УДК 517.926.7, 517.927.2

Э.В. МУСАФИРОВ

О ПРОСТЫХ ЛИНЕЙНЫХ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ СИСТЕМАХ

Various necessary conditions of simplicity of linear differential systems are obtained. The interrelation of property of simplicity of linear differential system with properties of solutions of system with the double coefficient matrix is established. Obtained results are used for the solution of two-point boundary-value problem for systems (both homogeneous and nonhomogeneous) with the double coefficient matrix.

Многие процессы, происходящие в реальных системах, моделируются с помощью систем дифференциальных уравнений, которые, как правило, не интегрируются в конечном виде, что приводит к необходимости изучать свойства решений этих систем по их виду. На качественное поведение семейств решений существенное влияние оказывает наличие, количество и расположение периодических решений. При этом для выяснения существования и количества периодических решений можно использовать отображение Пуанкаре (отображение за период) (см., например, [1]), знание которого позволяет решить вопросы существования и устойчивости периодических решений. Учитывая, что отображение за период определяется через общее решение системы, кажется, что найти явное выражение для отображения за период для неинтегрируемых в конечном виде систем невозможно. Однако иногда это удается сделать с помощью отражающей функции (ОФ) Мироненко (см. [2, 3]). Далее приведем сведения из теории ОФ, необходимые для дальнейшего изложения.

Рассмотрим систему

$$\dot{x} = X(t,x),\ \ t\in\mathbb{R},\ x\in\mathbb{R}^n, \tag{1}$$

решения которой однозначно определяются начальными условиями. Пусть общее решение этой системы в форме Коши имеет вид $x=\varphi(t;t_0,x_0)$.

Для каждой такой системы находится (см. [2, с. 11], а также [3, с. 62]) *отражающая функция* $F(t,x):=\varphi(-t;t,x)$, определенная в некоторой области, содержащей гиперплоскость $t=0$.

Функция $F(t,x)$ есть ОФ системы (1) тогда и только тогда, когда F является решением системы уравнений в частных производных, называемой *основным соотношением* (ОС),

$$\frac{\partial F(t,x)}{\partial t}+\frac{\partial F(t,x)}{\partial x}X(t,x)+X\big(-t,F(t,x)\big)=0 \tag{2}$$

с начальным условием $F(0,x)\equiv x$.

Любая непрерывно дифференцируемая функция $F(t,x)$, удовлетворяющая условию $F\big(-t,F(t,x)\big)\equiv F(0,x)\equiv x$, является ОФ целого класса систем вида (см. [3])

$$\dot{x}=-\frac{1}{2}\frac{\partial F}{\partial x}\big(-t,F(t,x)\big)\left(\frac{\partial F(t,x)}{\partial t}-2S(t,x)\right)-S\big(-t,F(t,x)\big), \tag{3}$$

где $S(t,x)$ – произвольная вектор-функция, при которой решения системы (3) однозначно определяются начальными условиями.

Поэтому все системы вида (1) разбиваются на классы эквивалентности вида (3) так, что каждый класс характеризуется своей ОФ, называемой *отражающей функцией класса*.

Все системы из одного класса имеют один и тот же оператор сдвига (см. [1, с. 11–13]) на любом интервале $(-\alpha;\alpha)$. Поэтому все эквивалентные 2ω-периодические системы имеют одно и то же отображение за период $[-\omega;\omega]$.

Пусть известно, что система (1) и система

$$\dot{y} = Y(t,x),\ \ t\in\mathbb{R},\ \ y\in\mathbb{R}^n, \tag{4}$$

принадлежат одному классу эквивалентности, и пусть одна из этих систем, скажем система (1), является 2ω-периодической. Тогда если решения $\varphi(t;-\omega,x)$ и $\psi(t;-\omega,x)$ систем (1) и (4) соответственно продолжимы на отрезок $[-\omega,\omega]$, то отображение за период $[-\omega,\omega]$ для системы (1) есть $\varphi(\omega;-\omega,x)\equiv F(-\omega,x)\equiv\psi(\omega;-\omega,x)$, хотя система (4) может быть непериодической. Отсюда следует, что между 2ω-периодическими решениями системы (1) и решениями двухточечной задачи $y(-\omega)=y(\omega)$ для системы (4) можно установить взаимно однозначное соответствие.

Таким образом, при изучении вопросов существования и устойчивости периодических решений, а также существования решений краевых задач у некоторой дифференциальной системы эту систему можно заменить эквивалентной (в смысле совпадения ОФ). Это легко сделать, когда ОФ данной системы известна. Однако иногда можно построить дифференциальную систему, эквивалентную данной, и в том случае, когда ОФ неизвестна. Например, если система (1) эквивалентна некоторой стационарной системе, то эта система совпадает с системой $\dot{x}=X(0,x)$. Таким образом, в том классе эквивалентности, в котором существует стационарная система, эта стационарная система может играть роль такой системы. В других классах роль стационарной системы выполняет *простая система* [4, 5], получающаяся из системы (3) при $S(t,x)\equiv 0$,

$$\dot{x} = -\frac{1}{2}\frac{\partial F}{\partial x}\big(-t,F(t,x)\big)\frac{\partial F(t,x)}{\partial t} \equiv -\frac{1}{2}\left(\frac{\partial F(t,x)}{\partial x}\right)^{-1}\frac{\partial F(t,x)}{\partial t},$$

где $F(t,x)$ – ОФ этой системы. Заметим, что любая стационарная система проста, однако среди простых есть и нестационарные.

Для линейной системы

$$\dot{x} = P(t)x,\ \ t\in\mathbb{R},\ \ x\in\mathbb{R}^n, \tag{5}$$

где $P(t)$ – непрерывная $n\times n$-матрица, ОФ также линейна и имеет вид $F(t,x)\equiv F(t)x$. Матрица $F(t)$, согласно [2, с. 30], называется отражающей матрицей (ОМ) системы (5). Если $X(t)$ – фундаментальная матрица решений (ФМ) системы (5), то $F(t)\equiv X(-t)X^{-1}(t)$. Поэтому для любой ОМ $F(t)$ справедливы соотношения $F(-t)F(t)\equiv F(0)=E$, где E – единичная $n\times n$-матрица. ОС в линейном случае имеет вид $\dot{F}(t)+F(t)P(t)+P(-t)F(t)=0,\quad F(0)=E$. Всякая линейная система с ОМ $F(t)$ может быть записана в виде $\dot{x}=\left(-\frac{1}{2}F(-t)\dot{F}(t)+F(-t)R(t)-R(-t)F(t)\right)x$, где $R(t)$ – произвольная $n\times n$-матрица. При $R(t)\equiv 0$ получим *простую линейную систему* $\dot{x}=-\frac{1}{2}F(-t)\dot{F}(t)x$.

Если матрица $P(t)$ – 2ω-периодическая и $F(t)$ – ОМ системы (5), то $F(-\omega)$ – *матрица монодромии* (см. [6, с. 187]) этой системы на периоде $[-\omega;\omega]$. При этом решения μ_i, $i=\overline{1,n}$, уравнения $\det\big(F(-\omega)-\mu E\big)=0$ являются *мультипликаторами* (см. [6, с. 189]) системы (5).

Заметим, что в одном классе эквивалентности с линейной системой (5) находятся и нелинейные системы, обладающие линейной ОФ, поэтому система (5) представляет интерес не только как линейное приближение системы (1).

1. Основные результаты. Пусть система (5) проста, тогда по лемме 1 из [5] для ее ОМ $F(t)$ верно тождество

$$F(t)P(t)\equiv P(-t)F(t), \tag{6}$$

а по лемме 3 из [5] верно тождество

$$F(t)\dot{P}(t) \equiv -\dot{P}(-t)F(t), \tag{7}$$

откуда вытекает следующее утверждение.

Лемма 1.1. *Пусть система (5) с непрерывно дифференцируемой матрицей $P(t)$ проста и $F(t)$ – ее ОМ, тогда*

$$F(t)P(t)\dot{P}(t) \equiv -P(-t)\dot{P}(-t)F(t). \tag{8}$$

Доказательство. Пусть система (5) проста, тогда по лемме 3 из [5] для ее ОМ $F(t)$ верно тождество (7). Умножив тождество (7) на матрицу $P(-t)$ слева, получим $P(-t)F(t)\dot{P}(t) \equiv -P(-t)\dot{P}(-t)F(t)$. По лемме 1 из [5] верно тождество (6), тогда из последних двух тождеств получим тождество (8). Лемма доказана.

Из доказанной леммы вытекают следующие утверждения.

Следствие 1.1. *Если система (5) с непрерывно дифференцируемой матрицей $P(t)$ проста, то собственные значения $\lambda_1(t)$, $\lambda_2(t)$, ..., $\lambda_n(t)$ матрицы $P(t)\dot{P}(t)$ можно определить так, чтобы функции $\lambda_i : t \mapsto \lambda_i(t)$ были нечетными.*

Доказательство. Пусть система (5) проста. Тогда по лемме 1.1 матрицы $P(t)\dot{P}(t)$ и $-P(-t)\dot{P}(-t)$ подобны. Откуда из [7, с. 124] следует, что эти матрицы имеют одни и те же собственные значения при каждом значении переменной t. Пусть $\lambda_1(t)$, $\lambda_2(t)$, …, $\lambda_n(t)$ – собственные значения матрицы $P(t)\dot{P}(t)$, тогда $-\lambda_1(-t)$, $-\lambda_2(-t)$, …, $-\lambda_n(-t)$ – собственные значения матрицы $-P(-t)\dot{P}(-t)$. Так как при каждом значении переменной t множества $\{\lambda_1(t), \lambda_2(t), \ldots, \lambda_n(t)\}$ и $\{-\lambda_1(-t), -\lambda_2(-t), \ldots, -\lambda_n(-t)\}$ совпадают, то собственные значения матрицы $P(t)\dot{P}(t)$ можно переопределить так, чтобы они были нечетными функциями. Следствие доказано.

Теорема 1.1. *Пусть система (5) с непрерывно дифференцируемой матрицей $P(t)$ проста. И пусть* $\det(P(t)\dot{P}(t) - \lambda E) \equiv (-1)^n \lambda^n + a_1(t)\lambda^{n-1} + \ldots + a_{n-1}(t)\lambda + a_n(t)$. *Тогда функции* $a_{2k-1}(t)$, $k = \overline{1, \left[\frac{n+1}{2}\right]}$ *– нечетные, а функции* $a_{2k}(t)$, $k = \overline{1, \left[\frac{n}{2}\right]}$ *– четные. (Здесь $[r]$ означает целую часть числа r.)*

Доказательство. Пусть система (5) проста, тогда по лемме 1.1 матрицы $P(t)\dot{P}(t)$ и $-P(-t)\dot{P}(-t)$ подобны. Значит, при каждом значении переменной t множества $\{\lambda_1(t), \lambda_2(t), \ldots, \lambda_n(t)\}$ и $\{-\lambda_1(-t), -\lambda_2(-t), \ldots, -\lambda_n(-t)\}$ совпадают, где $\lambda_1(t)$, $\lambda_2(t)$, …, $\lambda_n(t)$ – собственные значения матрицы $P(t)\dot{P}(t)$.

По теореме Виета при каждом значении переменной t имеем: $a_1 = (-1)^{n-1}(\lambda_1 + \lambda_2 + \cdots + \lambda_n)$, $a_2 = (-1)^{n-2}(\lambda_1\lambda_2 + \lambda_1\lambda_3 + \cdots + \lambda_{n-1}\lambda_n)$ и т. д., $a_{n-1} = -(\lambda_1\lambda_2\cdots\lambda_{n-1} + \lambda_1\cdots\lambda_{n-2}\lambda_n + \cdots + \lambda_2\lambda_3\cdots\lambda_n)$, $a_n = \lambda_1\lambda_2\cdots\lambda_n$. То есть каждое слагаемое коэффициента a_k представляет собой произведение элементов различных сочетаний из n элементов λ_1, λ_2, …, λ_n по k элементов. Причем этих слагаемых ровно столько, сколько и сочетаний. Откуда, учитывая совпадения множеств $\{\lambda_1(t), \lambda_2(t), \ldots, \lambda_n(t)\}$ и $\{-\lambda_1(-t), -\lambda_2(-t), \ldots, -\lambda_n(-t)\}$ при каждом значении переменной t, а также количества сомножителей в каждом из слагаемых, получим требуемое утверждение. Теорема доказана.

Следствие 1.2. *Пусть система (5) с непрерывно дифференцируемой матрицей $P(t)$ проста, тогда след матрицы $\mathrm{Tr}\left(P(t)\dot{P}(t)\right)$ – нечетная функция. Если при этом размерность n системы – четное число, то $\det\left(P(t)\dot{P}(t)\right)$ – четная функция, если же размерность системы – нечетное число, то $\det\left(P(t)\dot{P}(t)\right)$ – нечетная функция.*

Доказательство следует из теоремы 1.1, учитывая, что у многочлена $\det\left(P(t)\dot{P}(t) - \lambda E\right)$ коэффициент при λ^{n-1} равен $(-1)^{n-1}\mathrm{Tr}\left(P(t)\dot{P}(t)\right)$, а коэффициент при λ^0 равен $\det\left(P(t)\dot{P}(t)\right)$.

Если система (5) проста, то по лемме 3 из [5] для ее ОМ $F(t)$ верно тождество (7), используя которое можно доказать утверждения, аналогичные доказанным ранее утверждениям для матрицы $P(t)\dot{P}(t)$. В частности, справедливо следующее утверждение.

Следствие 1.3. *Если система* (5) *с непрерывно дифференцируемой матрицей* $P(t)$ *проста, то характеристические числа* $\lambda_1(t),\ \lambda_2(t),\ \ldots,\ \lambda_n(t)$ *матрицы* $\dot{P}(t)$ *можно определить так, чтобы функции* $\lambda_i:\ t \mapsto \lambda_i(t)$ *были нечетными.*

Итак, если система (5) проста, то из следствий 1.1, 1.3 и из [5, следствие 1] вытекает, что собственные значения матрицы $P(t)$ можно определить так, чтобы они были четными функциями, а собственные значения матриц $\dot{P}(t)$ и $P(t)\dot{P}(t)$ – так, чтобы они были нечетными функциями. В связи с этим возникает вопрос: будут ли эти условия достаточными для простоты системы (5)? Следующий пример дает отрицательный ответ на этот вопрос.

Пример 1.1. Рассмотрим систему (5) с матрицей

$$P(t) \equiv \begin{pmatrix} t^4 & t^2 - t^4 \\ t^4 + t^2 & -t^4 \end{pmatrix}. \tag{9}$$

Собственными значениями матрицы $P(t)$ являются четные функции $\lambda_{1,2} = \pm t^2$, а собственными значениями матрицы $\dot{P}(t)$ – нечетные функции $\eta_{1,2} = \pm 2t$. Собственные значения матрицы $P(t)\dot{P}(t)$ – нечетные функции $\nu_{1,2} = 2t^3$. Тем не менее система (5) с матрицей (9) не является простой. Докажем это.

Допустим противное. Пусть рассматриваемая система проста и

$$F(t) :\equiv \begin{pmatrix} f_1(t) & f_2(t) \\ f_3(t) & f_4(t) \end{pmatrix}$$

– ее отражающая матрица. Тогда по лемме 1 и лемме 3 из [5] верны тождества (6) и (7), откуда при $t \neq 0$ получим, что $f_2(t) \equiv f_3(t) \equiv 0,\ \ f_1(t) \equiv f_4(t)$. Проверкой убедимся, что такая $F(t)$ не удовлетворяет ОС. Таким образом, получили противоречие с тем, что $F(t)$ – ОМ рассматриваемой системы.

Свойство простоты системы (5) связано со свойствами решений системы с удвоенной матрицей коэффициентов, это вытекает из следующего утверждения.

Лемма 1.2. *Если система* (5) *проста и* $F(t)$ *– ее ОМ, то* $F(-t)$ *– ФМ, а* $F^2(t)$ *– ОМ системы*

$$\dot{x} = 2P(t)x. \tag{10}$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. Пусть система (5) проста и $F(t)$ – ее ОМ. Заметим, что при выполнении условий теоремы 1 из [5] матрица $S(t)$ из формулировки этой теоремы играет роль ОМ системы (см. доказательство). Тогда из [5, теорема 1] следует, что $\dot{F}(t) \equiv -2P(-t)F(t)$. Умножим это тождество на (-1) и заменим t на $(-t)$, получим $-\dot{F}(-t) \equiv 2P(t)F(-t)$. Таким образом, матрица $F(-t)$ составлена из столбцов-решений системы (10). А так как $F(0) = E$, то матрица $F(-t)$ является ФМ для системы (10).

Согласно [2, с. 30] ОМ системы (10) $\Phi(t) \equiv X(-t)X^{-1}(t)$, где $X(t)$ – ее ФМ. Так как $F(t)$ – ОМ системы (5), то $F(-t) \equiv F^{-1}(t)$. Учитывая, что $X(t) \equiv F(-t)$, получим $\Phi(t) \equiv F^2(t)$. Лемма доказана.

Таким образом, зная ОМ простой системы (5), мы можем найти ФМ системы с удвоенной матрицей коэффициентов. В связи с этим возникает обратный вопрос: зная ФМ системы с удвоенной матрицей коэффициентов, можно ли найти ОМ системы (5) и выяснить, является ли система (5) простой? Ответ на этот вопрос дает следующее утверждение.

Теорема 1.2. *Пусть* $X(t)$ *– ФМ системы* (5)*, нормированная при* $t = 0$ (*т. е.* $X(0) = E$)*, и для нее справедливо тождество* $X(t)P(-t) \equiv P(t)X(t)$*. Тогда система*

$$\dot{x} = \frac{1}{2}P(t)x \tag{11}$$

является простой с ОМ $X(-t)$.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Пусть $X(t)$ – ФМ системы (5), тогда $\dot{X}(t) \equiv P(t)X(t)$. Умножая полученное тождество на -1 и заменяя t на $-t$, получим $\frac{d}{dt}\big(X(-t)\big) \equiv -P(-t)X(-t)$. Пусть $S(t) :\equiv X(-t)$. Так как

$X(0)=E,$ то для системы (5) выполняются условия теоремы 1 из [5], следовательно, система (11) простая. Проверкой ОС убедимся, что $X(-t)$ – ее ОМ. Теорема доказана.

Пример 1.2. Проверкой убедимся, что

$$X(t)\equiv\begin{pmatrix} 1+\sin t & \exp(-\cos t)\sin t \\ -\exp(\cos t)\sin t & 1-\sin t \end{pmatrix}$$

– ФМ системы (5) с матрицей

$$P(t)\equiv\begin{pmatrix} \cos t+\sin^3 t & \left(\cos t+\sin^2 t+\sin^3 t\right)\exp(-\cos t) \\ -\left(\cos t-\sin^2 t+\sin^3 t\right)\exp(\cos t) & -\cos t-\sin^3 t \end{pmatrix}$$

и $X(0)=E,\ \ X(t)P(-t)\equiv P(t)X(t).$ Тогда по теореме 1.2 система

$$\dot{x}=\frac{1}{2}\left(\cos t+\sin^3 t\right)x+\frac{1}{2}\left(\cos t+\sin^2 t+\sin^3 t\right)\exp(-\cos t)y,$$

$$\dot{y}=-\frac{1}{2}\left(\cos t-\sin^2 t+\sin^3 t\right)\exp(\cos t)x-\frac{1}{2}\left(\cos t+\sin^3 t\right)y$$

является простой с ОМ $X(-t)$. Эта система 2π-периодическая. Ее матрица монодромии на отрезке $[-\pi;\pi]$ есть $X(\pi)=E$. Следовательно, эта простая система устойчива и все ее решения 2π-периодические.

Рассмотренные утверждения могут найти применение при решении краевых двухточечных задач. В частности, приведем следующие утверждения.

Теорема 1.3. *Если система* (*5*) – *проста и* $F(t)$ – *ее ОМ, то система* (*10*) *имеет нетривиальное* $(\not\equiv 0)$ *решение, удовлетворяющее условию*

$$Mx(0)-Nx(\omega)=0, \tag{12}$$

где $M,\ N$ – *постоянные* $n\times n$-*матрицы, тогда и только тогда, когда матрица* $M-NF(-\omega)$ *является вырожденной. Более того, число* $k,\ 0\le k\le n,$ *линейно независимых решений задачи* (*10*), (*12*) *равно* $k=n-\operatorname{rang}\left(M-NF(-\omega)\right)$.

Доказательство. Так как матрица системы (10) непрерывна на отрезке $[0;\omega]$, M и N – постоянные $n\times n$-матрицы, $F(-t)$ является ФМ этой системы (по лемме 1.2), то выполняются все условия леммы 1.1 из [8, с. 479], откуда вытекают все утверждения теоремы, учитывая, что (как следует из ОС) $F(0)=E$.

Наряду с системой (10) рассмотрим неоднородную систему

$$\dot{x}=2P(t)x+q(t), \tag{13}$$

где $q(t)$ – непрерывная вектор-функция. Для этой системы справедливо следующее утверждение.

Теорема 1.4. *Пусть система* (*5*) – *проста и* $F(t)$ – *ее ОМ. Пусть, кроме того, постоянные* $n\times n$-*матрицы* M *и* N *такие, что* $n\times 2n$-*матрица* (M,N) *имеет ранг* n. *Тогда система* (*13*) *имеет единственное решение, удовлетворяющее условию* (*12*) *тогда и только тогда, когда матрица* $M-NF(-\omega)$ *является невырожденной.*

Доказательство вытекает из теоремы 1.1 из [8, с. 479] и теоремы 1.3, учитывая, что $F(-t)$ – ФМ системы (10) (по лемме 1.2) и $F(0)=E$ (следует из ОС).

1. Красносельский М.А. Оператор сдвига по траекториям дифференциальных уравнений. М., 1966.
2. Мироненко В.И. Отражающая функция и периодические решения дифференциальных уравнений. Мн., 1986.
3. Мироненко В.И. Отражающая функция и исследование многомерных дифференциальных систем. Гомель, 2004.
4. Мироненко В.И. // Дифференц. уравнения. 1989. Т. 25. № 12. С. 2109.
5. Мусафиров Э.В. // Там же. 2002. Т. 38. № 4. С. 570.
6. Демидович Б.П. Лекции по математической теории устойчивости. М., 1998.
7. Гантмахер Ф.Р. Теория матриц. М., 1954.
8. Хартман Ф. Обыкновенные дифференциальные уравнения. М., 1970.

Поступила в редакцию 10.09.10.

Эдуард Владимирович Мусафиров – кандидат физико-математических наук, доцент, заведующий кафедрой высшей математики и информационных технологий Полесского государственного университета.