УДК 517.925

# НЕУСТОЙЧИВОСТЬ НУЛЕВОГО РЕШЕНИЯ ДОПУСТИМО ВОЗМУЩЕННОЙ ОБОБЩЕННОЙ СИСТЕМЫ ЛЭНГФОРДА

**Мусафиров Эдуард Владимирович, к.ф.-м.н., доцент**
**Гродненский государственный университет имени Янки Купалы**
Musafirov Eduard, PhD, musafirov@bk.ru
Yanka Kupala State University of Grodno

*Для автономной трехмерной квадратичной обобщенной системы Лэнгфорда с пятью параметрами получены возмущения, не изменяющие отражающую функцию Мироненко. Полученные неавтономные возмущенные системы сохраняют многие качественные свойства решений исходной системы.*

**Введение.** В.И. Мироненко ввел понятие отражающей функции для исследования качественного поведения решений системы обыкновенных дифференциальных уравнений (ОДУ)

$$\dot{x} = X(t,x), \quad t \in \mathrm{P}, x \in D \subset \mathrm{P}^n, \tag{1}$$

где $X(t,x)$ – непрерывно дифференцируемая функция. Эта функция известна сейчас как отражающая функция Мироненко (ОФМ) и успешно применяется для решения многих задач качественной теории ОДУ [1-4]. Более того, решения различных систем ОДУ с одной и той же ОФМ обладают многими одинаковыми качественными свойствами. Поэтому изучение качественных свойств решений для целого класса систем с одной и той же ОФМ может быть сведено к соответствующему изучению простой (хорошо изученной) системы. В таких случаях неавтономные системы вида (1) могут быть исследованы на основе соответствующих автономных систем. Другими словами, некоторая (хорошо изученная) автономная система может быть возмущена до неавтономной системы (1) с помощью специальных возмущений, сохраняющих ОФМ, которые называются допустимыми возмущениями.

В данной работе описанный подход применяется для обобщенной системы Лэнгфорда:

$$\begin{aligned} \dot{x} &= ax + by + xz, \\ \dot{y} &= cx + dy + yz, \\ \dot{z} &= ez - \left(x^2 + y^2 + z^2\right), \quad (x,y,z) \in \mathrm{P}^3, \end{aligned} \tag{2}$$

где $a,b,c,d,e \in \mathrm{P}$ – параметры системы.

Краткая теория ОФМ. Прежде всего, приведем краткую информацию по теории ОФМ из [1]. Для системы (1) ОФМ определяется следующим образом: $F(t,x):=\varphi(-t;t,x)$, где $x=\varphi(t;t_0,x_0)$ – общее решение в форме Коши системы (1). Хотя ОФМ определяется через общее решение системы (1), иногда удается найти ОФМ даже для неинтегрируемых систем.

Функция $F(t,x)$ является ОФМ системы (1) тогда и только тогда, когда она является решением системы дифференциальных уравнения с частными производными $\frac{\partial F}{\partial t}+\frac{\partial F}{\partial x}X(t,x)+X(-t,F)=0$ с начальным условием $F(0,x)=x$.

Если функция $F(t,x)$ – непрерывно дифференцируема и удовлетворяет условию $F(-t,F(t,x))\equiv F(0,x)\equiv x$, то она является ОФМ множества систем. Более того, все системы из этого множества имеют один и тот же оператор сдвига на любом интервале $(-\alpha;\alpha)$. Если система (1) $2\omega$-периодична по $t$, и $F(t,x)$ – ее ОФМ, то $F(-\omega,x)=\varphi(\omega;-\omega,x)$ – отображение системы за период $[-\omega,\omega]$ (отображение Пуанкаре). И, следовательно, все $2\omega$-периодические по $t$ системы из множества с одной и той же ОФМ имеют одинаковое отображение за период $[-\omega,\omega]$.

Пусть $2\omega$-периодическая по $t$ система (1) и система

$$\dot{x}=Y(t,x),\quad t\in \mathrm{P},\, x\in D\subset \mathrm{P}^n \tag{3}$$

имеют одну и ту же ОФМ $F(t,x)$. Если решение $\varphi(t;-\omega,x)$ системы (1) и решение $\psi(t;-\omega,x)$ системы (3) продолжимы на $[-\omega,\omega]$, то отображение за период $[-\omega,\omega]$ для системы (1) есть $\varphi(\omega;-\omega,x)\equiv F(-\omega,x)\equiv\psi(\omega;-\omega,x)$, хотя система (3) может быть непериодической. То есть можно установить взаимно однозначное соответствие между $2\omega$-периодическими решениями системы (1) и решениями двухточечной краевой задачи $y(-\omega)=y(\omega)$ для системы (3).

Благодаря работе [2] стало возможным выяснить, имеют ли две разные системы ОДУ одинаковую ОФМ (при этом сама ОФМ может быть неизвестна).

**Теорема 1** [2]. *Пусть вектор-функции* $\Delta_i(t,x)$ *(*$i=\overline{1,m}$*, где* $m\in \mathrm{N}$ *или* $m=\infty$*) являются решениями уравнения*

$$\frac{\partial\Delta}{\partial t}+\frac{\partial\Delta}{\partial x}X-\frac{\partial X}{\partial x}\Delta=0 \tag{4}$$

*и* $\alpha_i(t)$ *– произвольные скалярные непрерывные нечетные функции. Тогда ОФМ любой возмущенной системы вида* $\dot{x}=X(t,x)+\sum_{i=1}^{m}\alpha_i(t)\Delta_i(t,x)$, $t\in \mathrm{P}$, $x\in D\subset \mathrm{P}^n$ *совпадает с ОФМ системы (1).*

Допустимые возмущения. Для системы (2) искались допустимые возмущения вида $\Delta\cdot\alpha(t)$, где

$$\Delta = \left( \sum_{i+j+k=0}^{n} q_{ijk} x^i y^j z^k, \quad \sum_{i+j+k=0}^{n} r_{ijk} x^i y^j z^k, \quad \sum_{i+j+k=0}^{n} s_{ijk} x^i y^j z^k \right)^{\mathrm{T}},$$

$q_{ijk}, r_{ijk}, s_{ijk} \in \mathrm{P}$, $i, j, k, n \in \mathrm{N} \cup \{0\}$; $\alpha(t)$ – произвольная непрерывная скалярная нечетная функция. Для этого искались значения параметров $a, b, c, d, e$, $q_{ijk}, r_{ijk}, s_{ijk}$ при которых справедливо соотношение (4), где $X(t, x, y, z) = \left(ax + by + xz, cx + dy + yz, ez - x^2 - y^2 - z^2\right)^{\mathrm{T}}$ – правая часть исходной невозмущенной системы (2). В результате удалось получить следующее утверждение.

**Теорема 2.** *Пусть* $\alpha_i(t)$ $(i = \overline{1,3})$ *– произвольные скалярные непрерывные нечетные функции. Тогда:*

*1) ОФМ системы (2) совпадает с ОФМ системы* $\dot{x} = (ax + by + xz)(1 + \alpha_1(t))$, $\dot{y} = (cx + dy + yz)(1 + \alpha_1(t))$, $\dot{z} = \left(ez - \left(x^2 + y^2 + z^2\right)\right)(1 + \alpha_1(t))$;

*2) при* $c = -b$, $d = a$ *ОФМ системы (2) совпадает с ОФМ системы*

$$\begin{aligned} \dot{x} &= (ax + by + xz)(1 + \alpha_1(t)) + x(a + z)\alpha_2(t) + y\alpha_3(t), \\ \dot{y} &= (-bx + ay + yz)(1 + \alpha_1(t)) + y(a + z)\alpha_2(t) - x\alpha_3(t), \\ \dot{z} &= \left(ez - x^2 - y^2 - z^2\right)(1 + \alpha_1(t) + \alpha_2(t)). \end{aligned} \tag{5}$$

Доказательство. Докажем второе утверждение теоремы. При $c = -b$, $d = a$ правая часть системы (2) $X = \left(ax + by + xz, -bx + ay + yz, ez - x^2 - y^2 - z^2\right)^{\mathrm{T}}$ и ее матрица Якоби

$$\frac{\partial X(t, x, y, z)}{\partial(x, y, z)} = \begin{pmatrix} a + z & b & x \\ -b & a + z & y \\ -2x & -2y & e - 2z \end{pmatrix}.$$

Выпишем вектор-множители для $\alpha_i(t)$ в правой части системы (5):

$$\Delta_1 = \left(ax + by + xz, -bx + ay + yz, ez - x^2 - y^2 - z^2\right)^{\mathrm{T}},$$

$$\Delta_2 = \left(x(a + z), y(a + z), ez - x^2 - y^2 - z^2\right)^{\mathrm{T}},$$

$$\Delta_3 = (y, -x, 0)^{\mathrm{T}}.$$

Последовательной проверкой тождества (4) для каждого вектора-множителя $\Delta_i$, убедимся в его истинности. Покажем это, например, для $\Delta_2$. Матрица Якоби

$$\frac{\partial \Delta_2}{\partial(x, y, z)} = \begin{pmatrix} a + z & 0 & x \\ 0 & a + z & y \\ -2x & -2y & e - 2z \end{pmatrix}.$$

Следовательно

$$\frac{\partial \Delta_2}{\partial t}+\frac{\partial \Delta_2}{\partial (x,y,z)}X(t,x,y,z)-\frac{\partial X(t,x,y,z)}{\partial (x,y,z)}\Delta_2 \equiv$$

$$\equiv \begin{pmatrix}0\\0\\0\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}a+z & 0 & x\\ 0 & a+z & y\\ -2x & -2y & e-2z\end{pmatrix}\begin{pmatrix}ax+by+xz\\ -bx+ay+yz\\ ez-x^2-y^2-z^2\end{pmatrix}-$$

$$-\begin{pmatrix}a+z & b & x\\ -b & a+z & y\\ -2x & -2y & e-2z\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x(a+z)\\ y(a+z)\\ ez-x^2-y^2-z^2\end{pmatrix}\equiv\begin{pmatrix}0\\0\\0\end{pmatrix}.$$

Тогда второе утверждение теоремы следует из теоремы 1. Первое утверждение теоремы доказываются аналогично. ■

При моделировании реальных процессов обычно считается, что время $t \geq 0$, поэтому требование нечетности функций $\alpha_i(t)$ не является существенным, так как они могут быть непрерывно нечетным образом продолжены на отрицательную временную полуось (при условии $\alpha_i(0)=0$).

Теорему 2 можно использовать для изучения качественного поведения решений допустимых возмущенных систем.

**Неустойчивость решения.** Приведем достаточное условие неустойчивости решения $x=y=z=0$ системы (5).

**Теорема 3.** *Пусть* $\alpha_i(t)$ $(i=\overline{1,3})$ *– скалярные непрерывные функции (не обязательно нечетные). Если* $e=0$ *и* $\alpha_1(t)+\alpha_2(t)\geq l>-1$ $\forall t\geq 0$ $(l=\mathrm{const})$, *то решение* $x=y=z=0$ *системы (5) неустойчиво (по Ляпунову).*

Доказательство. Рассмотрим функцию $V(x,y,z)=-z^3$. В любой окрестности начала координат $\mathrm{P}^3$ функция $V$ ограничена и существует область такая, что $V>0$. При $e=0$ производная функции $V$ в силу системы (5) равна $\dot V=3z^2\left(x^2+y^2+z^2\right)\left(1+\alpha_1(t)+\alpha_2(t)\right)$. Так как $\alpha_1(t)+\alpha_2(t)\geq l>-1$ $\forall t\geq 0$, то $\forall t\geq 0$ имеем $\dot V\geq 3z^2\left(x^2+y^2+z^2\right)\left(1+l\right)$, где $l>-1$. Учитывая, что $3z^2\left(x^2+y^2+z^2\right)>0$ $\forall (x,y,z)\neq(0,0,0)$, то $\dot V$ – положительно определенная функция. Тогда по теореме 4.7.1 [5] (с учетом следствия 4.7.3 [5] и его доказательства) решение $x=y=z=0$ системы (5) неустойчиво. ■

**Заключение.** Получено множество нестационарных систем обыкновенных дифференциальных уравнений, ОФМ которых совпадает с ОФМ автономной обобщенной системы Ленгфорда (2). Совпадение ОФМ этих систем определяет совпадение некоторых качественных свойств поведения их решений. Это позволило использовать результаты изучения качественного поведения решений хорошо изученной обобщенной системы Лэнгфорда для изучения более сложных по своей природе нестационарных возмущенных систем. Для таких систем (вида (5)) были получены условия, при которых точка равновесия неустойчива (по Ляпунову).

Список использованных источников

1. Мироненко В. И. Отражающая функция и исследование многомерных дифференциальных систем: Монография / В. И. Мироненко; Мин. образов. РБ, УО “ГГУ им. Ф. Скорины“. – Гомель, 2004. – 196 с.

2. Mironenko, V. I. How to construct equivalent differential systems / V. I. Mironenko, V. V. Mironenko // Applied Mathematics Letters. – 2009. – Vol. 22. – № 9. – P. 1356-1359.

3. Мусафиров, Э. В. О простых линейных дифференциальных системах / Э. В. Мусафиров // Вестник БГУ. Серия 1, Физика. Математика. Информатика. – 2011. – № 2. – С. 86-90.

4. Мусафиров, Э. В. Двумерные линейные дифференциальные системы с отражающей матрицей, представляющей собой произведение двух матричных экспонент / Э.В.Мусафиров // Вестник фонда фундаментальных исследований. – 2006. – № 4. – С. 75-84.

5. Liao, X. Stability of Dynamical Systems: Monograph Series on Nonlinear Science and Complexity / X. Liao, L. Q. Wang, P. Yu; Elsevier. – Amsterdam, 2007. – 706 p.