



Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

Э. В. Мусафиров, О простых линейных дифференциальных системах с четной матрицей, *Тр. Ин-та матем.*, 2010, том 18, номер 2, 93–98

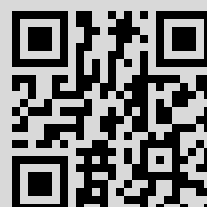
Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением

<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 212.98.179.71

16 мая 2022 г., 10:54:35



УДК 517.926.7

О ПРОСТЫХ ЛИНЕЙНЫХ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ СИСТЕМАХ С ЧЕТНОЙ МАТРИЦЕЙ

Э. В. Мусафиров

Полесский государственный университет

e-mail: musafirov@bk.ru

Поступила 09.03.2010

Получены условия простоты линейных дифференциальных систем с четной матрицей коэффициентов. Фундаментальные матрицы решений линейных дифференциальных систем $\dot{x} = 2P(t)x$ и $\dot{x} = -2P(-t)x$ выражены через отражающую матрицу $F(t)$ простой системы $\dot{x} = P(t)x$, $t \in \mathbb{R}$, $x \in \mathbb{R}^n$. При условии четности матрицы $P(t)$ также через $F(t)$ выражены фундаментальные матрицы решений систем $\dot{x} = -2kP(t)x$, $k \in \mathbb{Z}$ и $\dot{x} = -2P(t)x + \dot{P}(t)P^{-1}(t)x$. Доказана эквивалентность (в смысле совпадения отражающих функций) последней системы и простой системы $\dot{x} = -2P(t)x$ с четной матрицей коэффициентов.

1. Введение. Многие процессы, происходящие в реальных системах, моделируются с помощью систем дифференциальных уравнений. Однако, как правило, эти дифференциальные системы не интегрируются в конечном виде, что приводит к необходимости изучать свойства решений этих систем по виду самих систем. На качественное поведение семейств решений существенное влияние оказывают наличие, количество и расположение периодических решений. При этом для выяснения вопросов о существовании и количестве периодических решений можно использовать отображение Пуанкаре (отображение за период) (см., например, [1]), знание которого позволяет решить вопросы существования и устойчивости периодических решений. Учитывая, что отображение за период определяется через общее решение системы, кажется, что найти явное выражение для отображения за период для неинтегрируемых в конечном виде систем невозможно. Однако иногда это можно сделать с помощью отражающей функции (ОФ) [2, 3].

Далее приведем сведения из теории ОФ, необходимые для дальнейшего изложения.

Рассмотрим систему

$$\dot{x} = X(t, x), \quad t \in \mathbb{R}, \quad x \in \mathbb{R}^n, \quad (1)$$

решения которой однозначно определяются начальными условиями. Пусть общее решение этой системы в форме Коши имеет вид $x = \varphi(t; t_0, x_0)$.

Для каждой такой системы определяется (см. [2, с. 11] и [3, с. 62]) *отражающая функция* $F(t, x) := \varphi(-t; t, x)$, определенная в некоторой области, содержащей гиперплоскость $t = 0$.

Функция $F(t, x)$ есть ОФ системы (1) тогда и только тогда, когда эта F является решением системы уравнений в частных производных, называемой *основным соотношением* (ОС),

$$\frac{\partial F(t, x)}{\partial t} + \frac{\partial F(t, x)}{\partial x} X(t, x) + X(-t, F(t, x)) = 0 \quad (2)$$

с начальным условием $F(0, x) \equiv x$.

Любая непрерывно дифференцируемая функция $F(t, x)$, удовлетворяющая условию

$$F(-t, F(t, x)) \equiv F(0, x) \equiv x,$$

является ОФ целого класса систем вида (см. [3, с. 71])

$$\dot{x} = -\frac{1}{2} \frac{\partial F}{\partial x}(-t, F(t, x)) \left(\frac{\partial F(t, x)}{\partial t} - 2S(t, x) \right) - S(-t, F(t, x)), \quad (3)$$

где $S(t, x)$ — произвольная вектор-функция, при которой решения системы (3) однозначно определяются начальными условиями.

Поэтому все системы вида (1) разбиваются на классы эквивалентности вида (3) так, что каждый класс характеризуется своей ОФ, называемой *отражающей функцией класса*.

Таким образом, при изучении вопросов существования и устойчивости периодических решений, а также существования решений краевых задач у некоторой дифференциальной системы эту систему можно заменить эквивалентной (в смысле совпадения ОФ). Это легко сделать, когда ОФ данной системы известна. Однако иногда можно построить дифференциальную систему, эквивалентную данной, и в том случае, когда ОФ неизвестна. Например, если система (1) эквивалентна некоторой стационарной системе, то эта система совпадает с системой $\dot{x} = X(0, x)$. Таким образом, в том классе эквивалентности, в котором существует стационарная система, эта стационарная система может играть роль такой системы. В других классах роль стационарной системы выполняет *простая система* [4, 5], получающаяся из системы (3) при $S(t, x) \equiv 0$,

$$\dot{x} = -\frac{1}{2} \frac{\partial F}{\partial x}(-t, F(t, x)) \frac{\partial F(t, x)}{\partial t} \equiv -\frac{1}{2} \left(\frac{\partial F(t, x)}{\partial x} \right)^{-1} \frac{\partial F(t, x)}{\partial t},$$

где $F(t, x)$ — ОФ этой системы.

Для линейной системы

$$\dot{x} = P(t)x, \quad t \in \mathbb{R}, \quad x \in \mathbb{R}^n, \quad (4)$$

где $P(t)$ — непрерывная $n \times n$ -матрица, ОФ также линейна и имеет вид $F(t, x) \equiv F(t)x$. Матрица $F(t)$, согласно [2, с. 30], называется отражающей матрицей (ОМ) системы (4). Если $X(t)$ — фундаментальная матрица решений (ФМ) системы (4), то $F(t) \equiv X(-t)X^{-1}(t)$. Поэтому для любой ОМ $F(t)$ справедливы соотношения $F(-t)F(t) \equiv F(0) = E$, где E — единичная $n \times n$ -матрица. ОС в линейном случае имеет вид $\dot{F}(t) + F(t)P(t) + P(-t)F(t) = 0$, $F(0) = E$. Всякая линейная система с ОМ $F(t)$ может быть записана в виде

$$\dot{x} = \left(-\frac{1}{2}F(-t)\dot{F}(t) + F(-t)R(t) - R(-t)F(t) \right)x,$$

где $R(t)$ — произвольная $n \times n$ -матрица. При $R(t) \equiv 0$ получим *простую линейную систему*

$$\dot{x} = -\frac{1}{2}F(-t)\dot{F}(t)x.$$

Заметим, что в одном классе эквивалентности с линейной системой (4) находятся и нелинейные системы, обладающие линейной ОФ, поэтому система (4) представляет интерес не только как линейное приближение системы (1).

2. Предварительные результаты. Знание ОМ для простой системы (4) позволяет найти ФМ для системы с удвоенной правой частью

$$\dot{x} = 2P(t)x. \quad (5)$$

Об этом свидетельствует следующее утверждение.

Лемма 1. Если система (4) проста и $F(t)$ — ее ОМ, то $F(-t)$ — ФМ, а $F^2(t)$ — ОМ системы (5).

Доказательство. Пусть система (4) проста, тогда из [5, теорема 1] следует, что $\dot{F}(t) \equiv -2P(-t)F(t)$. Умножим это тождество на (-1) и заменим t на $(-t)$, получим $-\dot{F}(-t) \equiv 2P(t)F(-t)$. Таким образом, матрица $F(-t)$ составлена из столбцов-решений системы (5). А так как $F(0) = E$, то матрица $F(-t)$ является фундаментальной матрицей решений для системы (5).

Согласно [2, с. 30], ОМ системы (5) $\Phi(t) \equiv X(-t)X^{-1}(t)$, где $X(t)$ — ее ФМ. Так как $F(t)$ — ОМ системы (4), то $F(-t) \equiv F^{-1}(t)$. Учитывая, что $X(t) \equiv F(-t)$, получим $\Phi(t) \equiv F^2(t)$. Лемма доказана.

Доказанную лемму проиллюстрируем следующим примером.

Пример 1. Рассмотрим систему (4) с матрицей системы

$$P(t) \equiv \frac{1}{2} \begin{pmatrix} \cos t + \sin^3 t & (\cos t + \sin^2 t + \sin^3 t)e^{-\cos t} \\ -(\cos t - \sin^2 t + \sin^3 t)e^{\cos t} & -\cos t - \sin^3 t \end{pmatrix}.$$

Для этой системы рассмотрим матрицу

$$S(t) \equiv \begin{pmatrix} 1 - \sin t & -e^{-\cos t} \sin t \\ e^{\cos t} \sin t & 1 + \sin t \end{pmatrix}.$$

Проверкой убедимся, что $S(0) = E$, $S(t)P(t) \equiv P(-t)S(t)$ и $\dot{S}(t) \equiv -2P(-t)S(t)$. Тогда по теореме 1 из [5] рассматриваемая система является простой. Заметим также, что $S(t)$ — ОМ рассматриваемой системы.

Тогда по лемме 1 общее решение системы

$$\begin{aligned} \dot{x} &= (\cos t + \sin^3 t)x + \exp(-\cos t)(\cos t + \sin^2 t + \sin^3 t)y, \\ \dot{y} &= -\exp(\cos t)(\cos t - \sin^2 t + \sin^3 t)x - (\cos t + \sin^3 t)y \end{aligned}$$

имеет вид $x = c_1(1 + \sin t) + c_2 \exp(-\cos t) \sin t$, $y = -c_1 \exp(\cos t) \sin t + c_2(1 - \sin t)$.

Аналогично лемме 1 можно сформулировать и доказать следующее утверждение.

Лемма 2. Пусть система (4) проста и $F(t)$ — ее ОМ. Тогда $F(t)$ — ФМ, а $F^2(-t)$ — ОМ системы

$$\dot{x} = -2P(-t)x. \quad (6)$$

Доказательство. Так как система проста, то по лемме 1 из работы [5] $F(t)P(t) \equiv P(-t)F(t)$ и, следовательно, ОС примет вид $\dot{F}(t) \equiv -2P(-t)F(t)$. Таким образом, матрица $F(t)$ составлена из столбцов-решений системы (6). А так как $F(0) = E$, то матрица $F(t)$ является фундаментальной матрицей решений для системы (6).

По определению ОМ, ОМ системы (6) $\Phi(t) \equiv F(-t)F^{-1}(t)$. Учитывая, что $F(-t)F(t) \equiv E$, имеем $\Phi(t) \equiv F^2(-t)$. Лемма доказана.

3. Основные результаты. Простые системы с четной по t правой частью обладают особыми отличительными свойствами, поэтому они представляют отдельный интерес для изучения. Так, любая автономная система, правую часть которой можно считать четной по t , является простой. Легко проверить, что линейное дифференциальное уравнение $\dot{x} = p(t)x$, $t \in \mathbb{R}$, $x \in \mathbb{R}$ является простым тогда и только тогда, когда $p(t)$ — четная функция.

В [5] доказано, что система (4) с матрицей $P(t)$, коммутирующей со своим интегралом (система Лаппо–Данилевского), проста тогда и только тогда, когда $P(t)$ — четна.

Для простой системы четность правой части связана с некоторыми другими свойствами. В частности, справедливо следующее утверждение.

Лемма 3. *ОМ простой системы (4) коммутирует со своей производной тогда и только тогда, когда матрица системы четна.*

Доказательство. Пусть матрица простой системы (4) четна. Пусть, кроме того, $F(t)$ — ОМ этой системы. Тогда по лемме 1 из [5] $F(t)P(t) \equiv P(-t)F(t)$ и, следовательно, ОС примет вид $\dot{F}(t) \equiv -2F(t)P(t) \equiv -2P(-t)F(t)$. Учитывая четность матрицы $P(t)$, имеем

$$\dot{F}(t) \equiv -2F(t)P(t) \equiv -2P(t)F(t).$$

Тогда

$$\dot{F}(t)F(t) + F(t)\dot{F}(t) \equiv -2F(t)P(t)F(t) - 2F(t)P(t)F(t) \equiv -4F(t)P(t)F(t).$$

По определению простой системы $P(t) \equiv -\frac{1}{2}F^{-1}(t)\dot{F}(t)$. Тогда

$$\dot{F}(t)F(t) + F(t)\dot{F}(t) \equiv 2F(t)F^{-1}(t)\dot{F}(t)F(t),$$

т.е. $F(t)\dot{F}(t) \equiv \dot{F}(t)F(t)$.

Обратно. Пусть $F(t)\dot{F}(t) \equiv \dot{F}(t)F(t)$, тогда из ОС следует, что

$$F(t)P(-t)F(t) \equiv F(t)P(t)F(t).$$

Откуда, умножая слева и справа на $F^{-1}(t)$, имеем $P(-t) \equiv P(t)$. Лемма доказана.

Знание ОМ для простой системы (4) с четной матрицей позволяет найти ФМ для любой системы $\dot{x} = -2kP(t)x$, $k \in \mathbb{Z}$. Об этом свидетельствует следующее утверждение.

Следствие 1. *Если система (4) с четной $P(t)$ проста и $F(t)$ — ее ОМ, то для любого $k \in \mathbb{Z}$ матрица $F^k(t)$ — ФМ системы $\dot{x} = -2kP(t)x$.*

Доказательство. Пусть система (4) проста и $F(t)$ — ее ОМ. Пусть, кроме того, матрица системы $P(t)$ — четна. Тогда по лемме 1 из [5] $F(t)P(t) \equiv P(t)F(t)$ и, следовательно, ОС примет вид $\dot{F}(t) \equiv -2P(t)F(t)$. По лемме 3 $F(t)\dot{F}(t) \equiv \dot{F}(t)F(t)$, тогда для любого $k \in \mathbb{Z}$ верно тождество

$$\frac{d}{dt}(F^k(t)) \equiv k\dot{F}(t)F^{k-1}(t).$$

Откуда, учитывая, что $\dot{F}(t) \equiv -2P(t)F(t)$, получим

$$\frac{d}{dt}(F^k(t)) \equiv -2kP(t)F^k(t).$$

Следствие доказано.

Простота линейной дифференциальной системы (4) и системы с удвоенной правой частью (5) связана с четностью их правых частей. Это вытекает из следующей теоремы.

Теорема 1. *Если система (4) проста, то система (5) проста тогда и только тогда, когда $P(t)$ — четна.*

Доказательство. Пусть $F(t)$ — ОМ системы (4). Так как (4) — проста, то по лемме 1 $F^2(t)$ — ОМ системы (5), а по лемме 1 из [5] верно тождество

$$F(t)P(t) \equiv P(-t)F(t). \quad (7)$$

Пусть система (5) — проста, учитывая, что $F^2(t)$ — ее ОМ, по лемме 1 из [5] имеем

$$F^2(t)2P(t) \equiv 2P(-t)F^2(t).$$

Используя (7), из последнего тождества получим $F^2(t)P(t) \equiv F(t)P(t)F(t)$. Умножая последнее тождество на $F^{-1}(t)$ слева, получим $F(t)P(t) \equiv P(t)F(t)$, откуда с помощью (7) имеем

$P(-t)F(t) \equiv P(t)F(t)$. Умножив последнее тождество на $F^{-1}(t)$ справа, убедимся в том, что $P(t)$ — четна.

Обратно. Пусть $P(t)$ — четна. Тогда по лемме 3 $F(t)\dot{F}(t) \equiv \dot{F}(t)F(t)$ и, следовательно, $\frac{d}{dt}(F^2(t)) \equiv 2F(t)\dot{F}(t)$. Так как (4) — проста, то по определению $P(t) \equiv -\frac{1}{2}F(-t)\dot{F}(t)$. Откуда, учитывая, что $F(-t)F(t) \equiv E$, имеем $2P(t) \equiv -\frac{1}{2}F^2(-t)2F(t)\dot{F}(t)$, т.е.

$$2P(t) \equiv -\frac{1}{2}F^2(-t)\frac{d}{dt}(F^2(t)).$$

Так как $F^2(t)$ — ОМ системы (5), то из последнего тождества (по определению) следует, что система (5) — простая. Теорема доказана.

Обобщением теоремы 1 является следующее утверждение.

Следствие 2. Если система (4) проста и $P(t)$ — четна, то для любого $k \in \mathbb{N}$ система $\dot{x} = 2^k P(t)x$ — проста.

Знание ОМ для простой системы (4) с невырожденной четной матрицей позволяет найти ФМ для системы

$$\dot{x} = (\dot{P}(t)P^{-1}(t) - 2P(t))x \quad (8)$$

с помощью следующего утверждения.

Теорема 2. Пусть система (4) с невырожденной четной матрицей $P(t)$ проста и $F(t)$ — ее ОМ. Тогда $F^2(-t)$ — ОМ, а $\dot{F}(t)$ — ФМ системы (8).

Доказательство. По лемме 2 $F(t)$ — ФМ системы (6), т.е. $\dot{F}(t) \equiv -2P(t)F(t)$. Так как $P(t)$ и $F(t)$ невырожденные, то $\dot{F}(t)$ также невырожденная и

$$\dot{F}^{-1}(t) \equiv (-2P(t)F(t))^{-1} \equiv -\frac{1}{2}F^{-1}(t)P^{-1}(t),$$

$$\text{т.е. } F(t)\dot{F}^{-1}(t) \equiv -\frac{1}{2}P^{-1}(t).$$

Рассмотрим

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}(-2P(t)F(t)) &\equiv -2(\dot{P}(t)F(t) + P(t)\dot{F}(t)) \equiv -2(\dot{P}(t)F(t)\dot{F}^{-1}(t) + P(t))\dot{F}(t) \equiv \\ &\equiv -2\left(\dot{P}(t)\left(-\frac{1}{2}P^{-1}(t)\right) + P(t)\right)\dot{F}(t) \equiv (\dot{P}(t)P^{-1}(t) - 2P(t))\dot{F}(t) \equiv \\ &\equiv (\dot{P}(t)P^{-1}(t) - 2P(t))(-2P(t)F(t)). \end{aligned}$$

Таким образом, $\dot{F}(t) \equiv -2P(t)F(t)$ — ФМ системы (8).

По определению ОМ, ОМ системы (8)

$$\Phi(t) \equiv \dot{F}(-t)\dot{F}^{-1}(t).$$

Так как система (4) проста и ее матрица четна, то по лемме 1 из [5] $F(t)P(t) \equiv P(t)F(t)$. Тогда $\dot{F}(t) \equiv -2F(t)P(t)$ и, следовательно,

$$\dot{F}^{-1}(t) \equiv -\frac{1}{2}P^{-1}(t)F^{-1}(t),$$

т.е. $\dot{F}(-t) \equiv -2F(-t)P(t)$. Поэтому $\Phi(t) \equiv F(-t)F^{-1}(t)$. Учитывая, что $F(-t)F(t) \equiv E$, имеем $\Phi(t) \equiv F^2(-t)$. Теорема доказана.

Доказанная теорема позволяет установить эквивалентность (в смысле совпадения ОФ) некоторых систем в случае, когда система (4) с невырожденной четной матрицей проста.

Следствие 3. Пусть система (4) с невырожденной четной матрицей $P(t)$ проста, тогда система (8) и система $\dot{x} = -2P(t)x$ принадлежат одному классу эквивалентности (в смысле совпадения $O\Phi$).

Доказательство непосредственно вытекает из леммы 2 и теоремы 2.

Литература

1. Красносельский М.А. Оператор сдвига по траекториям дифференциальных уравнений. М.: Наука, 1966.
2. Мироненко В.И. Отражающая функция и периодические решения дифференциальных уравнений. Минск: Университетское, 1986.
3. Мироненко В.И. Отражающая функция и исследование многомерных дифференциальных систем. Гомель: ГГУ им. Ф. Скорины, 2004.
4. Мироненко В.И. Простые системы и периодические решения дифференциальных уравнений // Дифференц. уравнения. 1989. Т. 25. № 12. С. 2109–2114.
5. Мусафиров Э.В. О простоте линейных дифференциальных систем // Дифференц. уравнения. 2002. Т. 38. № 4. С. 570–572.

E. V. Musafirov

On simple linear differential systems with an even matrix

Summary

Conditions of simplicity of linear differential systems with an even coefficient matrix are obtained. Fundamental matrixes of solutions of linear differential systems $\dot{x} = 2P(t)x$ and $\dot{x} = -2P(-t)x$ are expressed by means of reflective matrix $F(t)$ of simple system $\dot{x} = P(t)x$, $t \in \mathbb{R}$, $x \in \mathbb{R}^n$. Fundamental matrixes of solutions of systems $\dot{x} = -2kP(t)x$, $k \in \mathbb{Z}$ and $\dot{x} = -2P(t)x + \dot{P}(t)P^{-1}(t)x$ are also expressed by means of $F(t)$ under condition of evenness of matrix $P(t)$. Equivalence (in terms of coincidence of reflective functions) of last system and a simple system $\dot{x} = -2P(t)x$ with an even coefficient matrix is proved.