

МИНИСТЕРСТВО ЭКОНОМИКИ РЕСПУБЛИКИ БЕЛАРУСЬ  
ПРОГРАММА РАЗВИТИЯ ООН  
ФОНД ООН В ОБЛАСТИ НАРОДОНАСЕЛЕНИЯ (ЮНФПА)  
ОБЪЕДИНЕННАЯ ПРОГРАММА ООН ПО ВИЧ СПИДУ  
ДЕТСКИЙ ФОНД ООН (ЮНИСЕФ)  
НАУЧНО-ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ ЭКОНОМИЧЕСКИЙ  
ИНСТИТУТ МИНИСТЕРСТВА ЭКОНОМИКИ РЕСПУБЛИКИ БЕЛАРУСЬ

# **Проблемы прогнозирования и государственного регулирования социально-экономического развития**

**Материалы XI Международной научной конференции  
(Минск, 14–15 октября 2010 г.)**

**В пяти томах**

**Том 1**

Минск  
НИЭИ МИНИСТЕРСТВА ЭКОНОМИКИ РЕСПУБЛИКИ БЕЛАРУСЬ  
2010

## МОДЕЛИРОВАНИЕ РАСПРЕДЕЛЕННЫХ ЛОГИСТИЧЕСКИХ СИСТЕМ

**Коваленко Н.С.,**

*доктор физико-математических наук, профессор,  
Белорусский государственный экономический университет,*

**Кляус П.С.,**

*кандидат физико-математических наук,  
КУП «Минскхлебпром»,*

**Павлов П.А.,**

*кандидат физико-математических наук, доцент,*

**Сидская О.В.,**

*Полесский государственный университет*

Устранение различного рода импортных и экспортных ограничений, стандартизация технических параметров путей сообщения, подвижного состава и погрузочно-разгрузочных средств, унификация правил и норм по поставке товаров во внешнеэкономической деятельности, ускорение научно-технического прогресса в коммуникациях, внедрение в хозяйственную практику фирм и организаций вычислительной техники, использование теории систем для решения экономических задач значительно повысили интерес к изучению, моделированию и совершенствованию логистических систем (ЛС). Безусловно, важную роль в создании объективных возможностей для их развития сыграл технический прогресс в средствах связи, информатике и информационном отслеживании материальных потоков. Он позволил на более высоком уровне осуществлять контроль всех основных и вспомогательных процессов товародвижения. Благодаря «компьютерной логистике» на протяжении всей цепи обслуживания стало возможным производить анализ деятельности фирмы, давать оценку ее положения по сравнению с положением конкурентов, принимать взвешенные управленческие решения.

В работе строится и исследуется математическая модель распределенной логистической системы, представляющей собой комплекс взаимосвязанных функций, реализуемых в процессе распределения материального потока между различными оптовыми покупателями. Основными функциями логистической системы является планирование транспортирования, складирования и других материальных и нематериальных операций, совершаемых в процессе доведения готовой продукции до потребителя в соот-

ветствии с интересами и требованиями последнего, контроль за выполнением этих операций, управление ими, а также передача, хранение и обработка соответствующей информации. При этом с использованием метода структурирования материального потока на блоки и их последующей конвейеризацией по логистическим процессам/потокам (ЛП) и центрам/потребителям определяются оптимальные временные характеристики такой организации.

**1. Математическая модель распределенной логистической системы.** Математическая модель распределенной ЛС включает в себя:  $p$ ,  $p \geq 2$ , потребителей, которые имеют доступ к общему маркетинговому центру;  $n$ ,  $n \geq 2$ , логистических потоков;  $s$ ,  $s \geq 2$ , блоков структурированных материальных потоков; матрицу  $T = [t_{ij}]$ ,  $i = \overline{1, n}$ ,  $j = \overline{1, s}$ , времен выполнения (доставки) процессами блоков материального потока;  $c$ ,  $2 \leq c \leq p$ ,

экспедиторов маркетингового центра, причем  $\left\lfloor \frac{p}{c} \right\rfloor \geq 2$ ;  $\varepsilon > 0$  – параметр, характеризующий время расходов, связанных с организацией конвейерного режима (время загрузки/разгрузки).

Будем также предполагать, что число логистических потоков  $n$  кратно числу  $c$ , т.е.  $n = mc$ ,  $m \geq 2$ , и что взаимодействие ЛП, потребителей и блоков материального потока подчинено следующим условиям:

1) ни один из потребителей не может обрабатывать (разгружать) одновременно более одного блока материального потока;

2) потоки выполняются в параллельно-конвейерном режиме группами, т.е. осуществляется одновременное (параллельное) выполнение  $c$  копий каждого блока материального потока в сочетании с конвейеризацией групп из  $c$  блоков по потребителям и логистическим потокам;

3) обработка каждого блока материального потока осуществляется без прерываний;

4) распределение блоков материального потока по потребителям для каждого из потоков  $i = lc + q$ ,  $i = \overline{1, n}$ ,  $l \geq 0$ ,  $q = \overline{1, c}$ , осуществляется цик-

лически по правилу: блок материального потока с номером  $j = k \left\lfloor \frac{p}{c} \right\rfloor + r$ ,

$j = \overline{1, s}$ ,  $k \geq 0$ ,  $r = 1, \left\lceil \frac{p}{c} \right\rceil$ , распределяется потребителю с номером  $q + c(r-1)$ .

Введем следующие режимы взаимодействия логистических потоков, потребителей и блоков материального потока с учетом наличия  $c$  рабочих мест маркетингового центра:

1) *асинхронный режим*, при котором начало выполнения очередной группы из  $c$  копий блока материального потока  $Q_j$ ,  $j = \overline{1, s}$ , определяется наличием  $c$  потребителей и готовностью этой группы блоков к выполнению. Блок материального потока считается готовым к выполнению (разгрузке), если он не выполняется ни одним потребителем;

2) *первый синхронный режим*, обеспечивающий линейный порядок выполнения блоков материального потока внутри каждого из логистических потоков без задержек, т.е. для каждого потока  $i = lc + q$ ,  $i = \overline{1, n}$ ,  $l \geq 0$ ,  $q = \overline{1, c}$ , момент завершения выполнения  $j$ -го блока  $(q + c(r-1))$ -м потребителем совпадает с моментом начала выполнения следующего  $(j+1)$ -го

блока  $(q + cr)$ -м потребителем,  $j = \overline{1, s-1}$ ,  $r = 1, \left\lceil \frac{p}{c} \right\rceil$ .

3) *второй синхронный режим*, при котором  $c$  копий каждого блока материального потока непрерывно переходит по группам из  $c$  потоков, т.е. момент окончания обработки  $c$  копий текущего блока совпадает с моментом начала их обработки следующей группой из  $c$  потребителей.

Сущность математической модели организации распределенных логистических систем состоит в нахождении оптимальных характеристик и расписаний логистических потоков с целью минимизации общего времени их выполнения за счет конвейеризации блоков материального потока.

Диаграммы Ганта, представленные на рис. 1–3, иллюстрируют выполнение  $n = 4$  распределенных логистических потоков, сопровождаемых  $c = 2$  экспедиторами структурированного материального потока в ЛС с  $p = 7$  потребителями в рассмотренных выше режимах и с заданной матри-

цей времен выполнения процессами блоков МП с учетом расходов

$$T^{\varepsilon} = \begin{vmatrix} 3 & 1 & 4 \\ 2 & 2 & 1 \\ 1 & 3 & 3 \\ 4 & 1 & 2 \end{vmatrix}$$

**Определение 1.** ЛС  $n$  логистических потоков называется *неоднородной*, если времена выполнения блоков материального потока  $Q_1, Q_2, \dots, Q_n$  зависят от объемов обрабатываемых данных и/или их структуры, т. е. разные для разных процессов.

**Определение 2.** ЛС логистических потоков будем называть *однородной*, если времена выполнения  $Q_j$ -го блока каждым из  $i$ -х потоков равны, т.е.  $t_{ij} = t_j, i = \overline{1, n}, j = \overline{1, s}$ .

**Определение 3.** ЛС логистических потоков будем называть *одинаково распределенной*, если времена  $t_{ij}$  выполнения блоков  $Q_j, j = \overline{1, s}$ , материального потока каждым из  $i$ -х логистических потоков совпадают и равны  $t_i$  для всех  $i = \overline{1, n}$ , т. е. справедлива цепочка равенств  $t_{i1} = t_{i2} = \dots = t_{is} = t_i$  для всех  $i = \overline{1, n}$ .

**2. Минимальное общее время выполнения неоднородных распределенных потоков в асинхронном режиме.** Обозначим минимальное общее время выполнения  $n$  неоднородных распределенных логистических потоков при ограниченном числе  $c$  рабочих мест маркетингового центра в многопользовательской системе с  $p$  потребителями в асинхронном режиме, с учетом параметра  $\varepsilon$ , через  $T_n^{ac}(p, n, s, c)$ . Для вычисления

$T_n^{ac}(p, n, s, c)$  рассмотрим случаи неограниченного  $\left( s \leq \left\lfloor \frac{p}{c} \right\rfloor \right)$  параллелизма.

Пусть имеется система  $n = mc, m \geq 2, 2 \leq c \leq p$ , неоднородных распределенных конкурирующих потоков, причем число блоков  $s$  структурированного материального потока не превосходит числа групп потребителей

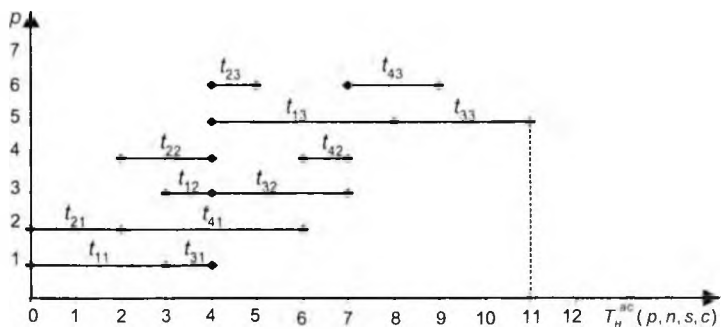


Рис. 1. Асинхронный режим

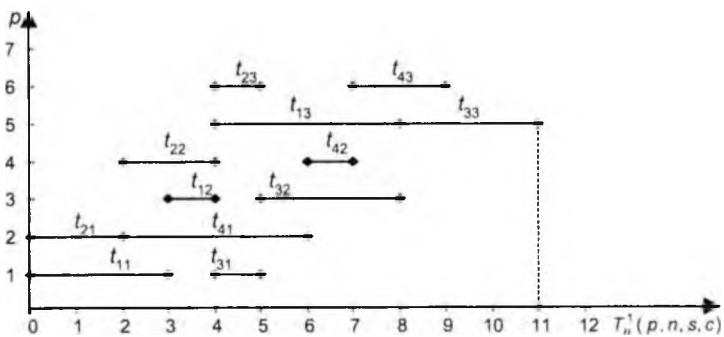


Рис. 2. Первый синхронный режим

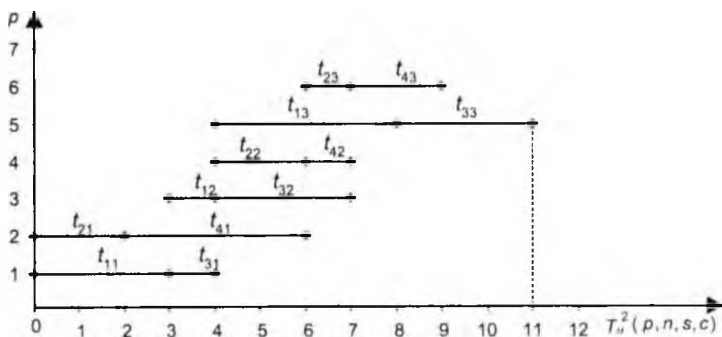


Рис. 3. Второй синхронный режим

по  $c$  потребителей в каждой, т. е.  $2 \leq s \leq \left\lceil \frac{p}{c} \right\rceil$ . В этом случае без ограничения общности можно считать, что каждый  $Q_j$ -й,  $j = \overline{1, s}$ , блок  $i$ -го материального потока, где  $i = lc + q$ ,  $i = \overline{1, n}$ ,  $l \geq 0$ ,  $q = \overline{1, c}$ , закреплен за  $(q + c(r-1))$ -м потребителем,  $r = 1, \left\lceil \frac{p}{c} \right\rceil$ .

Пусть  $T^\varepsilon = [t_{ij}^\varepsilon]$  –  $n \times s$ -матрица времен выполнения блоков материального потока каждым из  $i$ -х потребителей с учетом параметра  $\varepsilon > 0$ , где  $t_{ij}^\varepsilon = t_{ij} + \varepsilon$ ,  $i = \overline{1, n}$ ,  $j = \overline{1, s}$ . Для вычисления минимального общего времени  $T_n^{ac}(p, n, s, c)$  можно воспользоваться функционалом задачи Беллмана-Джонсона, который в нашем случае будет иметь вид:

$$T_n^{ac}(p, n, s, c) = \max_{\substack{1 \leq u_1 \leq u_2 \leq \dots \leq u_m \leq m}} \left[ \sum_{i=1}^m t_{q+(i-1)c, 1}^\varepsilon + \sum_{i=u_1}^{u_2} t_{q+(i-1)c, 2}^\varepsilon + \dots + \sum_{i=u_{m-1}}^m t_{q+(i-1)c, s}^\varepsilon \right], (1)$$

где  $m = \frac{n}{c}$ ,  $t_{q+(i-1)c, j}^\varepsilon = t_{q+(i-1)c, j} + \varepsilon$ ,  $q = \overline{1, c}$ ,  $i = \overline{1, m}$ ,  $j = \overline{1, s}$ , а  $u_1, u_2, \dots, u_{m-1}$  – целые числа.

**Пример 1.** Рассмотрим интерпретацию формулы (1) на числовом примере. Пусть  $p = 7$ ,  $n = 6$ ,  $s = 3$ ,  $c = 2$ , а времена выполнения блоков заданы матри-

$$\text{цей } T^\varepsilon = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 4 \\ 2 & 2 & 1 \\ 1 & 3 & 3 \\ 4 & 1 & 2 \\ 3 & 2 & 1 \\ 1 & 4 & 1 \end{pmatrix}. \text{ Тогда } m = 3, \text{ следовательно, функционал (1) примет вид:}$$

$$T_n^{ac}(7,6,3,2) = \max_{1 \leq u_1 \leq u_2 \leq 3} \left[ \sum_{i=1}^{u_1} t_{q+(i-1)2,1}^e + \sum_{i=u_1}^{u_2} t_{q+(i-1)2,2}^e + \sum_{i=u_2}^3 t_{q+(i-1)2,3}^e \right], \quad q = \overline{1,2}.$$

1) При  $q=1$  имеем:

$$\begin{aligned} & \max_{1 \leq u_1 \leq u_2 \leq 3} \left[ \sum_{i=1}^{u_1} t_{q+(i-1)2,1}^e + \sum_{i=u_1}^{u_2} t_{q+(i-1)2,2}^e + \sum_{i=u_2}^3 t_{q+(i-1)2,3}^e \right] = \\ & = \max_{1 \leq u_1 < u_2 \leq 3} \left[ \sum_{i=1}^{u_1} t_{2i-1,1}^e + \sum_{i=u_1}^{u_2} t_{2i-1,2}^e + \sum_{i=u_2}^3 t_{2i-1,3}^e \right] \end{aligned}$$

Если  $u_1 = 1$ ,  $u_2 = \overline{1,3}$ , если  $u_1 = 2$ ,  $u_2 = 2,3$ , если  $u_1 = 3$ ,  $u_2 = 3$ , тогда:

$$\begin{aligned} & \max_{(1 \leq u_1 \leq u_2 \leq 3)} \left[ \sum_{i=1}^{u_1} t_{2i-1,1}^e + \sum_{i=u_1}^{u_2} t_{2i-1,2}^e + \sum_{i=u_2}^3 t_{2i-1,3}^e \right] = \\ & = \max \left[ \begin{array}{l} \sum_{i=1}^1 t_{2i-1,1}^e + \sum_{i=1}^1 t_{2i-1,2}^e + \sum_{i=1}^1 t_{2i-1,3}^e, \quad \sum_{i=1}^1 t_{2i-1,1}^e + \sum_{i=1}^2 t_{2i-1,2}^e + \sum_{i=2}^3 t_{2i-1,3}^e, \\ \sum_{i=1}^1 t_{2i-1,1}^e + \sum_{i=1}^3 t_{2i-1,2}^e + \sum_{i=3}^3 t_{2i-1,3}^e, \quad \sum_{i=1}^2 t_{2i-1,1}^e + \sum_{i=2}^2 t_{2i-1,2}^e + \sum_{i=2}^3 t_{2i-1,3}^e, \\ \sum_{i=1}^2 t_{2i-1,1}^e + \sum_{i=2}^2 t_{2i-1,2}^e + \sum_{i=3}^3 t_{2i-1,3}^e, \quad \sum_{i=1}^3 t_{2i-1,1}^e + \sum_{i=3}^3 t_{2i-1,2}^e + \sum_{i=3}^3 t_{2i-1,3}^e \end{array} \right] = \\ & = \max \left[ \begin{array}{l} \frac{t_{1,1}^e + t_{1,2}^e + t_{1,3}^e + t_{3,3}^e + t_{5,3}^e}{t_{1,1}^e + t_{1,2}^e + t_{3,2}^e + t_{3,3}^e + t_{5,3}^e}, \quad \frac{t_{1,1}^e + t_{1,2}^e + t_{3,2}^e + t_{3,3}^e + t_{5,3}^e}{t_{1,1}^e + t_{1,2}^e + t_{3,2}^e + t_{3,3}^e + t_{5,3}^e}, \\ \frac{t_{1,1}^e + t_{3,1}^e + t_{3,2}^e + t_{5,2}^e + t_{5,3}^e}{t_{1,1}^e + t_{3,1}^e + t_{5,1}^e + t_{5,2}^e + t_{5,3}^e}, \quad \frac{t_{1,1}^e + t_{3,1}^e + t_{5,1}^e + t_{5,2}^e + t_{5,3}^e}{t_{1,1}^e + t_{3,1}^e + t_{5,1}^e + t_{5,2}^e + t_{5,3}^e} \end{array} \right] \\ & = \max \left[ \begin{array}{l} \underline{3+1+4+3+1}, \quad 3+1+3+3+1, \\ 3+1+3+2+1, \quad 3+1+3+3+1, \\ 3+1+3+2+1, \quad 3+1+3+2+1 \end{array} \right] = \max [12, 11, 10, 11, 10, 10] = 12. \end{aligned}$$



2) При  $q = 2$  имеем:

$$\begin{aligned} & \max_{1 \leq u_1 \leq u_2 \leq 3} \left[ \sum_{i=1}^{u_1} t_{q+(i-1)2,1}^{\varepsilon} + \sum_{i=u_1}^{u_2} t_{q+(i-1)2,2}^{\varepsilon} + \sum_{i=u_2}^3 t_{q+(i-1)2,3}^{\varepsilon} \right] = \\ & = \max_{1 \leq u_1 \leq u_2 \leq 3} \left[ \sum_{i=1}^{u_1} t_{2i,1}^{\varepsilon} + \sum_{i=u_1}^{u_2} t_{2i,2}^{\varepsilon} + \sum_{i=u_2}^3 t_{2i,3}^{\varepsilon} \right] \end{aligned}$$

Если  $u_1 = 1$ ,  $u_2 = 1, 3$ , если  $u_1 = 2$ ,  $u_2 = 2, 3$ ,  $u_1 = 3$ ,  $u_2 = 3$ , тогда:

$$\begin{aligned} & \max_{1 \leq u_1 \leq u_2 \leq 3} \left[ \sum_{i=1}^{u_1} t_{2i,1}^{\varepsilon} + \sum_{i=u_1}^{u_2} t_{2i,2}^{\varepsilon} + \sum_{i=u_2}^3 t_{2i,3}^{\varepsilon} \right] = \\ & = \max \begin{bmatrix} \sum_{i=1}^1 t_{2i,1}^{\varepsilon} + \sum_{i=1}^1 t_{2i,2}^{\varepsilon} + \sum_{i=1}^3 t_{2i,3}^{\varepsilon}, & \sum_{i=1}^1 t_{2i,1}^{\varepsilon} + \sum_{i=1}^2 t_{2i,2}^{\varepsilon} + \sum_{i=2}^3 t_{2i,3}^{\varepsilon}, \\ \sum_{i=1}^2 t_{2i,1}^{\varepsilon} + \sum_{i=1}^1 t_{2i,2}^{\varepsilon} + \sum_{i=3}^3 t_{2i,3}^{\varepsilon}, & \sum_{i=1}^2 t_{2i,1}^{\varepsilon} + \sum_{i=2}^2 t_{2i,2}^{\varepsilon} + \sum_{i=2}^3 t_{2i,3}^{\varepsilon}, \\ \sum_{i=1}^3 t_{2i,1}^{\varepsilon} + \sum_{i=2}^1 t_{2i,2}^{\varepsilon} + \sum_{i=3}^1 t_{2i,3}^{\varepsilon}, & \sum_{i=1}^3 t_{2i,1}^{\varepsilon} + \sum_{i=3}^1 t_{2i,2}^{\varepsilon} + \sum_{i=3}^3 t_{2i,3}^{\varepsilon} \end{bmatrix} = \\ & = \max \begin{bmatrix} t_{2,1}^{\varepsilon} + t_{2,2}^{\varepsilon} + t_{2,3}^{\varepsilon} + t_{4,3}^{\varepsilon} + t_{6,3}^{\varepsilon}, & t_{2,1}^{\varepsilon} + t_{2,2}^{\varepsilon} + t_{4,2}^{\varepsilon} + t_{4,3}^{\varepsilon} + t_{6,3}^{\varepsilon}, \\ t_{2,1}^{\varepsilon} + t_{2,2}^{\varepsilon} + t_{4,2}^{\varepsilon} + t_{6,2}^{\varepsilon} + t_{6,3}^{\varepsilon}, & t_{2,1}^{\varepsilon} + t_{4,1}^{\varepsilon} + t_{4,2}^{\varepsilon} + t_{4,3}^{\varepsilon} + t_{6,3}^{\varepsilon}, \\ t_{2,1}^{\varepsilon} + t_{4,1}^{\varepsilon} + t_{4,2}^{\varepsilon} + t_{6,2}^{\varepsilon} + t_{6,3}^{\varepsilon}, & t_{2,1}^{\varepsilon} + t_{4,1}^{\varepsilon} + t_{6,1}^{\varepsilon} + t_{6,2}^{\varepsilon} + t_{6,3}^{\varepsilon} \end{bmatrix} = \\ & = \max \begin{bmatrix} 2+2+1+2+1, & 2+2+1+2+1, \\ 2+2+1+4+1, & 2+4+1+2+1, \\ 2+4+1+4+1, & 2+4+1+4+1 \end{bmatrix} = \max [8, 8, 10, 10, 12, 12] = 12. \end{aligned}$$

Следовательно, минимальное общее время выполнения  $n = 6$  запродаваемые  $c = 2$  экспедиторами маркетингового центра неоднородных распределенных взаимодействующих конкурирующих логистических потоков,

структурированных на  $s = 3$  блока, в многопользовательской системе с  $p = 7$  потребителями в асинхронном режиме составит  $T_{ac}^{ac}(p, n, s, c) = 12$ .

Рассмотрим алгоритм, который позволяет решить задачу определения минимального общего времени  $T_{ac}^{ac}(p, n, s, c)$  значительно эффективнее по сравнению с предложенным выше. По заданным  $s, c, m = \frac{n}{c}$  и матрице

$T^e = [t_{q+(i-1)c, j}^e]$ ,  $q = \overline{1, c}$ ,  $i = \overline{1, m}$ ,  $j = \overline{1, s}$ , строим  $c$ -слойный вершинно-взвешенный граф  $G_1^c$ . Каждый  $q$ -й,  $q = \overline{1, c}$ , слой графа  $G_1^c$  состоит из вершин  $t_{q+(i-1)c, j}^e$ ,  $i = \overline{1, m}$ ,  $j = \overline{1, s}$ , которые расположены в узлах прямоугольной  $m \times s$ -решетки, причем  $t_{q, 1}^e$  – входные вершины,  $t_{q, s}^e$  – выходные,  $q = \overline{1, c}$ ,  $t = (m-1)c$  (рис. 4). Дуги в каждом слое  $q$  отражают линейный порядок выполнения блоков  $Q_j$ ,  $j = \overline{1, s}$ , материального потока каждым из  $(q+(i-1)c)$ -м потребителем,  $q = \overline{1, c}$ ,  $i = \overline{1, m}$ , а также линейный порядок использования каждого блока всеми  $m$  потоками.

Таким образом, имеет место следующая теорема.

**Теорема 1.** Минимальное общее время выполнения  $n = mc$ ,  $m \geq 2$ , сопровождаемые  $c$ ,  $2 \leq c \leq p$  экспедиторами неоднородных распределенных

конкурирующих логистических потоков, структурированных на  $2 \leq s \leq \left\lfloor \frac{p}{c} \right\rfloor$

блоков с временами выполнения блоков и с учетом дополнительных расхо-

дов  $[t_{ij}^e]$ ,  $i = \overline{1, n}$ ,  $j = \overline{1, s}$ , в многопотребительской системе с  $p$ ,  $\left\lfloor \frac{p}{c} \right\rfloor \geq 2$ ,

потребителями в асинхронном режиме определяется длиной критического пути в  $c$ -слоином вершинно-взвешенном графе  $G_1^c$  из начальной вершины

$t_{q, 1}^e$  в конечную  $t_{q+(m-1)c, s}^e$ ,  $q = \overline{1, c}$ ,  $m = \frac{n}{c}$ .

Доказательство теоремы основывается на анализе алгоритмов нахождения критических путей в вершинно-взвешенных графах.

**Пример 2.** Используя данные примера 1, найти минимальное общее время  $T_{\text{н}}^{\text{ac}}(p, n, s, c)$ , используя алгоритм нахождения критического пути в  $c$ -слойном вершинно-взвешенном графе  $G_1^c$ .

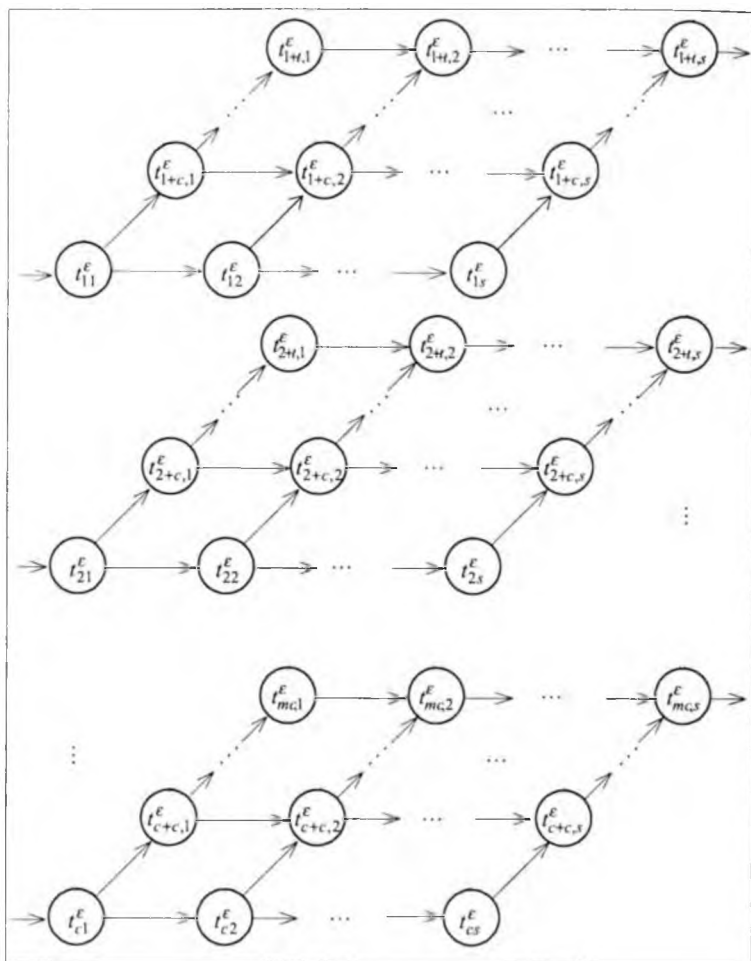


Рис. 4. Граф

По заданным  $n = 6$ ,  $s = 3$  и матрице  $\gamma^e$  строим 2-слойный ( $c = 2$ ) вершинно-взвешенный граф  $G_1^c$  (рис. 5). Каждый слой содержит  $m$  вершин, где  $m = n/c = 3$ . Длина критического пути в графе равна 12, что совпадает с минимальным общим временем, полученным в примере 1.

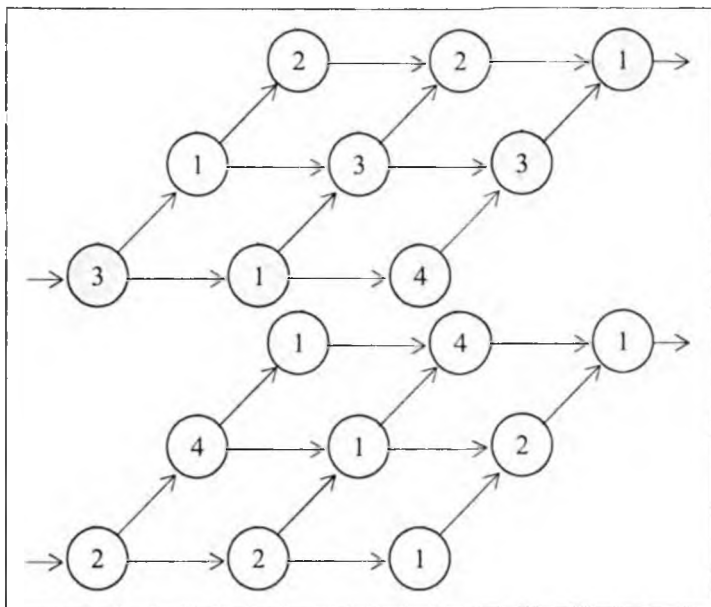


Рис. 5. С-слойный вершинно-взвешенный граф

**3. Время выполнения однородных и одинаково распределенных конкурирующих потоков.** Согласно определению 2, систему распределенных конкурирующих потоков будем считать *однородной*, если времена выполнения каждого блока  $Q_j$ ,  $j = \overline{1, s}$ , каждым из потребителей равны, т.е.

$$t_{ij}^e = t_j^e, i = \overline{1, n}, j = \overline{1, s}.$$

Диаграмма Ганта, представленная рис. 6, иллюстрирует выполнение однородных распределенных конкурирующих потоков в ЛС с параметрами:

$$p = 7, n = 4, s = 3, c = 2, T^f = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 4 \\ 3 & 1 & 4 \\ 3 & 1 & 4 \\ 3 & 1 & 4 \end{pmatrix}$$

Оценим общее время выполнения  $n$  однородных распределенных конкурирующих потоков в асинхронном режиме, сопровождаемых  $c$  экспедиторами маркетингового центра. Пусть  $(t_1^f, t_2^f, \dots, t_s^f)$  – длительности выполнения каждого из блоков  $Q_j, j = \overline{1, s}$ , логистического потока с учетом расходов  $\varepsilon, t_j^f = t_j + \varepsilon, j = \overline{1, s}$ . Обозначим длительность выполнения всего логистического потока каждым из потребителей через  $T_c^s = \sum_{j=1}^s t_j^f$ . В силу формулы вычисления общего времени выполнения  $n$  однородных конкурирующих потоков с одним сопровождаемым и с учетом того, что  $n = mc, m \geq 2, 2 \leq c \leq p$ , получаем:

$$T_n^{ac}(p, mc, s, c) = T_n^{ac}\left(\left[\frac{p}{c}\right], m, s, 1\right) = T_c^s + (m-1) \max_{1 \leq j \leq s} t_j^f$$

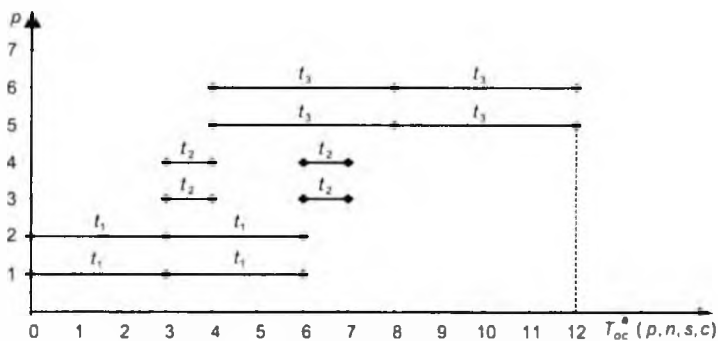


Рис. 6 Асинхронный режим – однородные процессы

Матрица времен выполнения блоков логистического потока в этом случае будет иметь размерность  $n \times s$  и состоять из  $n$  одинаковых строк.

Рассмотрим систему одинаково распределенных конкурирующих потоков. Времена выполнения всех блоков рассматриваемой логистической системы с учетом расходов  $\varepsilon$  каждым из  $i$ -х потоков совпадают и равны  $t_i^{\varepsilon}$ , т. е. справедлива цепочка равенств  $t_{i1}^{\varepsilon} = t_{i2}^{\varepsilon} = \dots = t_{is}^{\varepsilon} = t_i^{\varepsilon}$  для всех  $i = \overline{1, n}$ .

На рис. 7 представлена диаграмма Ганта, иллюстрирующая выполнение одинаково распределенных конкурирующих потоков в ЛС с параметрами:

$$p = 7, \quad n = 4, \quad s = 3, \quad c = 2, \quad T^{\varepsilon} = \begin{bmatrix} 3 & 3 & 3 \\ 4 & 4 & 4 \\ 2 & 2 & 2 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \quad \text{в случае неограниченного}$$

$\left( s \leq \left\lfloor \frac{p}{c} \right\rfloor \right)$  параллелизма.

Обозначим через  $T_{\varepsilon}^q = \sum_{i=1}^m t_{q+(i-1)c}^{\varepsilon}$  суммарное время выполнения каждого из блоков  $Q_j$ ,  $j = \overline{1, s}$ , всеми  $m$  потоками из  $q$ -й группы, а

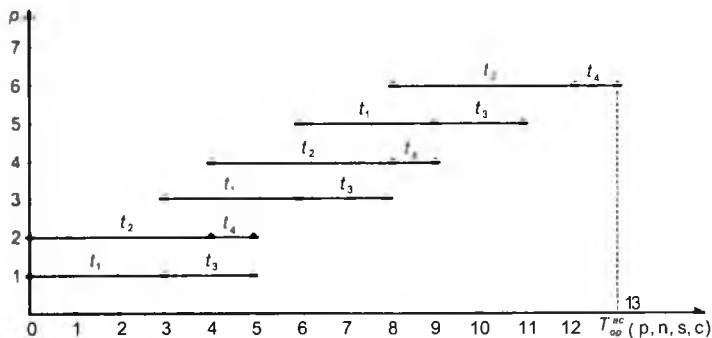


Рис. 7. Асинхронный режим – одинаково распределенные процессы

$t_{\max}^q = \max_{1 \leq i \leq m} t_{q+(i-1)c}^i$  – максимальное время выполнения блока из этой группы,  $q = \overline{1, c}$ . Справедлива следующая теорема.

**Теорема 2.** Минимальное общее время выполнения  $n$ ,  $n \geq 2$ , одинаково распределенных конкурирующих потоков, использующих структурированный на  $s$ ,  $s \geq 2$ , блоков материальный поток в многопользовательской системе с  $p$ ,  $p \geq 2$ , потребителями в асинхронном режиме при ограниченном числе рабочих мест маркетингового центра составляет величину

$T_{pp}^{ac}(p, n, s, c)$ , равную

$$T_{pp}^{ac}(p, n, s, c) = \max_{1 \leq q \leq c} (T_c^q + (s-1)t_{\max}^q).$$

Для доказательства воспользуемся функционалом (1) задачи Беллмана-Джонсона, который для системы  $m$  одинаково распределенных конкурирующих потоков из  $q$ -й группы примет вид:

$$T_{pp}^{ac}(p, n, s, c) = \max_{1 \leq u_1 \leq u_2 \leq \dots \leq u_{m-1} \leq m} \left[ \sum_{i=1}^{u_1} t_{q+(i-1)c}^i + \sum_{i=u_1}^{u_2} t_{q+(i-1)c}^i + \dots + \sum_{i=u_{m-1}}^m t_{q+(i-1)c}^i \right] = \\ = T_c^q + (s-1)t_{\max}^q$$

где  $m = \frac{n}{c}$ ,  $t_{q+(i-1)c}^i = t_{q+(i-1)c} + \varepsilon$ ,  $q = \overline{1, c}$ ,  $i = \overline{1, m}$ ,  $u_1, u_2, \dots, u_{m-1}$  – целые числа.

Предложенные методы и формулы позволяют составить расписание моментов запуска и окончания каждого из логистических потоков и тем самым решить проблему создания эффективных ЛС. Также отметим, что рассмотренное обобщение математической модели с одним конвейером на случай ограниченного числа позволяет установить взаимосвязи мультиконвейерной обработки с аналогичной обработкой при одном конвейере, получить аналитические оценки общего времени выполнения конкурирующих потоков при ограниченном параллелизме и провести математическое исследование эффективности и оптимальности мультиконвейерной организации конкурирующих потоков. Предложенная математическая модель орга-

низации распределенных логистических систем и методы нахождения минимального общего времени выполнения конкурирующих логистических потоков послужили основой для создания алгоритмов решения задач оптимизации транспортных и производственно-сбытовых процессов предприятиями КУП «Минскхлебпром».

### Л и т е р а т у р а

1. Коваленко, Н.С., Павлов, П.А. Математическая модель организации производственного процесса на поточных линиях / Н.С. Коваленко, П.А. Павлов // Проблемы прогнозирования и государственного регулирования социально-экономического развития: материалы VII Межд. науч. конф. Минск, 19-20 окт. 2006 г. – Мн: НИЭИ Мин-ва экономики Респ. Беларусь, 2007. - С. 326-336.

2. Коваленко, Н.С., Павлов, П.А. Математическая модель параллельных производственных процессов / Н.С. Коваленко, П.А. Павлов // Проблемы прогнозирования и государственного регулирования социально-экономического развития: материалы VIII Межд. науч. конф. Минск, 18-19 окт. 2007 г. - Мн: НИЭИ Мин-ва экономики Респ. Беларусь, 2007. - С. 408-425.

3. Коваленко, Н.С., Кляус, П.С., Павлов, П.А. Организация синхронного выполнения параллельных распределенных процессов на поточных линиях / Н.С. Коваленко, П.С. Кляус, П.А. Павлов // Проблемы прогнозирования и государственного регулирования социально-экономического развития: материалы IX Междунар. науч. конф. Минск, 16-17 окт. 2008 г. – Мн.: НИЭИ Мин-ва экономики Респ. Беларусь, 2008. – С. 482-496.

4. Коваленко, Н.С., Павлов, П.А. Оптимизация распределенных вычислений при организации производственно-сбытовых процессов / Н.С. Коваленко, П.А. Павлов // Проблемы прогнозирования и государственного регулирования социально-экономического развития: материалы X Междунар. науч. конф. Минск, 15-16 окт. 2009 г. - Мн.: НИЭИ Мин-ва экономики Респ. Беларусь, 2009. - С. 445-462.

5. Kapitonova, Yu. V., Kovalenko N.S., Pavlov, P.A. Optimality of systems of identically distributed competing processes / Yu. V. Kapitonova, N.S. Kovalenko, P.A. Pavlov // Cybernetics and Systems Analysis. -New York: Springer, 2006. - P. 793-799.

