Мусафиров, Э. В. О методе отражающей функции исследования процессов, протекающих в экономике / Э. В. Мусафиров // Механизмы устойчивого развития инновационных социально-экономических систем : материалы международной науч.-практ. конф., Бобруйск, 30 марта 2006 г. / М-во образования РБ, БГЭУ ; [редкол.: В.Н. Гавриленко и др.]. - Минск : БГЭУ, 2006. - С. 160-162.

Э.В. Мусафиров, канд. физ.-мат. наук
Филиал БГЭУ (Пинск)

О МЕТОДЕ ОТРАЖАЮЩЕЙ ФУНКЦИИ ИССЛЕДОВАНИЯ ПРОЦЕССОВ, ПРОТЕКАЮЩИХ В ЭКОНОМИКЕ

Многие процессы (например, уровень инфляции, государственного долга, экономического роста, безработицы, взаимосвязь денежного и реального рынков и т.д.) можно моделировать с помощью систем обыкновенных дифференциальных уравнений. Однако, часто эти системы невозможно проинтегрировать в квадратурах. В этом случае можно проводить исследование свойств решений систем с помощью отражающей функции (ОФ). ОФ является выражением симметрий решений систем и позволяет изучать вопросы существования и устойчивости периодических решений, существования решений краевых задач, вопросы глобального поведения семейств решений. Рассмотрим систему

$$\dot{x} = X(t, x), \quad t \in \mathbf{R}, x \in \mathbf{R}^n, \tag{1}$$

решения которой однозначно определяются начальными условиями. Пусть общее решение этой системы в форме Коши имеет вид $x = \varphi(t; t_0, x_0)$. Функция $F(t, x) := \varphi(-t; t, x)$ – *ОФ* системы (1), определенная в некоторой области, содержащей гиперплоскость $t = 0$. При этом, $F(t, x)$ – ОФ системы (1) тогда и только тогда, когда эта F является решением системы уравнений в частных производных, называемой *основным соотношением*,

$$\frac{\partial F(t,x)}{\partial t} + \frac{\partial F(t,x)}{\partial x} X(t,x) + X(-t, F(t,x)) = 0,$$

с начальным условием $F(0, x) \equiv x$. Если $F(t, x)$ – ОФ системы (1), то для любого решения $x(t)$ этой системы верно тождество $F(t, x(-t)) \equiv x(t)$. Таким образом, по прошлому состоянию системы можно узнать ее будущее состояние.

Если система (1) 2ω-периодична по t и $F(t,x)$ – ее ОФ, то $F(-\omega, x) = \varphi(\omega; -\omega, x)$ – *отображение за период* $[-\omega; \omega]$ (*отображение Пуанкаре*) этой системы. Поэтому решение $\varphi(t; -\omega, x_0)$ 2ω-периодической системы (1) является 2ω-периодическим тогда и только тогда, когда x_0 – решение недифференциальной системы $F(-\omega, x) = x$. Это решение устойчиво тогда и только тогда, когда устойчива неподвижная точка отображения $x \mapsto F(-\omega, x)$.

Любая непрерывно дифференцируемая функция $F(t, x)$, удовлетворяющая условию $F(-t, F(t, x)) \equiv F(0, x) \equiv x$, является ОФ целого класса систем вида

$$\dot{x} = -\frac{1}{2}\frac{\partial F}{\partial x}(-t, F(t,x))\left(\frac{\partial F(t,x)}{\partial t} - 2S(t,x)\right) - S(-t, F(t,x)), \tag{2}$$

где $S(t, x)$ – произвольная вектор-функция, при которой решения системы (2) однозначно определяются начальными условиями.

Поэтому все системы вида (1) разбиваются на классы эквивалентности вида (2) так, что каждый класс характеризуется своей ОФ, называемой *ОФ класса*. Все системы из одного класса имеют один и тот же оператор сдвига на интервале $(-\omega; \omega)$. Поэтому все эквивалентные 2ω-периодические системы имеют одно и то же отображение за период $[-\omega; \omega]$. Система, получающаяся из системы (2) при $S(t, x) \equiv 0$, называется *простой*.

При изучении свойств решений данной дифференциальной системы эту систему можно заменить эквивалентной (в смысле совпадения ОФ). Иногда это можно сделать и в том случае, когда ОФ неизвестна. Например, в классе эквивалентности, в котором существует стационарная система, эта стационарная система может играть роль такой системы. В других классах роль стационарной системы выполняет *простая система*

$$\dot{x} = -\frac{1}{2}\frac{\partial F}{\partial x}(-t, F(t,x))\frac{\partial F(t,x)}{\partial t} \equiv -\frac{1}{2}\left(\frac{\partial F(t,x)}{\partial x}\right)^{-1}\frac{\partial F(t,x)}{\partial t},$$

где $F(t,x)$ – ОФ этой системы.

ОФ линейной системы

$$\dot{x} = P(t)x, \quad t \in \mathbf{R}, x \in \mathbf{R}^n, \tag{3}$$

где $P(t)$ – непрерывная $n \times n$ -матрица, также линейна.

Т.к. ОФ представима в виде $F(t,x) \equiv F(t)x$. Матрица $F(t)$ в этом случае называется *отражающей матрицей (ОМ)* системы (3). Если $X(t)$ – фундаментальная матрица решений системы (3), то $F(t) \equiv X(-t)X^{-1}(t)$. Поэтому для любой ОМ $F(t)$ справедливы соотношения $F(-t)F(t) \equiv F(0) = E$, где E – единичная $n \times n$-матрица. *Основное соотношение* в этом случае имеет вид $\dot{F}(t) + F(t)P(t) + P(-t)F(t) = 0$, $F(0) = E$.

Всякая линейная система с ОМ $F(t)$ может быть записана в виде $\dot{x} = \left(-\frac{1}{2}F(-t)\dot{F}(t) + F(-t)R(t) - R(-t)F(t)\right)x$, где $R(t)$ – произвольная $n \times n$-матрица. При $R(t) \equiv 0$ получим *простую линейную систему* $\dot{x} = -\frac{1}{2}F(-t)\dot{F}(t)x$.

Если $P(t)$ – 2ω-периодическая и $F(t)$ – ОМ системы (3), то $F(-\omega)$ – *матрица монодромии* этой системы на периоде $[-\omega; \omega]$, а решения μ_i, $i = \overline{1,n}$ уравнения $\det(F(-\omega) - \mu E) = 0$ являются *мультипликаторами* системы (3).

Исследования систем с помощью ОФ можно найти в [Мироненко В.И. Отражающая функция и исследование многомерных дифференциальных систем. Гомель: ГГУ им. Ф. Скорины, 2004. 196 с.]