О ДОПУСТИМЫХ ВОЗМУЩЕНИЯХ ОДНОЙ ДВУМЕРНОЙ АВТОНОМНОЙ СИСТЕМЫ С КВАДРАТИЧНОЙ ПРАВОЙ ЧАСТЬЮ

Э. В. Мусафиров (Пинск, Беларусь)

Рассмотрим систему

$$\dot{x} = X(t, x), \quad t \in \mathbb{R}, \quad x \in \mathbb{R}^n, \tag{1}$$

с непрерывно дифференцируемой $X(t, x)$ и общим решением в форме Коши $x = \varphi(t; t_0, x_0)$.

Отражающая функция (ОФ) системы (1) определяется [1, с.11] как $F(t, x) := \varphi(-t; t, x)$. Если (1) 2ω-периодична по t, и F — ее ОФ, то $F(-\omega, x) = \varphi(\omega; -\omega, x)$ — отображение за период $[-\omega, \omega]$ этой системы (см. [1, с. 59]).

Функция $F(t, x)$ есть ОФ системы (1) тогда и только тогда, когда эта F является решением системы уравнений в частных производных, называемой *основным соотношением*,

$$\frac{\partial F(t,x)}{\partial t} + \frac{\partial F(t,x)}{\partial x} X(t,x) + X\left(-t, F(t,x)\right) = 0,$$

с начальным условием $F(0, x) \equiv x$.

Непрерывно дифференцируемая функция F, удовлетворяющая условиям $F(-t, F(t, x)) \equiv F(0, x) \equiv x$, является ОФ класса систем вида

$$\dot{x} = -\frac{1}{2}\frac{\partial F}{\partial x}\left(-t, F(t,x)\right)\left(\frac{\partial F(t,x)}{\partial t} - 2S(t,x)\right) - S\left(-t, F(t,x)\right), \tag{2}$$

где S — произвольная вектор–функция, при которой решения системы (2) однозначно определяются своими начальными условиями. Поэтому все системы вида (1) разбиваются на классы эквивалентности вида (2) таким образом, что каждый класс характеризуется некоторой ОФ, называемой ОФ класса.

Для всех систем из одного класса оператор сдвига [2, с. 11–12] на промежутке $[-\omega, \omega]$ один и тот же. Поэтому все эквивалентные 2ω–периодические системы имеют одно и то же отображение за период.

Иногда можно построить систему, эквивалентную данной, даже не зная ОФ. Например, если система (1) эквивалентна некоторой автономной системе, то эта система совпадает с системой $\dot{x} = X(0, x)$. В классах без автономных систем роль автономной системы выполняет *простая система* (см. [3, 4])

$$\dot{x} = -\frac{1}{2}\frac{\partial F}{\partial x}\left(-t, F(t,x)\right)\frac{\partial F(t,x)}{\partial t} \equiv -\frac{1}{2}\left(\frac{\partial F(t,x)}{\partial x}\right)^{-1}\frac{\partial F(t,x)}{\partial t},$$

где $F(t, x)$ — ОФ этой системы.

Под допустимыми возмущениями будем понимать возмущения, не меняющие отражающей функции системы (1). Если система (1) автономна (т. е. $X(t, x) \equiv X(x)$), то она является простой и эквивалентной (см. [1, 2]) любой системе $\dot{x} = X(x) + \alpha(t)X(x)$, где $\alpha(t)$ — любая скалярная непрерывная нечетная функция.

Система $\dot{x} = X(t, x) + S(t, x)$, $t \in \mathbb{R}$, $x \in \mathbb{R}^n$ с непрерывно дифференцируемыми вектор–функциями $X(t, x)$ и $S(t, x)$ эквивалентна системе (1) тогда и только тогда (см. [5]), когда

$$S(t,x) = \sum_{k=1}^{\infty} \alpha_k(t)\Delta_k(t,x),$$

где $\alpha_k(t)$ — непрерывные скалярные нечетные функции, а $\Delta_k(t,x)$ являются решениями уравнения
$$\frac{\partial\Delta}{\partial t}(t,x)+\frac{\partial\Delta}{\partial x}(t,x)X(t,x)-\frac{\partial X}{\partial x}(t,x)\Delta(t,x)=0.$$
Используя этот результат, можно указать допустимые возмущения автономной системы, отличные от описанных выше.

Теорема. *При любых $a,b,c,d,e\in\mathbb{R}$ таких, что $c\neq 0$, $c^2\neq de$, $e\neq 0$, система*

$$\begin{aligned}\dot x &= a-\frac{bc\,(c^2-2de)}{2e\,(c^2-de)}x^2+bxy-\frac{bce}{2(c^2-de)}y^2,\\ \dot y &= -\frac{ad}{c}+\frac{bc^2d}{2e(c^2-de)}x^2-\frac{bde}{2(c^2-de)}y^2\end{aligned}$$

эквивалентна (в смысле совпадения отражающих функций) системе

$$\begin{aligned}\dot x &= a-\frac{bc\,(c^2-2de)}{2e\,(c^2-de)}x^2+bxy-\frac{bce}{2(c^2-de)}y^2+\left(\frac{d}{c}x+y\right)e\alpha(t),\\ \dot y &= -\frac{ad}{c}+\frac{bc^2d}{2e(c^2-de)}x^2-\frac{bde}{2(c^2-de)}y^2+(dx+cy)\alpha(t),\end{aligned}$$

где $\alpha(t)$ — произвольная скалярная непрерывная нечетная функция.

Заметим, что требование нечетности функций $\alpha_k(t)$ для приложений часто не является критичным, так как обычно динамика процессов моделируется на неотрицательной временной полуоси.

Исследования выполнены при финансовой поддержке БРФФИ.

Литература

1. Мироненко В. И. *Отражающая функция и исследование многомерных дифференциальных систем.* Гомель: ГГУ им. Ф. Скорины. 2004.

2. Красносельский М. А. *Оператор сдвига по траекториям дифференциальных уравнений.* М.: Наука. 1966.

3. Мусафиров Э. В. *О простоте линейных дифференциальных систем* // Дифференц. уравнения. 2002. Т. 38, № 4. С. 570–572.

4. Мусафиров Э. В. *Временные симметрии дифференциальных систем.* Пинск: ПолесГУ. 2009.

5. Мироненко В. И., Мироненко В. В. *Возмущения систем, не изменяющие временных симметрий, и отображения Пуанкаре* // Дифференц. уравнения, 2008. Т. 44, № 10. С. 1347–1352.