ISSN 2070-7568

НАУКА КРАСНОЯРЬЯ

Журнал основан в 2011 г.

№1(01)
2012

Научно-инновационный центр
Красноярск, 2012

Издательство «Научно-инновационный центр»

НАУКА КРАСНОЯРЬЯ, №1(01), 2012, 244 с.

Журнал зарегистрирован Управлением Федеральной службы по надзору в сфере связи, информационных технологий и массовых коммуникаций по Красноярскому краю (свидетельство ПИ № ТУ 24-00430 от 10.08.2011) и Международным центром ISSN (ISSN 2070-7568).

Журнал выходит шесть раз в год.

Ответственный за выпуск – ***Максимов Я.А.***
Ответственный секретарь – ***Москаленко О.Л.***

Статьи, поступающие в редакцию, рецензируются. За достоверность сведений, изложенных в статьях, ответственность несут авторы публикаций. Мнение редакции может не совпадать с мнением авторов материалов. При перепечатке ссылка на журнал обязательна.

Журнал представлен в полнотекстовом формате в
НАУЧНОЙ ЭЛЕКТРОННОЙ БИБЛИОТЕКЕ
в целях создания Российского индекса
научного цитирования (РИНЦ).

Адрес для корреспонденции: *660075, г. Красноярск, а/я 2337*
Телефон редакции: *(391) 271-23-89 (зав. редакцией)*
Эл. почта: *sciences@list.ru (отв. секретарь)*

Учредитель и издатель:
ООО «Научно-инновационный центр»

Подписано в печать 20.02.2012. Заказ № НК/012012.
Тираж 1000 экз. Усл. печ. л. 21,4

СОДЕРЖАНИЕ

УДК 517.925

НЕСТАЦИОНАРНЫЕ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ СИСТЕМЫ, ЭКВИВАЛЕНТНЫЕ СИСТЕМЕ ЛОТКИ–ВОЛЬТЕРРА С ЛОГИСТИЧЕСКОЙ ПОПРАВКОЙ

Мусафиров Э.В.
Полесский государственный университет, г. Пинск, Беларусь
E-mail: musafirov@bk.ru

Получены нестационарные дифференциальные системы эквивалентные (в смысле совпадения отражающих функций) системе Лотки–Вольтерра с логистической поправкой. Доказан критерий простоты систем дифференциальных уравнений.

Ключевые слова: *отражающая функция; простая дифференциальная система; допустимое возмущение; качественное поведение решений.*

UDC 517.925

NON-STATIONARY DIFFERENTIAL SYSTEMS EQUIVALENT TO LOTKA-VOLTERRA SYSTEM WITH THE LOGISTICAL AMENDMENT

Musafirov E.V.
Polessky State University, Pinsk, Belarus
E-mail: musafirov@bk.ru

Non-stationary differential systems equivalent to (in sense of coincidence of reflecting functions) Lotka-Volterra system with the logistical amendment are obtained. The criterion of simplicity of systems of the differential equations is proved.

Keywords: *reflecting function; simple differential system; admissible per-*

turbation; qualitative behaviour of solutions.

ВВЕДЕНИЕ

Многие процессы, происходящие в реальных системах, моделируются с помощью систем дифференциальных уравнений. Однако, как правило, эти дифференциальные системы не интегрируются в конечном виде, что приводит к необходимости изучать свойства решений этих систем по виду самих систем. На качественное поведение семейств решений существенное влияние оказывает наличие, количество и расположение периодических решений. При этом для выяснения вопросов о существовании и количестве периодических решений можно использовать отображение Пуанкаре (отображение за период) (см., например, [1]), знание которого позволяет решить вопросы существования и устойчивости периодических решений. Учитывая, что отображение за период определяется через общее решение системы, кажется, что найти явное выражение для отображения за период для неинтегрируемых в конечном виде систем невозможно. Однако иногда это удается сделать с помощью отражающей функции (ОФ) Мироненко В.И. (см. [2, 3]). Далее приведем сведения из теории ОФ, необходимые для дальнейшего изложения.

Рассмотрим систему:

$$\dot{x} = X(t,x) \qquad t \in \mathrm{R}, x \in \mathrm{R}^n, \tag{1}$$

решения которой однозначно определяются начальными условиями. Пусть общее решение этой системы в форме Коши имеет вид $x = \varphi(t;t_0,x_0)$.

Для каждой такой системы определяется (см. [2, с. 11], а также [3, с. 62]) отражающая функция $F(t,x) \coloneqq \varphi(-t;t,x)$, определенная в некоторой области, содержащей гиперплоскость $t = 0$.

Функция $F(t,x)$ есть ОФ системы (1) тогда и только тогда, когда эта F является решением системы уравнений в частных производных, называемой основным соотношением (ОС),

$$\frac{\partial F(t,x)}{\partial t} + \frac{\partial F(t,x)}{\partial x} X(t,x) + X\big(-t, F(t,x)\big) = 0 \tag{2}$$

с начальным условием $F(0,x) \equiv x$.

Любая непрерывно дифференцируемая функция $F(t,x)$, удовлетворяющая условию $F(-t,F(t,x)) \equiv F(0,x) \equiv x$, является ОФ целого класса систем вида (см. [3])

$$\dot{x} = -\frac{1}{2}\frac{\partial F}{\partial x}(-t,F(t,x))\left(\frac{\partial F(t,x)}{\partial t} - 2S(t,x)\right) - S(-t,F(t,x)), \quad (3)$$

где $S(t,x)$ – произвольная вектор-функция, при которой решения системы (3) однозначно определяются начальными условиями. Поэтому все системы вида (1) разбиваются на классы эквивалентности вида (3) так, что каждый класс характеризуется своей ОФ, называемой отражающей функцией класса.

Все системы из одного класса имеют один и тот же оператор сдвига (см. [1, с. 11-13]) на любом интервале $(-\alpha;\alpha)$. Поэтому все эквивалентные 2ω-периодические системы имеют одно и то же отображение за период $[-\omega;\omega]$.

Пусть известно, что система (1) и система

$$\dot{y} = Y(t,x), \quad t \in \mathrm{R},\ y \in \mathrm{R}^n \quad (4)$$

принадлежат одному классу эквивалентности, и пусть одна из этих систем, скажем система (1), является 2ω-периодической. Тогда если решения $\varphi(t;-\omega,x)$ и $\psi(t;-\omega,x)$ систем (1) и (4) соответственно продолжимы на отрезок $[-\omega,\omega]$, то отображение за период $[-\omega,\omega]$ для системы (1) есть $\varphi(\omega;-\omega,x) \equiv F(-\omega,x) \equiv \psi(\omega;-\omega,x)$, хотя система (4) может быть непериодической. Отсюда следует, что между 2ω-периодическими решениями системы (1) и решениями двухточечной задачи $y(-\omega) = y(\omega)$ для системы (4) можно установить взаимно однозначное соответствие.

Таким образом, при изучении вопросов существования и устойчивости периодических решений, а также существования решений краевых задач у некоторой дифференциальной системы эту систему можно заменить эквивалентной (в смысле совпадения ОФ). Это легко сделать, когда ОФ данной системы известна. Однако иногда можно построить дифференциальную систему, эквивалентную данной, и в том случае, когда ОФ неизвестна. Например, если система (1) эквивалентна некоторой стационарной системе, то эта система совпадает с системой $\dot{x} = X(0,x)$. Таким образом, в том классе эквивалентности, в котором существует стационарная система, эта стационарная система может играть роль такой системы. В других классах роль стационарной системы выполняет простая система [4, 5], получающаяся из системы (3) при $S(t,x)\equiv 0$,

$$\dot{x} = -\frac{1}{2}\frac{\partial F}{\partial x}\left(-t, F(t,x)\right)\frac{\partial F(t,x)}{\partial t} \equiv -\frac{1}{2}\left(\frac{\partial F(t,x)}{\partial x}\right)^{-1}\frac{\partial F(t,x)}{\partial t},$$

где $F(t,x)$ – ОФ этой системы. Заметим, что любая стационарная система проста, однако среди простых есть и нестационарные.

Находить возмущения дифференциальных систем, не меняющие ОФ (назовем такие возмущения допустимыми), позволяет слудующая теорема [6].

Теорема 1. Пусть вектор-функция $\Delta(t,x)$ является решением дифференциального уравнения в частных производных

$$\frac{\partial \Delta}{\partial t}(t,x) + \frac{\partial \Delta}{\partial x}(t,x)X(t,x) - \frac{\partial X}{\partial x}(t,x)\Delta(t,x) = 0 \qquad (5)$$

Тогда возмущенная дифференциальная система

$$\dot{x} = X(t,x) + \alpha(t)\Delta(t,x) \qquad t\in \mathrm{R}, x\in D\subset \mathrm{R}^n, \qquad (6)$$

где $\alpha(t)$ – произвольная непрерывная скалярная нечетная функция, эквивалентна дифференциальной системе (1).

В настоящей работе преследовалась цель поиска допустимых возмущений для системы Лотки–Вольтерра с логистической поправкой

$$\begin{aligned} &\dot{x} = a_1x - a_2xy - a_3x^2, \\ &\dot{y} = -b_1y + b_2xy - b_3y^2; \quad a_i, b_i, x, y \in \mathrm{R} \quad (i=\overline{1,3}) \end{aligned} \qquad (7)$$

которая используется при моделировании конкурирующих процессов, в частности в биологии и экономике.

РЕЗУЛЬТАТЫ

Так как система (7) стационарная, то она является простой. Для простых систем находить допустимые возмущения позволяет следующая теорема.

Теорема 2. Система (1) с непрерывной функцией $X(t,x)$ проста тогда и только тогда, когда она эквивалентна (в смысле совпадения ОФ) любой системе вида

$$\dot{x} = (1+\alpha(t))X(t,x), \quad t \in \mathrm{R}, \quad x \in \mathrm{R}^n, \qquad (8)$$

где $\alpha(t)$ – непрерывная нечетная скалярная функция.

Доказательство. Необходимость. Пусть система (1) простая с ОФ $F(t,x)$. Тогда, согласно [4], $F_x(t,x)X(t,x) \equiv X(-t,F(t,x))$.

Из ОС для $F(t,x)$ и системы (1) следует тождество

$$F_t(t,x) + F_x(t,x)X(t,x) + X(-t,F(t,x)) \equiv 0$$

Рассмотрим ОС для $F(t,x)$ и системы (8):

$$F_t(t,x) + (1+\alpha(t))F_x(t,x)X(t,x) + (1-\alpha(t))X(-t,F(t,x)) \equiv$$
$$\equiv F_t(t,x) + F_x(t,x)X(t,x) + X(-t,F(t,x)) +$$
$$+\alpha(t)(F_x(t,x)X(t,x) - X(-t,F(t,x)))\equiv 0$$

Следовательно, $F(t,x)$ – ОФ системы (8), т.е. системы (1) и (8) эквивалентны.

Достаточность. Пусть система (1) эквивалентна любой системе (8), и пусть $F(t,x)$ – ОФ этих систем. Из ОС для системы (8) следует, что для любой нечетной скалярной функции $\alpha(t)$ верно тождество

$$0 \equiv F_t(t,x) + (1+\alpha(t))F_x(t,x)X(t,x) + (1-\alpha(t))X(-t,F(t,x)) \equiv$$

$$\equiv F_t(t,x) + F_x(t,x)X(t,x) + X(-t,F(t,x)) +$$
$$+\alpha(t)(F_x(t,x)X(t,x) - X(-t,F(t,x))).$$

Откуда, учитывая ОС для системы (1), следует, что для любой нечетной скалярной функции $\alpha(t)$ верно тождество

$$\alpha(t)(F_x(t,x)X(t,x) - X(-t,F(t,x)))\equiv 0$$

Положим $\alpha(t) \equiv t$, тогда

$$F_x(t,x)X(t,x) \equiv X(-t,F(t,x)), \quad \forall t \in \mathbf{R} \setminus \{0\}.$$

Т.к. $F(0,x) \equiv x$, то $F_x(0,x) \equiv E$ и, следовательно,

$$F_x(t,x)X(t,x) \equiv X(-t,F(t,x) \quad \forall t \in \mathbf{R}.$$

Значит, согласно [4], система (1) простая. Теорема доказана.

Из теоремы 2 вытекает следующее утверждение, позволяющее накопленные результаты для стационарных систем использовать и для изучения качественного поведения некоторых нестационарных систем.

Следствие 1. Любая стационарная система $\dot{x} = X(x)$ эквивалентна нестационарной системе $\dot{x} = \big(1+\alpha(t)\big)X(x)$, где $\alpha(t)$ – произвольная непрерывная нечетная скалярная функция.

Теорема. 1) При $b_2 = -a_3$, $b_3 = a_2$ система (7) эквивалентна системе вида

$$\begin{aligned}\dot{x} &= x\big((a_1 - a_3x)(1+\alpha_1(t)-\alpha_2(t)-\alpha_3(t)) - a_2y(1+\alpha_1(t))\big),\\ \dot{y} &= -y\big(a_3x(1+\alpha_1(t)-\alpha_2(t)-\alpha_3(t)) + (b_1 + a_2y)(1+\alpha_1(t))\big);\end{aligned}$$

2) при $b_1 = -a_1,\ b_2 = -a_3,\ b_3 = a_2$ система (7) эквивалентна системе вида

$$\begin{aligned}\dot{x} &= x(a_1 - a_3x)(1+\alpha_1(t)-\alpha_2(t)) + a_2\big(y\big(x(\alpha_3(t)-\alpha_1(t)-1)+\alpha_4(t)\big)+x\alpha_5(t)\big),\\ \dot{y} &= y(a_1 - a_2y)(1+\alpha_1(t)-\alpha_3(t)) - a_3\big(y\big(x(1+\alpha_1(t)-\alpha_2(t))+\alpha_4(t)\big)+x\alpha_5(t)\big);\end{aligned}$$

3) при $b_1 = -a_1$, $b_2 = -3a_3$, $b_3 = a_2/3$ система (7) эквивалентна системе вида

$$\begin{aligned}\dot{x} &= x(a_1 - a_3x - a_2y)(1+\alpha_1(t)-3\alpha_2(t)) -\\ &- a_2\Big(9a_1^2(a_3x+a_2y) + (3a_3x-a_2y)^2(9a_3x+a_2y) - 6a_1\big(15a_3^2x^2 + a_2^2y^2\big)\Big)\alpha_3(t),\\ \dot{y} &= \frac{y}{3}(3a_1 - 9a_3x - a_2y)(1+\alpha_1(t)-3\alpha_2(t)) -\\ &- 3a_3\Big(3(3a_3x-a_2y)^2(a_3x+a_2y) + 3a_1^2(9a_3x+a_2y) - 2a_1\big(27a_3^2x^2 + 5a_2^2y^2\big)\Big)\alpha_3(t);\end{aligned}$$

4) при $b_1 = -a_1$, $b_2 = -3a_3$, $b_3 = 2a_2$, система (7) эквивалентна системе вида

$$\dot{x} = \left(\left(a_1 - a_3 x - a_2 y\right)\left(1 + \alpha_1(t) - \alpha_3(t)\right) + a_2\left(a_1^2 - a_3^2 x^2\right)\alpha_2(t)\right)x,$$
$$\dot{y} = \left(a_1 - 3a_3 x - 2a_2 y\right)\left(1 + \alpha_1(t) - \alpha_3(t)\right)y - a_3 x\left(a_1^2 + a_3 x\left(a_3 x + 2a_2 y - 2a_1\right)\right)\alpha_2(t),$$

где $\alpha_i(t)$, $i = \overline{1,5}$ – произвольные скалярные непрерывные нечетные функции.

Доказательство вытекает из теоремы 1 последовательной проверкой тождества (5) для каждого множителя при $\alpha_i(t)$. Теорема доказана.

Заметим, что требование нечетности функций $\alpha_i(t)$ для приложений часто не является критичным, так как обычно динамика процессов моделируется на неотрицательной временной полуоси.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Полученные результаты позволяют использовать результаты исследования качественного поведения решений стационарной системы Лотки–Вольтерра с логистической поправкой (7) для изучения более сложных по своей природе нестационарных возмущенных систем. При этом, в частности, характер устойчивости решений, при $t = t_0$ выходящих из одной и той же точки, всех допустимо возмущенных систем такой же как и у исходной системы.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Красносельский М.А. Оператор сдвига по траекториям дифференциальных уравнений. М., *1966.*

2. Мироненко В.И. Отражающая функция и периодические решения дифференциальных уравнений. Мн., *1986.*

3. Мироненко В.И. Отражающая функция и исследование многомерных дифференциальных систем. Гомель, *2004.*

4. Мироненко В.И. Простые системы и периодические решения дифференциальных уравнений // Дифференц. уравнения. *1989. Т. 25. № 12.*

5. Мусафиров Э.В. О простоте линейных дифференциальных систем // Дифференц. уравнения. *2002. Т. 38, № 4.*

6. Мироненко В.В. Возмущения дифференциальных систем, не меняющие временных симметрий // Дифференц. уравнения. *2004. Т. 40, № 10.*