать как последовательность блоков (команд, наборов действий), для выполнения которых используется множество интеллектуальных клиентов (процессоров, обрабатывающих устройств, роботов). При этом процесс называется *распределенным*, если все блоки или часть из них обрабатываются разными интеллектуальными клиентами. Для ускорения выполнения процессы могут обрабатываться параллельно разными обрабатывающими устройствами, влияя на поведение друг друга путем обмена информацией. Такие процессы называются *кооперативными* или *взаимодействующими*. Параллельную систему распределенных процессов можно рассматривать как некоторый агрегированный процесс, получаемый путем параллельного объединения составляющих взаимодействующих процессов.

Понятие *ресурса* используется для обозначения любых объектов параллельной системы при выполнении процесса. *Реентерабельные* (многократно используемые) ресурсы характеризуются возможностью одновременного использования несколькими процессами. Для параллельных систем типичной является ситуация, когда одну и ту же последовательность команд (действий, блоков) или ее часть интеллектуальным клиентам необходимо выполнять многократно; ее будем называть *программным ресурсом*, а множество соответствующих процессов – *конкурирующими*.

Следствием решения проблемы распределения программных ресурсов является неявное решение задач эффективного использования остальных категорий ресурсов. С другой стороны, эффективно решая задачу распределения программных ресурсов, решаем проблему сокращения времени реализации множества параллельных распределенных процессов. Данные задачи можно эффективно решать с использованием структурирования [2].

Структурирование (декомпозиция) – это основной способ уменьшения времени выполнения больших задач, вычислений и вообще различных проблем. Структурирование всегда предполагает то или иное разбиение задачи на части с последующей организацией линейного или частичного порядка на множестве этих частей. Структурирование программного ресурса на блоки осуществляется, как правило, либо исходя из физического смысла задачи на этапах создания математической модели и алгоритмов ее решения, либо путем анализа последовательного процесса с целью его декомпозиции. Число блоков, на которое осуществляется структурирование программного ресурса, зависит от количества процессов и обрабатывающих устройств, длительности выполнения процесса, накладных расходов и других параметров.

Один из возможных механизмов (способов) взаимодействия процессов, интеллектуальных клиентов и блоков следующий. Блоки, процессы и интеллектуальные клиенты нумеруются в порядке 1, 2, …, s, 1, 2, …, n и 1, 2, …, p соответственно. Причем на множестве блоков установлен линейный порядок их выполнения. Предполагается, что все n процессов используют одну и ту же копию структурированного программного ресурса.

Специально выделенный организующий процесс предоставляет блоки структурированного программного ресурса (ПР) Q_1, Q_2, ..., Q_s каждому из процессов в порядке 1, 2, …, n. Если блок Q_j, $j=\overline{1,s}$, освобождается очередным i-м процессом, то он предоставляется (i + 1)-му процессу, а сам i-й процесс получает в свое распоряжение (j +1)-й блок либо переводится в состояние ожидания до освобождения (j + 1)-го блока, $i=\overline{1,n-1}$, $j=\overline{1,s-1}$ и т. д. В случае распределенной обработки монополизация обрабатывающих устройств процессами не происходит, а блоки одного и того же процесса выполняются на разных устройствах.

Очевидно, что при наличии в распределенной системе p интеллектуальных клиентов возможно совмещенное во времени выполнение процессов. Запоминание и восстановление промежуточных состояний процессов, запуск процессов на выполнение и их завершение, набор режимов взаимодействия процессов, обрабатывающих устройств и блоков осуществляет специальный организующий процесс.

Как и в работах [1–5], будем говорить, что нижеперечисленные объекты образуют математическую модель конкурирующих распределенных процессов: p, $p \geq 2$, интеллектуальных клиентов; n, $n \geq 2$, распределенных конкурирующих процессов; s, $s \geq 2$, блоков структурированного программного процесса; матрицу $T=[t_{ij}]$, $i=\overline{1,n}$, $j=\overline{1,s}$, времен выполнения блоков процессами. Введем в рассмотрение параметр $\varepsilon > 0$, характеризующий накладные расходы, затрачиваемые на организацию параллельного выполнения блоков программного ресурса множеством конкурирующих процессов.

В дальнейшем нам понадобятся следующие определения.

Асинхронный режим взаимодействия процессов, интеллектуальных клиентов и блоков предполагает отсутствие простоев обрабатывающих устройств при условии готовности блоков, а также невыполнение блоков при наличии устройств.

Первый синхронный режим обеспечивает непрерывное выполнение блоков программного ресурса внутри каждого из процессов.

Второй синхронный режим обеспечивает непрерывное выполнение каждого блока всеми процессами.

Система n распределенных конкурирующих процессов называется *неоднородной*, если времена выполнения блоков программного ресурса Q_1, Q_2, ..., Q_s зависят от объемов обрабатываемых данных и/или их структуры, т. е. разные для разных процессов.

Систему распределенных конкурирующих процессов будем называть *однородной*, если времена выполнения Q_j -го блока каждым из i-х процессов равны, т. е. $t_{ij} = t_j$, $i = \overline{1,n}$, $j = \overline{1,s}$.

Систему конкурирующих процессов будем называть *одинаково распределенной*, если времена t_{ij} выполнения блоков Q_j, $j = \overline{1,s}$, программного ресурса каждым из i-х процессов совпадают и равны t_i для всех $i = \overline{1,n}$, т.е. справедлива цепочка равенств $t_{i1} = t_{i2} = ... = t_{is} = t_i$ для всех $i = \overline{1,n}$.

2. Критерии существования эффективных одинаково распределенных систем конкурирующих процессов. Выделим в классе одинаково распределенных систем конкурирующих процессов подкласс стационарных систем.

Определение 1. Одинаково распределенную систему конкурирующих процессов назовем *стационарной*, если $t_1 = t_2 = ... = t_n = t$.

В [1,5] показано, что для одинаково распределенных конкурирующих процессов с учетом накладных расходов $\varepsilon > 0$ при достаточном числе интеллектуальных клиентов, т. е. $2 \le s \le p$, для всех трех базовых режимов, введенных выше, минимальное общее время выполнения $T(p,n,s,\varepsilon)$ совпадает и определяется по формуле:

$$T(p,n,s,\varepsilon) = T_\varepsilon^n + (s-1)t_{\max}^\varepsilon \text{, где } T_\varepsilon^n = \sum_{i=1}^{n} t_i^\varepsilon,\ t_{\max}^\varepsilon = \max_{1\le i\le n} t_i^\varepsilon,\ t_i^\varepsilon = t_i + \varepsilon. \quad (1)$$

Для всех трех базовых режимов в случае стационарной одинаково распределенной системы конкурирующих процессов в случае неограниченного параллелизма минимальное общее время их выполнения $\overline{T}_\varepsilon$ определяется равенством:

$$\overline{T}_\varepsilon(s \le p) = (n+s-1)t_\varepsilon \text{, где } t_\varepsilon = T^n / n + \varepsilon,\ T^n = nt. \quad (2)$$

Определение 2. Одинаково распределенную систему конкурирующих процессов будем называть *эффективной* при фиксированных $p,\ s \ge 2$, если выполняется соотношение $\Delta_\varepsilon = sT^n - T(p,n,s,\varepsilon) \ge 0$, где $sT^n -$ время выполнения *s* блоков всеми *n* процессами в последовательном режиме.

При наличии двух эффективных одинаково распределенных систем конкурирующих процессов будем считать, что первая более эффективна, чем вторая, если величина Δ_ε первой системы не меньше соответствующей величины второй. Для введенного подмножества одинаково распределенных систем справедливо следующее утверждение.

Теорема 1. *Для любой эффективной одинаково распределенной системы конкурирующих процессов при* $2 \le s \le p$ *и* $\varepsilon > 0$ *существует стационарная более эффективная одинаково распределенная система.*

Доказательство. Рассмотрим любую эффективную одинаково распределенную систему. Согласно определению 2, условие эффективности с учетом (1) записывается в виде следующего неравенства:

$$\Delta_\varepsilon(s \le p) = (s-1)(T^n - t_{\max}^n) - (n+s-1)\varepsilon \ge 0,$$

$$\text{где } T^n = \sum_{i=1}^{n} t_i,\ t_{\max}^n = \max_{1\le i\le n} t_i. \quad (3)$$

Для любой стационарной одинаково распределенной системы с учетом (2) имеем, что

$$\overline{\Delta}_\varepsilon(s \le p) = (s-1)(T^n - t) - (n+s-1)\varepsilon \ge 0 \text{, где } t = T^n / n. \quad (4)$$

Чтобы убедиться в справедливости теоремы 1, достаточно доказать выполнение неравенства $\overline{\Delta_\varepsilon} \geq \Delta_\varepsilon$ для введенных эффективных систем. Подставив в левую и правую части последнего неравенства из (3) и (4) вместо $\overline{\Delta_\varepsilon}(s \leq p)$ и $\Delta_\varepsilon(s \leq p)$ соответствующие величины и проведя несложные преобразования, приходим к равносильному неравенству $T^n - t^n_{\max} \leq (n-1)t$.

Докажем справедливость последнего неравенства. Рассмотрим стационарную одинаково распределенную систему, в которой $t = \max\limits_{1 \leq i \leq n} t_i = t^n_{\max}$. Пусть для определенности $t^n_{\max} = t_l$, тогда справедлива цепочка соотношений

$$T^n - t^n_{\max} = \sum_{i=1}^{l-1} t_i + \sum_{i=l+1}^{n} t_i \leq (n-1)t^n_{\max} = (n-1)t,$$

что и доказывает теорему.

Следующее утверждение устанавливает достаточное условие эффективности одинаково распределенной системы в случае неограниченного параллелизма.

Теорема 2. *Одинаково распределенная система конкурирующих процессов с параметрами* p, n, s, ε, *удовлетворяющая соотношениям* $3 \leq s \leq p$, $n = s \neq 3$, $sn \geq 2(n+s-1)$ *и* $0 < \varepsilon \leq \min\limits_{1 \leq i < n} t_i$, *является эффективной*

Доказательство. Согласно (3), условие эффективности равносильно неравенству

$$\frac{T^n - t^n_{\max}}{\varepsilon} \geq \frac{n+s-1}{s-1}. \tag{5}$$

Следовательно, для доказательства теоремы 2 достаточно убедиться в справедливости неравенства (5). Непосредственная проверка показывает, что следствием соотношений $0 < \varepsilon \leq \min\limits_{1 \leq i \leq n} t_i = t^n_{\min}$ является цепочка неравенств

$$\frac{T^n - t^n_{\max}}{\varepsilon} \geq \frac{(n-1)t^n_{\min}}{\varepsilon} \geq n-1, \tag{6}$$

так как в силу выбора ε выполняется неравенство $t^n_{\min}/\varepsilon \geq 1$.

Из $sn \geq 2(n+s-1)$ следует справедливость неравенства

$$n-1 \geq \frac{n+s-1}{s-1}. \tag{7}$$

Проверка показывает, что неравенство (5) является следствием неравенств (6) и (7). Таким образом, теорема 2 доказана.

Ниже формулируется и доказывается необходимое и достаточное условие существования эффективной системы одинаково распределенных конкурирующих процессов при достаточном числе процессоров в зависимости от величины накладных расходов ε.

Согласно (4), условие эффективности любой одинаково распределенной системы конкурирующих процессов определяется соотношениями

$$\overline{\Delta}_\varepsilon(s \leq p) = (s-1)(T^n - t) - (n+s-1)\varepsilon \geq 0,$$

которые равносильны выполнению неравенства

$$\varepsilon \leq \frac{(s-1)T^n(n-1)}{n(n+s-1)}. \tag{8}$$

Введем в рассмотрение функцию $\varphi(x) = \dfrac{(s-1)T^n(x-1)}{x(x+s-1)}$.

Теорема 3. *Для существования эффективной одинаково распределенной системы конкурирующих процессов с заданными параметрами* $3 \leq s \leq p$, T^n, $\varepsilon > 0$ *необходимо и достаточно, чтобы выполнялись следующие условия:*

$$\varepsilon \leq \begin{cases} \varphi(1+\sqrt{s}), & \textit{если } \sqrt{s} \textit{ – целое,} \\ \max\{\varphi(1+[\sqrt{s}]),\ \varphi(2+[\sqrt{s}])\}, & \textit{если } \sqrt{s} \textit{ – нецелое,} \end{cases} \tag{9}$$

где $\varphi(x) = \dfrac{(s-1)T^n(x-1)}{x(x+s-1)}$, $[x]$ – наибольшее целое, не превосходящее x.

Доказательство. Нетрудно проверить, что она достигает своего максимума в точке $x = 1+\sqrt{s}$ при $x > 0$. Положим

$$n_0 = \begin{cases} 1+\sqrt{s}, & \textit{если } \sqrt{s} \textit{ – целое,} \\ \max\{1+[\sqrt{s}],\ 2+[\sqrt{s}]\}, & \textit{если } \sqrt{s} \textit{ – нецелое.} \end{cases} \tag{10}$$

Из определения функции φ, целого n_0 и неравенства (8) следует, что одинаково распределенная система конкурирующих n_0 процессов является эффективной. Таким образом, доказана достаточность условий (9) для существования систем указанного вида.

Необходимость условий (9) будет доказана, если будет установлена невозможность противоположного утверждения, т. е. невозможность существования одинаково распределенной системы конкурирующих n процессов, для которой выполнялось бы неравенство, противоположное неравенству (8), и которая была бы эффективной. Если предположить существование такой системы с n процессами, то должно выполняться соотношение $n \neq n_0$, так как выше установлено, что одинаково распределенная система с n_0 процессами эффективна. Следовательно, для нее имеет место неравенство $\varepsilon \le (s-1)T^n(n_0-1)/n_0(n_0+s-1)$, в то время как для гипотетической системы с n процессами должно выполняться в силу предположения неравенство $\varepsilon \ge (s-1)T^n(n_0-1)/n_0(n_0+s-1)$. Очевидным следствием полученных неравенств является неравенство $\varepsilon > \varepsilon$. Полученное противоречие устанавливает необходимость условий (9). Таким образом, доказательство теоремы 3 завершено.

Очевидно, такой системы нет при $n = n_0$, так как в силу определения функции φ, для такого n выполняется неравенство, противоположное неравенству (8), и, следовательно, такая система не может быть эффективной.

В случае $n < n_0$ в силу определения n_0 должна выполняться цепочка неравенств вида

$$\frac{(s-1)T^n(n-1)}{n(n+s-1)} \le \frac{(s-1)T^n(n_0-1)}{n_0(n_0+s-1)} \le \varepsilon\ . \tag{11}$$

из которой следует неэффективность предполагаемой системы с n процессами в силу (8).

Наконец, если $n > n_0$, то следствием неравенств (8) и (10) является неэффективность предполагаемой одинаково распределенной системы конкурирующих n процессов. Полученные противоречия во всех возможных случаях доказывают необходимость условий (9).

Достаточность условий (9) непосредственно следует из наличия функции φ со свойством (8). Действительно, в этом случае требуемой эффективной одинаково распределенной является система с $n = n_0$ конкурирующими процессами, где n_0 определяется формулой (8). Теорема 3 доказана.

График функции $y = \varphi(x)$, $x > 0$, при фиксированных s, T^n, ε изображен ниже (см. рисунок). Существование эффективной одинаково распределенной системы конкурирующих процессов определяется областью Ω. Все целочисленные точки отрезка Ω являются значениями n, при которых система будет эффективной, при этом $x_1 = 1 + [\sqrt{s}]$, $x^* = 1 + \sqrt{s}$, $x_2 = 2 + [\sqrt{s}]$.

Замечание. При $p = s = 2$ одинаково распределенная система конкурирующих процессов будет эффективной, если выполняется неравенство

$$\frac{\varepsilon}{T^n} \le \frac{n-1}{n(n+1)}.$$

Рис. График функции $y = \varphi(x)$

3. Эффективность одинаково распределенных систем в условиях ограниченного параллелизма. В данном пункте сформулируем необходимые и достаточные условия эффективности одинаково распределенных систем конкурирующих процессов в случае, когда число процессоров является ограниченным.

С учетом параметра $\varepsilon > 0$, характеризующего время дополнительных системных расходов на организацию параллельного использования блоков множеством распределенных конкурирующих процессов, для вычисления минимального общего времени в асинхронном и втором синхронном режимах для класса одинаково распределенных конкурирующих процессов имеют место формулы:

$$T_{op}^{ac}(p,n,s,\varepsilon) = T_{op}^{2}(p,n,s,\varepsilon) =$$

$$= \begin{cases} kT_\varepsilon^n + (p-1)t_{\max}^\varepsilon, & \text{при } s = kp,\ k > 1,\ T_\varepsilon^n > pt_{\max}^\varepsilon, \\ (k+1)T_\varepsilon^n + (r-1)t_{\max}^\varepsilon, & \text{при } s = kp + r,\ k \ge 1,\ 1 \le r < p,\ T_\varepsilon^n > pt_{\max}^\varepsilon. \end{cases} \quad (12)$$

Теорема 4. *Если параметры одинаково распределенной системы* $n \ge 3$ *конкурирующих процессов в многопроцессорной системе с p процессорами удовлетворяют соотношениям* $s \ge 3$, $n = s \ne 3$ *и* $0 < \varepsilon \le \min\limits_{1 \le i \le n} t_i$, *то рассматриваемая система будет эффективной, если выполняются условия:*

$$sn \ge \begin{cases} 2(kn + p - 1), & \text{если } s = kp,\ k > 1, \\ 2((k+1)n + r - 1), & \text{если } s = kp + r,\ k \ge 1,\ 1 \le r < p. \end{cases}$$

Доказательство. Для случая $s = kp$, $k > 1$, условие эффективности с учетом (12) запишется в виде:

$$\Delta_\varepsilon(s = kp) = (s-k)T^n - (p-1)t_{\max}^n - (kn + p - 1)\varepsilon \ge 0,$$

что равносильно неравенству $(s-k)T^n - (p-1)t_{\max}^n \ge (kn + p - 1)\varepsilon$.

В силу того, что $0 < \varepsilon \le \min\limits_{1 < i < n} t_i$, имеем:

$$\frac{(s-k)T^n-(p-1)t^n_{\max}}{\varepsilon} \ge (s-k)n-(p-1) \ge kn+p-1 .$$

Из последней цепочки неравенств следует, что $sn \ge 2(kn+p-1)$.

Для случая $s=kp+r,\ k\ge 1,\ 1\le r<p$, имеем:

$$\Delta_\varepsilon(s=kp+r)=(s-(k+1))T^n-(r-1)t^n_{\max}-((k+1)n+r-1)\varepsilon \ge 0 ,$$

$$(s-(k+1))T^n-(r-1)t^n_{\max} \ge ((k+1)n+r-1)\varepsilon ,$$

$$\frac{(s-(k+1))T^n-(r-1)t^n_{\max}}{\varepsilon} \ge sn-(k+1)n-r+1 \ge (k+1)n+r-1 .$$

Из последнего неравенства следует, что если $s=kp+r,\ k\ge 1,\ 1\le r<p$, то система одинаково распределенных конкурирующих процессов будет эффективной при $sn \ge 2((k+1)n+r-1)$. Теорема доказана.

Докажем существование эффективных одинаково распределенных систем конкурирующих процессов в случае ограниченного параллелизма в зависимости от величины накладных расходов ε в асинхронном и втором синхронном режимах.

Теорема 5. *Для существования эффективной одинаково распределенной системы конкурирующих процессов с заданными параметрами необходимо и достаточно, чтобы выполнялись следующие условия:*

1) при $s=kp,\ k>1$,

$$\varepsilon \le \begin{cases} \varphi_1\left(\dfrac{1+\sqrt{p}}{k}\right), & \text{если } \dfrac{1+\sqrt{p}}{k} \text{ – целое,} \\ \max\left\{\varphi_1\left(\left[\dfrac{1+\sqrt{p}}{k}\right]\right),\ \varphi_1\left(\left[\dfrac{1+\sqrt{p}}{k}\right]+1\right)\right\}, & \text{если } \dfrac{1+\sqrt{p}}{k} \text{ – нецелое,} \end{cases}$$

где $\varphi_1(x)=(p-1)T^n(kx-1)/x(kx+p-1)$, а $[x]$ – наибольшее целое, не превосходящее x;

2) при $s = kp + r,\ k \geq 1,\ 1 \leq r < p$,

$$\varepsilon \leq \begin{cases} \varphi_2(x), & \text{если } x - \text{целое}, \\ \max\{\varphi_2([x]),\ \varphi_2([x]+1)\}, & \text{если } x - \text{нецелое}, \end{cases}$$

где $\varphi_2(x) = \dfrac{[(p-1)kx + (r-1)(x-1)]\ T^n}{x\ [(k+1)x + r - 1]}$, $[x]$ – наибольшее целое, не превосходящее x, где $x = \dfrac{r-1}{(p-1)k + r - 1}\left(1 + \sqrt{1 + \dfrac{(p-1)k + r - 1}{k+1}}\right)$.

Доказательство. Доказательство проведем по аналогии с доказательством теоремы 3. В случае стационарной одинаково распределенной системы конкурирующих процессов в асинхронном и втором синхронном режимах минимальное общее время $\overline{T}_\varepsilon$ с учетом параметра $\varepsilon > 0$ определяется равенствами:

$$\overline{T}_\varepsilon = \begin{cases} (kn + p - 1)t_\varepsilon, & \text{при } s = kp,\ k > 1, \\ ((k+1)n + (r-1))t_\varepsilon, & \text{при } s = kp + r,\ k \geq 1,\ 1 \leq r < p. \end{cases} \tag{13}$$

Условие эффективности одинаково распределенной системы конкурирующих процессов с учетом (13) в случае $s = kp,\ k > 1$,определяется соотношением:

$$\overline{\Delta}_\varepsilon(s = kp) = (p-1)(kT^n - t) - (kn + p - 1)\varepsilon \geq 0,$$

которое равносильно выполнению неравенства:

$$\varepsilon \leq \frac{(p-1)T^n(kn-1)}{n(kn + p - 1)}.$$

Введем в рассмотрение функцию $\varphi_1(x) = (p-1)T^n(kx-1)/x(kx + s - 1)$.

которая при $x > 0$ достигает своего максимума в точке $x = \dfrac{1+\sqrt{p}}{k}$.

В случае $s = kp + r,\ k \ge 1,\ 1 \le r < p$, условие эффективности одинаково распределенной системы конкурирующих процессов с учетом (13) определяется неравенством:

$$\bar{\Delta}_\varepsilon(s = kp + r) = (p-1)kT^n + (r-1)(T^n - t) - ((k+1)n + r - 1)\varepsilon \ge 0,$$

с учетом, что $t = T^n/n$, это равносильно, что $\varepsilon \le \dfrac{[(p-1)nk + (r-1)(n-1)]T^n}{[(k+1)n + r - 1]n}$.

При $x > 0$ функция $\varphi_2(x) = \dfrac{[(p-1)kx + (r-1)(x-1)]T^n}{[(k+1)x + r - 1]x}$ достигает своего максимума в точке

$$x = \frac{r-1}{(p-1)k + r - 1}\left(1 + \sqrt{1 + \frac{(p-1)k + r - 1}{k+1}}\right).$$

Теорема доказана.

4. Оптимальность одинаково распределенных систем конкурирующих процессов. В пункте 2 показано, что оптимальную одинаково распределенную систему достаточно искать среди эффективных одинаково распределенных систем. Более того, в силу теоремы 1 оптимальную одинаково распределенную систему следует искать среди стационарных одинаково распределенных систем. Тогда с учетом (4) имеем:

$$\bar{\Delta}_\varepsilon(s \le p) = (s-1)T^n(1 - 1/n) - (n + s - 1)\varepsilon.$$

Введем функцию действительного аргумента x вида:

$$\bar{\Delta}_\varepsilon(x) = (s-1)T^n\left(1 - \frac{1}{x}\right) - (x + s - 1)\varepsilon,\ \ x \ge 1.$$

Определение 3. Эффективная одинаково распределенная система называется *оптимальной,* если величина Δ_ε достигает наибольшего значения.

Решение задачи об оптимальности одинаково распределенной системы, состоящей из n конкурирующих процессов, для достаточного числа процессоров для всех трех базовых режимов следует из теоремы.

Теорема 6. *Для того чтобы эффективная одинаково распределенная система конкурирующих процессов была оптимальной при заданных* $2 \le s \le p$, T^n, $\varepsilon > 0$, *необходимо и достаточно, чтобы она была стационарной и число процессов* n_0 *в системе равнялось одному из чисел*

$$\left[\left[\sqrt{\frac{(s-1)T^n}{\varepsilon}}\right], \left[\sqrt{\frac{(s-1)T^n}{\varepsilon}}\right]+1\right]\cap[2,n]$$

в котором функция $\bar{\Delta}_\varepsilon(x)$ *достигает наибольшего значения. Здесь* $[x]$ *означает наибольшее целое, не превосходящее x, n – заданное число.*

Доказательство.

Необходимость. Рассмотрим введенную функцию:

$$\bar{\Delta}_\varepsilon(x) = (s-1)T^n\left(1-\frac{1}{x}\right)-(x+s-1)\varepsilon,\ \ x \ge 1.$$

Согласно определению 3, одинаково распределенная система будет оптимальной в той точке x, где функция $\bar{\Delta}_\varepsilon(x)$ достигает своего наибольшего значения. Покажем, что функция $\bar{\Delta}_\varepsilon(x)$ достигает своего наибольшего значения в точке $x = \sqrt{\frac{(s-1)T^n}{\varepsilon}}$. Действительно,

$$\bar{\Delta}'_\varepsilon(x) = \frac{(s-1)T^n}{x^2} - \varepsilon,\ \bar{\Delta}''_\varepsilon(x) = -\frac{2T^n(s-1)}{x^3} < 0,\ \text{так как } s \ge 2,\ x > 0.$$

Следовательно, функция $\bar{\Delta}_\varepsilon(x)$ достигает максимума в точке, где первая ее производная обращается в нуль $\bar{\Delta}'_\varepsilon(x) = 0$, т. е. $x^* = \sqrt{\frac{(s-1)T^n}{\varepsilon}}$.

Целочисленными точками, в которых достигается наибольшее значение функции $\bar{\Delta}_\varepsilon(x)$, будут $n_0 = [x^*]$ или $n_0 = [x^*]+1$. Следовательно, в качестве n_0 можно выбрать одно из чисел $\left[\sqrt{\dfrac{(s-1)T''}{\varepsilon}}\right]$, $\left[\sqrt{\dfrac{(s-1)T''}{\varepsilon}}\right]+1$, в которых функция $\bar{\Delta}_\varepsilon(s \le p)$ принимает наибольшее значение.

Если же окажется, что ни одна из точек $\left[\sqrt{\dfrac{(s-1)T''}{\varepsilon}}\right]$, $\left[\sqrt{\dfrac{(s-1)T''}{\varepsilon}}\right]+1$

в которой функция $\bar{\Delta}_\varepsilon(x)$ принимает наибольшее значение, не принадлежит $[2,n]$, то в качестве оптимальной выбираем эффективную одинаково распределенную систему с числом процессов $n_0 = n$.

В силу отрицательности второй производной исследуемая функция выпукла. Следовательно, точка максимума всегда существует, а значит, существует и эффективная одинаково распределенная система конкурирующих процессов в случае, когда $n \to \infty$.

Достаточность следует из свойств выпуклости функции $\bar{\Delta}_\varepsilon(x)$ при $s \le p$ на отрезке $[2,n]$.

Для решения задачи об оптимальности одинаково распределенной системы конкурирующих процессов в случае ограниченного параллелизма в асинхронном и втором синхронном режимах введем функции действительного аргумента x вида:

$$\bar{\Delta}_\varepsilon(x) = (s-1)T'' - \frac{(p-1)T''}{x} - (kx+p-1)\varepsilon \text{, при } s = kp,\ k > 1, \qquad (14)$$

$$\bar{\Delta}_\varepsilon(x) = (s-k-1)T'' - \frac{(r-1)T''}{x} - \big((k+1)x+(r-1)\big)\varepsilon, \qquad (15)$$

при $s = kp + r$, $k \ge 1$, $1 \le r < p$.

Теорема 7. *Для того чтобы эффективная одинаково распределенная система конкурирующих процессов в случае ограниченного параллелизма* *в асинхронном и втором синхронном режимах была оптимальной при заданных* $p \ge 2$, T^n, $\varepsilon > 0$. *необходимо и достаточно, чтобы она была стационарной и число процессов* n_0 *в системе равнялось одному из чисел:*

1) $\left[\left[\sqrt{\frac{(p-1)T^n}{k\varepsilon}}\right], \left[\sqrt{\frac{(p-1)T^n}{k\varepsilon}}\right]+1\right] \cap [2,n]$, при $s = kp$, $k > 1$,

2) $\left[\left[\sqrt{\frac{(r-1)T^n}{(k+1)\varepsilon}}\right], \left[\sqrt{\frac{(r-1)T^n}{(k+1)\varepsilon}}\right]+1\right] \cap [2,n]$, при $s = kp + r$, $k \ge 1$, $1 \le r < p$,

в котором функция $\overline{\Delta}_\varepsilon(x)$ *достигает наибольшего значения, где* $[x]$ – *наибольшее целое, не превосходящее x, n – заданное число.*

Доказательство.

Необходимость. Для случая $s = kp$, $k > 1$, функция вида (14) достигает своего наибольшего значения в точке $x^* = \sqrt{\frac{(p-1)T^n}{k\varepsilon}}$, так как

$$\overline{\Delta}_\varepsilon(x) = \frac{(p-1)T^n}{x^2} - k\varepsilon .$$

Как и в случае неограниченного параллелизма, целочисленными точками будут $n_0 = [x^*]$ или $n_0 = [x^*] + 1$. Следовательно, в качестве оптимальной выбираем эффективную одинаково распределенную систему с числом процессов $\left[\sqrt{\frac{(p-1)T^n}{k\varepsilon}}\right]$, $\left[\sqrt{\frac{(p-1)T^n}{k\varepsilon}}\right]+1$.

В случае $s = kp + r$, $k \ge 1$, $1 \le r < p$, первая производная функции (15) имеет вид:

$$\overline{\Delta}'_\varepsilon(x) = \frac{(r-1)T^n}{x^2} - (k+1)\varepsilon .$$

Следовательно, в качестве n_0 можно выбрать одно из значений

$$\left\lfloor \sqrt{\frac{(r-1)T^n}{(k+1)\varepsilon}} \right\rfloor \text{ или } \left\lfloor \sqrt{\frac{(r-1)T^n}{(k+1)\varepsilon}} \right\rfloor + 1 .$$

Если же окажется, что ни одна из точек $\left\lfloor \sqrt{\frac{(p-1)T^n}{k\varepsilon}} \right\rfloor$, $\left\lfloor \sqrt{\frac{(p-1)T^n}{k\varepsilon}} \right\rfloor + 1$, $\left\lfloor \sqrt{\frac{(r-1)T^n}{(k+1)\varepsilon}} \right\rfloor$, $\left\lfloor \sqrt{\frac{(r-1)T^n}{(k+1)\varepsilon}} \right\rfloor + 1$, в которых функции (14), (15) принимают наибольшее значение, не принадлежат $[2,n]$, то в случае ограниченного параллелизма в качестве оптимальной выбираем эффективную одинаково распределенную систему с числом процессов $n_0 = n$.

Достаточность следует из свойств выпуклости функции $\overline{\Delta}_\varepsilon(x)$ при $s > p$ на отрезке $[2,n]$. Действительно, исследуемые функции (14) и (15) выпуклы в силу отрицательности вторых производных:

1) $\overline{\Delta}_\varepsilon''(x) = -\dfrac{2T^n(p-1)}{x^3} < 0, \quad p \geq 2, \; x > 0,$

2) $\overline{\Delta}_\varepsilon''(x) = -\dfrac{2T^n(r-1)}{x^3} < 0, \quad 1 \leq r < p, \; x > 0.$

Теорема доказана.

Проведено математическое исследование эффективности и оптимальности одинаково распределенных систем конкурирующих процессов. В результате получены: условие существования более эффективной одинаково распределенной системы конкурирующих процессов; достаточные условия эффективности одинаково распределенных систем конкурирующих процессов в условиях неограниченного параллелизма для всех трех режимов и в условиях ограниченного параллелизма для асинхронного и второго синхронного режимов; необходимые и достаточные условия существования эффективных систем одинаково распределенных конкурирующих процессов в зависимости от величины накладных расходов; необходимые и достаточные условия существования оптимальных одинаково распределенных систем конкурирующих процессов.

Литература

1. *Коваленко, Н.С., Павлов, П.А.* Математическая модель организации производственного процесса на поточных линиях / Н.С. Коваленко, П.А. Павлов Проблемы прогнозирования и государственного регулирования социально-экономического развития: материалы VII Междунар. науч. конф. Минск, 19–20 окт. 2006 г. – Мн: НИЭИ Мин-ва экономики Респ. Беларусь, 2007. – С. 326–336.
2. *Коваленко, Н.С., Павлов, П.А.* Математическая модель параллельных производственных процессов / Н.С. Коваленко, П.А. Павлов // Проблемы прогнозирования и государственного регулирования социально-экономического развития: материалы VIII Междунар. науч. конф. Минск, 18–19 окт. 2007 г. – Мн: НИЭИ Мин-ва экономики Респ. Беларусь, 2007. – С. 408–425.
3. *Коваленко, Н.С., Кляус, П.С., Павлов, П.А.* Организация синхронного выполнения параллельных распределенных процессов на поточных линиях / Н.С. Коваленко, П.С. Кляус, П.А. Павлов // Проблемы прогнозирования и государственного регулирования социально-экономического развития: материалы IX Междунар. науч. конф. Минск, 16–17 окт. 2008 г. – Минск: НИЭИ Мин-ва экономики Респ. Беларусь, 2008. – С. 482–496.
4. *Павлов, П.А.* О времени реализации систем параллельных распределенных процессов / П.А. Павлов // Вестник Полесского гос. ун-та. – 2008. – №1. – С. 60–67.
5. *Kapitonova, Yu.V., Kovalenko, N.S., Pavlov, P.A.* Optimality of systems of identically distributed competing processes / Yu.V. Kapitonova, N.S. Kovalenko, P.A. Pavlov // Cybernetics and Systems Analysis. – New York: Springer, 2006. – P. 793–799.

СОДЕРЖАНИЕ