УДК 517.9

МОДЕЛИРОВАНИЕ ДВИЖЕНИЯ ТРАНСПОРТНОГО ПОТОКА

Погребняк Максим Анатольевич, аспирант
Ярославский государственный университет им. П. Г. Демидова
Pogrebnyak Maxim, postgraduate, pogrebnyakmaksim@mail.ru
P. G. Demidov Yaroslavl State University

Работа посвящена математическому моделированию движения транспортного потока. Результатом работы является новая математическая модель, описывающая динамику движения автомобилей. Модель представляет собой систему дифференциальных уравнений с запаздывающим аргументом.

Работа посвящена построению новой математической модели движения транспортного потока. За $x_n(t)$ $(1 \le n \le N, N \in \mathbb{N})$ обозначено положение транспортного средства в момент времени t, а $\dot{x}_n(t)$ и $\ddot{x}_n(t)$ его скорость и ускорение соответственно. Все автомобили считаются материальными точками, поэтому их внутренняя структура и внешние габариты не учитываются.

Всё движение автомобиля разделено на две фазы: разгон и торможение. Это обусловлено тем, что водитель, управляя автомобилем, может нажимать на педаль газа, увеличивая скорость, или же на педаль тормоза или сцепления, уменьшая скорость. Причём в конкретный момент времени автомобиль либо разгоняется, либо тормозит. Для описания такого поведения введена релейная функцию вида:

$$R_n = \begin{cases} 1, & \text{если } \Delta x_n(t,\tau) > S + l_n, \\ 0, & \text{если } \Delta x_n(t,\tau) \le S + l_n, \end{cases}$$

где $\Delta x_n(t,\tau) = x_{n-1}(t-\tau) - x_n(t)$ — расстояние между соседними автомобилями, τ — время реакции водителя, l_n — безопасное расстояние между автомобилями, а S — тормозной путь. Под тормозным понимается расстояние, которое проходит транспортное средство с момента срабатывания тормозной системы до полной остановки.

Для расчёта данной величины использована формула:

$$S = \frac{\dot{x}_n^2(t)}{2\mu g},$$

где μ — коэффициент трения, g — ускорение свободного падения.

$R_n = 1$ соответствует первой фазе движения — разгону, а $R_n = 0$ соответствует второй фазе движения — торможению.

Таким образом, на основе выше приведенных утверждений, была построена новая математическая модель движения транспортного потока, которая имеет вид системы дифференциальных уравнений с запаздывающим аргументом:

$$\begin{cases} \ddot{x}_n(t) = R_n \left[a_n \left(\dfrac{v_{max} - \dot{x}_{n-1}(t-\tau)}{1 + e^{k_n(-\Delta x_n(t,\tau) + s_n)}} + \Delta \dot{x}_n(t,\tau) \right) \right] + \\ \qquad + (1 - R_n) \left[q_n \left(\dfrac{\dot{x}_n(t)[\Delta \dot{x}_n(t,\tau)]}{\Delta x_n(t,\tau) - l_{n,\varepsilon}} \right) \right], \\ x_n(t) = \lambda_n, \quad \dot{x}_n(t) = v_n, \quad \text{при } t \in [-\tau, 0], \end{cases}$$

где $\Delta \dot{x}_n(t,\tau) = \dot{x}_{n-1}(t-\tau) - \dot{x}_n(t)$ — разница скоростей; $a_n > 0$ и $q_n > 0$ — коэффициенты, описывающие технические характеристики автомобиля, отвечающие за интенсивность его разгона и торможения соответственно; $v_{max} > 0$ — максимальная желаемая скорость; $l_{n,\varepsilon} > 0$ — безопасное расстояние вида $l_{n,\varepsilon} = l_n - \varepsilon$, где ε — добавка, служащая для предотвращения торможения автомобиля с бесконечной скоростью при $\Delta x_n(t,\tau)$ достаточно близком к l_n; $k_n > 0$ и $s_n > 0$ — параметры, описывающие поведения водителя: k_n показывает насколько плавно водитель преследующего автомобиля подстраивает свою скорость под впереди идущий, а s_n отражает расстояние, начиная с которого влияние впереди идущего автомобиля перестаёт превалировать; λ_n — начальное положение автомобиля; v_n — начальная скорость автомобиля.

Полученная дифференциально-разностная модель описывает каждый автомобиль потока, кроме первого. Для его описания доопределены значения $x_0(t)$ и $\dot{x}_0(t)$. В качестве $x_0(t)$ берётся расстояние, которое должен проехать автомобиль, например, это может быть расстояние до светофора или иного препятствия $x_0(t) = L$. За $\dot{x}_0(t)$ в первом слагаемом берётся максимальная желаемая скорость $\dot{x}_0(t) = v_{max}$, а во втором — скорость, до которой первому водителю необходимо сбросить свою текущую скорость $\dot{x}_0(t) = v_{min,0}$.

Для модели на основе физических законов, действующего законодательства Российской Федерации [1] и логических соображений были определены значения и единицы измерения параметров.

Для модели был проведён анализ устойчивости равномерного режима движения, при котором N автомобилей в начальный момент времени имеют одинаковую начальную скорость v_{max} и расположены на расстояниях $\Delta c_n = c_n - c_{n-1}$, где c_n — убывающая последовательность. В таком случае, для любого набора Δc_n существует гладкое многообразие решений системы вида:

$$x_n(t) = c_n + v_{max} t.$$

Устойчивость такого решения зависит от знаков выражений:

$$d_n = -\tau v_{max} + c_n - c_{n-1} - l_{n,\varepsilon}.$$

Справедлива следующая теорема:

Теорема *Если для $\forall n$ выполняется неравенство $d_n > 0$, то равномерный режим устойчив. Если хотя бы при одном каком-то i выполняется неравенство $d_n \leq 0$, то равномерный режим неустойчив.*

Из теоремы (1) следует, что если все автомобили потока двигаются на довольно большом расстоянии друг от друга, то такой режим движения устойчив. Устойчивость теряется при увеличении скорости v_{max}, времени реакции водителя τ, безопасного расстояния между автомобилями $l_{n,\varepsilon}$, или при сокращении расстояния между двумя соседними автомобилями Δc_n.

Список использованных источников

1. Постановление Правительства РФ от 23.10.1993 N 1090 (ред. от 21.12.2019) «О правилах дорожного движения» (вместе с «Основными положениями по допуску транспортных средств к эксплуатации и обязанности должностных лиц по обеспечению безопасности дорожного движения»)