

ISSN 2079 – 6900

ЖУРНАЛ СРЕДНЕВОЛЖСКОГО МАТЕМАТИЧЕСКОГО ОБЩЕСТВА

Том 12, № 4



2010

СРЕДНЕВОЛЖСКОЕ МАТЕМАТИЧЕСКОЕ ОБЩЕСТВО

МОРДОВСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ
ИМЕНИ Н. П. ОГАРЕВА

Журнал Средневолжского математического общества

Том 12, № 4

Издается с декабря 1998 года
Выходит четыре раза в год

РЕДАКЦИОННАЯ КОЛЛЕГИЯ: В. Ф. Тишкин (главный редактор),
М. Т. Терехин (зам. главного редактора),
Л. А. Сухарев (ответственный секретарь),
П. А. Шаманаев (зам. отв. секретаря),
И. В. Бойков, П. А. Вельмисов, В. К. Горбунов,
В. З. Гринес, Ю. Н. Дерюгин, А. Ф. Зубова,
Е. Б. Кузнецов, Б. В. Логинов, С. И. Спивак,
В. А. Треногин

САРАНСК

2010

«Журнал Средневолжского математического общества», публикует обзорные статьи по наиболее актуальным проблемам математики, краткие сообщения Средневолжского математического общества и информацию о математической жизни в России и за рубежом. Предназначается для научных работников, преподавателей, аспирантов и студентов старших курсов.

Журнал зарегистрирован в Федеральной службе по надзору в сфере связи, информационных технологий и массовых коммуникаций (Роскомнадзор). Свидетельство о регистрации средства массовой информации ПИ № ФС77-37887 от 23 октября 2009 года.

Учредители — Межрегиональная общественная организация «Средневолжское математическое общество» и Государственное образовательное учреждение высшего профессионального образования «Мордовский государственный университет имени Н. П. Огарева».

Журнал Средневолжского математического общества. Том 12, № 4.

Компьютерная верстка: Атряхин В. А.

Корректоры: Напалкова Ю. В., Ляпина А. А.

Издается в НИИ математики Мордовского государственного университета им. Н.П. Огарева

Адрес редакции: 430005, г. Саранск, ул. Большевикская, 68, НИИ математики.

Тел.: (834-2) 23-32-05

E-mail для статей: journal@svmo.ru

E-mail для организационных вопросов: svmo@svmo.ru, conf@svmo.ru

Web: <http://www.svmo.ru>

ISSN 2079 – 6900

С 2010 г. полнотекстовая версия журнала размещается на сайте Общероссийского математического портала Math-Net.Ru

УДК 517.926.7

Условия простоты систем линейных дифференциальных уравнений

© Э. В. Мусафиров¹

Аннотация. В работе получены необходимые, достаточные, а также необходимые и достаточные условия простоты обыкновенных линейных дифференциальных систем. Установлена взаимосвязь свойства простоты линейной дифференциальной системы со свойствами решений системы с удвоенной матрицей коэффициентов.

Ключевые слова: система обыкновенных линейных дифференциальных уравнений, отражающая функция, отражающая матрица, простые системы.

1. Введение

Многие процессы, происходящие в реальных системах, моделируются с помощью систем дифференциальных уравнений. Однако, как правило, эти дифференциальные системы не интегрируются в конечном виде, что приводит к необходимости изучать свойства решений этих систем по виду самих систем. На качественное поведение семейств решений существенное влияние оказывает наличие, количество и расположение периодических решений. При этом для выяснения вопросов о существовании и количестве периодических решений можно использовать отображение Пуанкаре (отображение за период) (см., например, [1]), знание которого позволяет решить вопросы существования и устойчивости периодических решений. Учитывая, что отображение за период определяется через общее решение системы, кажется, что найти явное выражение для отображения за период для неинтегрируемых в конечном виде систем невозможно. Однако иногда это можно сделать с помощью отражающей функции (ОФ) Мироненко В.И. (см. [2, 3]).

Далее приведем сведения из теории ОФ, необходимые для дальнейшего изложения.

Рассмотрим систему

$$\dot{x} = X(t, x), \quad t \in \mathbb{R}, \quad x \in \mathbb{R}^n, \quad (1.1)$$

решения которой однозначно определяются начальными условиями. Пусть общее решение этой системы в форме Коши имеет вид $x = \varphi(t; t_0, x_0)$.

Для каждой такой системы определяется (см. [2, 3]) *отражающая функция* $F(t, x) := \varphi(-t; t, x)$, определенная в некоторой области, содержащей гиперплоскость $t = 0$.

Функция $F(t, x)$ есть ОФ системы (1.1) тогда и только тогда, когда эта F является решением системы уравнений в частных производных, называемой *основным соотношением* (ОС), $\frac{\partial F(t, x)}{\partial t} + \frac{\partial F(t, x)}{\partial x} X(t, x) + X(-t, F(t, x)) = 0$, с начальным условием $F(0, x) \equiv x$.

Любая непрерывно дифференцируемая функция $F(t, x)$, удовлетворяющая условию $F(-t, F(t, x)) \equiv F(0, x) \equiv x$, является ОФ целого класса систем вида (см. [3])

$$\dot{x} = -\frac{1}{2} \frac{\partial F}{\partial x}(-t, F(t, x)) \left(\frac{\partial F(t, x)}{\partial t} - 2S(t, x) \right) - S(-t, F(t, x)), \quad (1.2)$$

¹Заведующий кафедрой высшей математики и информационных технологий, Полесский государственный университет, г. Пинск, Беларусь; musafirov@bk.ru.

где $S(t, x)$ — произвольная вектор-функция, при которой решения системы (1.2) однозначно определяются начальными условиями.

Поэтому все системы вида (1.1) разбиваются на классы эквивалентности вида (1.2) так, что каждый класс характеризуется своей ОФ, называемой *отражающей функцией класса*.

Таким образом, при изучении вопросов существования и устойчивости периодических решений, а также существования решений краевых задач у некоторой дифференциальной системы эту систему можно заменить эквивалентной (в смысле совпадения ОФ). Это легко сделать, когда ОФ данной системы известна. Однако иногда можно построить дифференциальную систему, эквивалентную данной, и в том случае, когда ОФ неизвестна. Например, если система (1.1) эквивалентна некоторой стационарной системе, то эта система совпадает с системой $\dot{x} = X(0, x)$. Таким образом, в том классе эквивалентности, в котором существует стационарная система, эта стационарная система может играть роль такой системы. В других классах роль стационарной системы выполняет *простая система* (см. [4, 5]), получающаяся из системы (1.2) при $S(t, x) \equiv 0$,

$$\dot{x} = -\frac{1}{2} \frac{\partial F}{\partial x}(-t, F(t, x)) \frac{\partial F(t, x)}{\partial t} \equiv -\frac{1}{2} \left(\frac{\partial F(t, x)}{\partial x} \right)^{-1} \frac{\partial F(t, x)}{\partial t},$$

где $F(t, x)$ — ОФ этой системы.

Знание свойств простых систем позволяет использовать обширные результаты исследований стационарных систем, полученных в различных областях математического моделирования, для качественного изучения эквивалентных (в смысле совпадения ОФ) нестационарных систем, учитывая, что любая стационарная система является простой.

Для линейной системы

$$\dot{x} = P(t)x, \quad t \in \mathbb{R}, \quad x \in \mathbb{R}^n, \quad (1.3)$$

где $P(t)$ — непрерывная $n \times n$ -матрица, ОФ также линейна и имеет вид $F(t, x) \equiv F(t)x$. Матрица $F(t)$, согласно [2], называется отражающей матрицей (ОМ) системы (4). Если $X(t)$ — фундаментальная матрица решений (ФМ) системы (4), то $F(t) \equiv X(-t)X^{-1}(t)$. Поэтому для любой ОМ $F(t)$ справедливы соотношения $F(-t)F(t) \equiv F(0) = E$, где E — единичная $n \times n$ -матрица. ОС в линейном случае имеет вид $\dot{F}(t) + F(t)P(t) + P(-t)F(t) = 0$, $F(0) = E$. Всякая линейная система с ОМ $F(t)$ может быть записана в виде $\dot{x} = \left(-\frac{1}{2}F(-t)\dot{F}(t) + F(-t)R(t) - R(-t)F(t) \right) x$, где $R(t)$ — произвольная $n \times n$ -матрица. При $R(t) \equiv 0$ получим *простую линейную систему* $\dot{x} = -\frac{1}{2}F(-t)\dot{F}(t)x$.

Заметим, что в одном классе эквивалентности с линейной системой (4) находятся и нелинейные системы обладающие линейной ОФ, поэтому система (4) представляет интерес не только как линейное приближение системы (1.1).

Если матрица $P(t)$ — 2ω -периодическая и $F(t)$ — ОМ системы (1.3), то $F(-\omega)$ — *матрица монодромии* (см. [6]) этой системы на периоде $[-\omega; \omega]$. При этом решения μ_i , $i = \overline{1, n}$ уравнения $\det(F(-\omega) - \mu E) = 0$ являются *мультипликаторами* (см. [6]) системы (1.3).

2. Условия простоты линейных систем

Л е м м а 2.1. *Для простоты системы (1.3) с ОМ $F(t)$ необходимо и достаточно выполнения тождества*

$$F(t)P(t) \equiv P(-t)F(t). \quad (2.1)$$

Доказательство. Необходимость. Пусть данная система простая, $F(t, x)$ — ее ОФ. Тогда по лемме 1 из [4] верно тождество $F'_x(t, x)P(t)x \equiv P(-t)F(t, x)$. Так как $F(t, x) \equiv F(t)x$, то $F(t)P(t)x \equiv P(-t)F(t)x$. Тогда $F(t)P(t) \equiv P(-t)F(t)$.

Достаточность. Пусть выполняется тождество (2.1). Умножим его обе части на x , получим $F(t)P(t)x \equiv P(-t)F(t)x$. Так как $F(t, x) \equiv F(t)x$, то последнее тождество можно записать в виде $F'_x(t, x)P(t)x \equiv P(-t)F(t, x)$. Тогда по лемме 1 из [4] данная система простая.

Доказательство закончено.

Из доказанной леммы вытекает следующее утверждение.

Теорема 2.1. Система (1.3) проста тогда и только тогда, когда матрицы $P(t)$ и $P(-t)$ подобны и существует дифференцируемая матрица подобия $S(t)$, для которой $S(t)P(t) \equiv P(-t)S(t)$, $S(0) = E$ и $\dot{S}(t) \equiv -2P(-t)S(t)$.

Доказательство. Необходимость. Пусть система (1.3) проста, тогда по лемме 2.1. $F(t)P(t) \equiv P(-t)F(t)$, где $F(t)$ — ОМ системы (1.3). Т.е. матрицы $P(t)$ и $P(-t)$ подобны с матрицей подобия $F(t)$. Так как $F(t)$ — ОМ, то она дифференцируемая, $F(0) = E$ и $\dot{F}(t) + F(t)P(t) + P(-t)F(t) \equiv 0$. А так как $F(t)P(t) \equiv P(-t)F(t)$, то $\dot{F}(t) \equiv -2P(-t)F(t)$. Т.е. роль $S(t)$ играет ОМ системы (1.3).

Достаточность. Пусть матрицы $P(t)$ и $P(-t)$ подобны с дифференцируемой матрицей подобия $S(t)$, причем $S(t)P(t) \equiv P(-t)S(t)$, $S(0) = E$ и $\dot{S}(t) \equiv -2P(-t)S(t)$. Тогда $\dot{S}(t) + S(t)P(t) + P(-t)S(t) \equiv 0$. Таким образом, для системы (1.3) и дифференцируемой матрицы $S(t)$ выполнено ОС. Значит, $S(t)$ — ОМ системы (1.3). А так как для нее $S(t)P(t) \equiv P(-t)S(t)$, то по лемме 2.1. система (1.3) проста.

Доказательство закончено.

Замечание 2.1. Из доказательства теоремы 2.1. следует, что матрица $S(t)$ из формулировки теоремы является ОМ системы (1.3).

Теорема 2.1. в некоторых случаях позволяет выяснить: является ли данная система простой. Покажем это на примере.

Пример 2.1. Рассмотрим систему (1.3) с матрицей системы

$$P(t) \equiv \frac{1}{2} \begin{pmatrix} \cos t + \sin^3 t & (\cos t + \sin^2 t + \sin^3 t) e^{-\cos t} \\ -(\cos t - \sin^2 t + \sin^3 t) e^{\cos t} & -\cos t - \sin^3 t \end{pmatrix}.$$

Для этой системы рассмотрим матрицу

$$S(t) \equiv \begin{pmatrix} 1 - \sin t & -e^{-\cos t} \sin t \\ e^{\cos t} \sin t & 1 + \sin t \end{pmatrix}.$$

Проверкой убедимся, что $S(0) = E$, $S(t)P(t) \equiv P(-t)S(t)$ и $\dot{S}(t) \equiv -2P(-t)S(t)$. Тогда по теореме 2.1. рассматриваемая система является простой. Заметим также, что $S(t)$ — ОМ рассматриваемой системы.

Таким образом, если система (1.3) проста, то по теореме 2.1. матрицы $P(t)$ и $P(-t)$ подобны. Это позволяет получить следующие утверждения.

Следствие 2.1. Если система (1.3) проста, то собственные числа $\lambda_1(t), \lambda_2(t), \dots, \lambda_n(t)$ матрицы $P(t)$ можно определить так, чтобы функции $\lambda_i : t \mapsto \lambda_i(t)$ были четными.

Доказательство. Следует из леммы 2.4., учитывая, что у многочлена $\det(\dot{P}(t) - \lambda E)$ коэффициент при λ^{n-1} равен $(-1)^{n-1} \text{Tr} \dot{P}(t)$, а коэффициент при λ^0 равен $\det \dot{P}(t)$.

Доказательство закончено.

Аналогичные утверждения можно доказать и для матрицы $P(t)\dot{P}(t)$. Так из тождества (2.3) вытекают следующие утверждения.

Следствие 2.5. Если система (1.3) с непрерывно дифференцируемой матрицей $P(t)$ проста, то собственные числа $\lambda_1(t), \lambda_2(t), \dots, \lambda_n(t)$ матрицы $P(t)\dot{P}(t)$ можно определить так, чтобы функции $\lambda_i: t \mapsto \lambda_i(t)$ были нечетными.

Лемма 2.5. Пусть система (1.3) с непрерывно дифференцируемой матрицей $P(t)$ проста. И пусть $\det(P(t)\dot{P}(t) - \lambda E) \equiv (-1)^n \lambda^n + a_1(t)\lambda^{n-1} + \dots + a_{n-1}(t)\lambda + a_n(t)$. Тогда функции $a_{2k-1}(t)$, $k = \overline{1, \lfloor \frac{n+1}{2} \rfloor}$ — нечетные, а функции $a_{2k}(t)$, $k = \overline{1, \lfloor \frac{n}{2} \rfloor}$ — четные. ($\lfloor r \rfloor$ означает целую часть числа r).

Следствие 2.6. Пусть система (1.3) с непрерывно дифференцируемой матрицей $P(t)$ проста, тогда $\text{Tr}(P(t)\dot{P}(t))$ — нечетная функция. Если при этом размерность n системы — четное число, то $\det(P(t)\dot{P}(t))$ — четная функция, если же размерность системы — нечетное число, то $\det(P(t)\dot{P}(t))$ — нечетная функция.

Может показаться, что совокупность необходимых условий простоты из следствий 2.1., 2.3. и 2.5. является достаточным условием. Следующий пример показывает, что это не так.

Пример 2.2. Рассмотрим систему (1.3) с матрицей

$$P(t) \equiv \begin{pmatrix} t^4 & t^2 - t^4 \\ t^4 + t^2 & -t^4 \end{pmatrix}. \quad (2.4)$$

Собственными значениями матрицы $P(t)$ являются четные функции $\pm t^2$, матрицы $\dot{P}(t)$ — нечетные функции $\pm 2t$, а матрицы $P(t)\dot{P}(t)$ — нечетные функции $\nu_{1,2} = 2t^3$. Тем не менее система (1.3) с матрицей (2.4) не является простой. Докажем это.

Допустим противное. Пусть рассматриваемая система проста и

$$F(t) := \begin{pmatrix} f_1(t) & f_2(t) \\ f_3(t) & f_4(t) \end{pmatrix}$$

— ее отражающая матрица. Тогда по лемме 2.1. и лемме 2.3. имеем $F(t)P(t) - P(-t)F(t) \equiv 0$, $F(t)\dot{P}(t) + \dot{P}(-t)F(t) \equiv 0$. Откуда при $t \neq 0$ получим, что $f_2(t) \equiv f_3(t) \equiv 0$, $f_1(t) \equiv f_4(t)$, т.е.

$$F(t) \equiv \begin{pmatrix} f_4(t) & 0 \\ 0 & f_4(t) \end{pmatrix}.$$

Проверкой убедимся, что эта $F(t)$ не удовлетворяет ОС. Таким образом, получили противоречие с тем, что $F(t)$ — ОМ рассматриваемой системы.

3. Связь с системой с удвоенной правой частью

Покажем связь условия простоты системы (1.3) со свойствами решений системы с удвоенной матрицей коэффициентов

$$\dot{x} = 2P(t)x. \quad (3.1)$$

Л е м м а 3.1. *Если система (1.3) проста и $F(t)$ — ее ОМ, то $F(-t)$ — ФМ, а $F^2(t)$ — ОМ системы (3.1).*

Д о к а з а т е л ь с т в о. Пусть система (1.3) проста, тогда из теоремы 2.1. следует, что $\dot{F}(t) \equiv -2P(-t)F(t)$. Умножим это тождество на (-1) и заменим t на $(-t)$, получим $-\dot{F}(-t) \equiv 2P(t)F(-t)$. Таким образом, матрица $F(-t)$ составлена из столбцов-решений системы (3.1). А так как $F(0) = E$, то матрица $F(-t)$ является ФМ для системы (3.1).

Согласно [2], ОМ системы (3.1) $\Phi(t) \equiv X(-t)X^{-1}(t)$, где $X(t)$ — ее ФМ. Т.к. $F(t)$ — ОМ системы (1.3), то $F(-t) \equiv F^{-1}(t)$. Учитывая, что $X(t) \equiv F(-t)$, получим $\Phi(t) \equiv F^2(t)$. **Д о к а з а т е л ь с т в о з а к о н ч е н о.**

Доказанную лемму проиллюстрируем следующим примером.

П р и м е р 3.1. *Рассмотрим систему (1.3), где*

$$P(t) \equiv \frac{1}{2} \begin{pmatrix} \cos t + \sin^3 t & (\cos t + \sin^2 t + \sin^3 t) e^{-\cos t} \\ -(\cos t - \sin^2 t + \sin^3 t) e^{\cos t} & -\cos t - \sin^3 t \end{pmatrix}.$$

В примере 2.1. показано, что эта система простая и ее отражающая матрица

$$F(t) \equiv \begin{pmatrix} 1 - \sin t & -e^{-\cos t} \sin t \\ e^{\cos t} \sin t & 1 + \sin t \end{pmatrix}.$$

Тогда по лемме 3.1. общее решение системы $\dot{x} = (\cos t + \sin^3 t)x + \exp(-\cos t)(\cos t + \sin^2 t + \sin^3 t)y$, $\dot{y} = -\exp(\cos t)(\cos t - \sin^2 t + \sin^3 t)x - (\cos t + \sin^3 t)y$ имеет вид $x = c_1(1 + \sin t) + c_2 \exp(-\cos t) \sin t$, $y = -c_1 \exp(\cos t) \sin t + c_2(1 - \sin t)$.

Аналогично предыдущей лемме можно сформулировать и доказать следующее утверждение.

Л е м м а 3.2. *Пусть система (1.3) проста и $F(t)$ — ее ОМ. Тогда $F(t)$ — ФМ, а $F^2(-t)$ — ОМ системы*

$$\dot{x} = -2P(-t)x. \quad (3.2)$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. Т.к. система проста, то по лемме 2.1. $F(t)P(t) \equiv P(-t)F(t)$ и, следовательно, ОС примет вид $\dot{F}(t) \equiv -2P(-t)F(t)$. Таким образом, матрица $F(t)$ составлена из столбцов-решений системы (3.2). А так как $F(0) = E$, то матрица $F(t)$ является ФМ для системы (3.2).

По определению ОМ, ОМ системы (3.2) $\Phi(t) \equiv F(-t)F^{-1}(t)$. Учитывая, что $F(-t)F(t) \equiv E$, имеем $\Phi(t) \equiv F^2(-t)$.

Д о к а з а т е л ь с т в о з а к о н ч е н о.

Таким образом, зная ОМ простой системы (1.3), мы можем найти ФМ системы с удвоенной правой частью. В связи с этим возникает обратный вопрос: зная ФМ системы с удвоенной правой частью, можно ли найти ОМ системы (1.3) и выяснить, является ли система (1.3) простой? Ответ на этот вопрос дает следующее утверждение.

Т е о р е м а 3.1. Пусть $X(t)$ — ФМ системы (1.3), нормированная при $t = 0$ (т.е. $X(0) = E$), и для нее справедливо тождество $X(t)P(-t) \equiv P(t)X(t)$. Тогда система

$$\dot{x} = \frac{1}{2}P(t)x \quad (3.3)$$

является простой с ОМ $X(-t)$.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Пусть $X(t)$ — ФМ системы (1.3), тогда $\dot{X}(t) \equiv P(t)X(t)$. Умножая полученное тождество на -1 и заменяя t на $-t$, получим $\frac{d}{dt}(X(-t)) \equiv -P(-t)X(-t)$. Пусть $S(t) \equiv X(-t)$. Т.к. $X(0) = E$, то для системы (1.3) выполняются условия теоремы 2.1., следовательно, система (3.3) простая. Проверкой основного соотношения убедимся, что $X(-t)$ — ее ОФ.

Д о к а з а т е л ь с т в о з а к о н ч е н о.

П р и м е р 3.2. Проверкой убедимся, что

$$X(t) \equiv \begin{pmatrix} 1 + \sin t & e^{-\cos t} \sin t \\ -e^{\cos t} \sin t & 1 - \sin t \end{pmatrix}$$

— ФМ системы (1.3) с матрицей

$$P(t) \equiv \begin{pmatrix} \cos t + \sin^3 t & (\cos t + \sin^2 t + \sin^3 t) e^{-\cos t} \\ -(\cos t - \sin^2 t + \sin^3 t) e^{\cos t} & -\cos t - \sin^3 t \end{pmatrix}$$

и $X(0) = E$, $X(t)P(-t) \equiv P(t)X(t)$. Тогда по теореме 3.1. система

$$\begin{cases} \dot{x} = \frac{1}{2}(\cos t + \sin^3 t)x + \frac{1}{2}(\cos t + \sin^2 t + \sin^3 t)\exp(-\cos t)y, \\ \dot{y} = -\frac{1}{2}(\cos t - \sin^2 t + \sin^3 t)\exp(\cos t)x - \frac{1}{2}(\cos t + \sin^3 t)y \end{cases} \quad (3.4)$$

является простой с ОМ $X(-t)$. Эта система 2π -периодическая. Ее матрица монодромии на отрезке $[-\pi; \pi]$ есть $X(\pi) = E$. Следовательно, эта простая система устойчива и все ее решения 2π -периодические.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Красносельский М.А. Оператор сдвига по траекториям дифференциальных уравнений. — М.: Наука, 1966. — 332 с.
2. Мироненко В.И. Отражающая функция и периодические решения дифференциальных уравнений. — Минск: Университетское, 1986. — 76 с.
3. Мироненко В.И. Отражающая функция и исследование многомерных дифференциальных систем. — Гомель: ГГУ им. Ф. Скорины, 2004. — 196 с.
4. Мироненко В.И. Простые системы и периодические решения дифференциальных уравнений // Дифференц. уравнения. — 1989. — Т. 25, № 12. — С. 2109-2114.
5. Мусафиров Э.В. О простоте линейных дифференциальных систем // Дифференциальные уравнения. — 2002. — Т. 38, № 4. — С. 570-572.
6. Демидович Б.П. Лекции по математической теории устойчивости. — М.: Изд-во Моск. ун-та, 1998. — 480 с.
7. Гантмахер Ф.Р. Теория матриц. — М.: ГИТТЛ, 1954. — 491 с.

Conditions of simplicity of linear differential systems.

© E. V. Musafirov²

Abstract. In the work necessary, sufficient, and also necessary and sufficient conditions of simplicity of linear ordinary differential systems are obtained. The interrelation of property of simplicity of linear differential system with properties of solutions of system with the double coefficient matrix is established.

Key Words: linear ODE systems, reflective function, reflective matrix, simple systems.

²Head of Higher Mathematics and Information Technologies Chair, Poleskii State University, Pinsk, Belarus; musafirov@bk.ru.

Содержание

РЕДАКЦИОННАЯ СТРАНИЦА	6
-----------------------------	---

В.К. Горбунов, А.Г. Ледовских

Построение поля потребительских предпочтений по торговой статистике	10
1. Введение	10
2. Обобщённая модель потребительского спроса	11
3. Задача построения поля предпочтений	12
4. Обобщённая система Африата её решение	13
5. Построение поля предпочтений	15

Ф.В. Лубышев, М.Э. Файрузов

Разностные аналоги некоторых мультипликативных неравенств О.А. Ладыженской для функциональных пространств $W_2^1(\Omega)$, $W_{2,0}^2(\Omega)$	21
1. Введение	21
2. Некоторые обозначения и вспомогательные утверждения	22
3. Сеточные аналоги некоторых мультипликативных неравенств Ладыженской	25

П. А. Вельмисов, Ю. А. Казакова

О параметрических решениях дифференциальных уравнений с частными производными; приложения в трансзвуковой газовой динамике.	30
1. Описание метода построения параметрических решений	30
2. Применение метода к уравнениям трансзвуковой газовой динамики	31
3. Трансзвуковые течения газа с местными сверхзвуковыми зонами в соплах Лавалья.	33

В. Г. Малинов

О проекционном квазиньютоновском обобщенном двухшаговом методе минимизации и оптимизации траектории летательного аппарата	37
1. Постановка задачи и предыстория	37
2. Метод решения задачи	38
3. Вспомогательные утверждения	39
4. Обоснование сходимости метода	41
5. Численное решение модельной задачи	43

В СРЕДНЕВОЛЖСКОМ МАТЕМАТИЧЕСКОМ ОБЩЕСТВЕ

В. В. Абрамов

Устойчивость нулевого решения периодической системы дифференциальных уравнений с малым параметром	49
1. Постановка задачи	49
2. Признаки устойчивости	51
3. Пример	52

Е. Л. Авербух, А. А. Куркин

Моделирование динамики поверхностных волн оползневого происхождения методом частиц	55
1. Введение	55
2. Гидродинамика сглаженных частиц	56
3. Основные уравнения модели	59
4. Заключение	62

А. С. Андреев

Метод функций Ляпунова в задачах управления	64
1. Введение	64
2. Основные построения	65
3. Теоремы о стабилизации	68
4. Некоторые примеры	70

А. В. Балаев, И. Ф. Басыров

Разработка неизотермической кинетической модели реакции дегидрирования стирола на железокалиевом катализаторе	74
1. Введение	74
2. Разработка кинетической модели	74
3. Выводы	76

П. А. Вельмисов, А. В. Крупенников

Об одной нелинейной начально-краевой задаче в аэрогидромеханике	79
1. Постановка задачи	79
2. Точное решение	80
3. Приближенное решение	82

П. А. Вельмисов, Ю. В. Покладова, Е. С. Серебрянникова

Математическое моделирование системы «трубопровод - датчик давления»	85
1. Математические модели механической ситемы «трубопровод - датчик давления»	85
2. Примеры исследования динамики упругого элемента датчика давления	88

О. В. Видилина

Две задачи оптимального быстрогодействия	94
1. Задача оптимального быстрогодействия для магнитоэлектрического силового привода	94

2.	Оптимальное управление температурным полем	97
----	------------------------------------------------------	----

Э. Р. Гиззатова, С. И. Спивак, В. З. Мингалеев, Ю. Б. Монаков
О решении прямой кинетической задачи для процессов сополимеризации на катализаторах Циглера-Натта 104

1.	Введение	104
2.	Постановка прямой кинетической задачи	105
3.	Методика решения прямой кинетической задачи	106

И.Е. Дергунов, И.В. Лутошкин
Метод параметризации для оптимизации систем, представляемых интегро-дифференциальными уравнениями . . . 110

1.	Введение	110
2.	Постановка задачи	111
3.	Параметризация задачи	111
4.	Дифференцирование функционала по параметрам	112
5.	Пример	115

А. Н. Джафаров
О методе «неполных наказаний» в неантагонистических позиционных дифференциальных играх двух лиц 120

1.	Введение	120
2.	Постановка задачи	121
3.	Результаты	123

Р. В. Жалнин
Решение модельной задачи для уравнения диффузионного типа многосеточным методом на нерегулярной сетке 126

Л. Ю. Катаева, Д. А. Масленников, М. В. Прокофьева
Анализ эффективности итерационно-интерполяционного метода 130

1.	Введение	130
2.	Схемы итерационно-интерполяционного метода и их свойства	130
3.	Анализ эффективности	131

В. Н. Кризский, Н. В. Трегубов, Р. Р. Яматов
О способе вычисления потенциальных физических полей в кусочно-анизотропных средах 134

1.	Введение	134
2.	Стационарное поле в кусочно-анизотропной среде	136
3.	Нестационарное поле в кусочно-анизотропной среде	141
4.	Выводы	144

Ю. Б. Малыханов, И. Н. Ерёмкин
Методы высокоточной оптимизации базисных функций в расчётах аналитических ХФ-орбиталей атомов с открытыми оболочками одинаковой симметрии 146

1.	Введение	146
2.	Уравнения самосогласованного поля Хартри—Фока для атомов с открытыми оболочками одинаковой симметрии	147
3.	Результаты и обсуждение	148
4.	Заключение	149

Т. Ф. Мамедова, А. А. Ляпина

	Об исследовании динамических моделей социально-экономических систем на устойчивость по части переменных . . .	152
--	---------------------------------------------------------------------------------------------------------------	-----

Э. В. Мусафиров

	Условия простоты систем линейных дифференциальных уравнений	158
--	-------------------------------------------------------------	-----

1.	Введение	158
2.	Условия простоты линейных систем	159
3.	Связь с системой с удвоенной правой частью	164

Ю. В. Напалкова, Т. Ф. Мамедова

	Математическая модель управления трудовыми ресурсами предприятия	167
--	----------------------------------------------------------------------------	-----

1.	Постановка задачи	167
2.	Создание базы данных	167
3.	Построение управляемого прогноза	168

Н. И. Овсянникова

	Использование унифицированного разложения Тейлора-Ито для системы стохастических дифференциальных уравнений, описывающих динамику эпидемии	171
--	------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------	-----

1.	Введение	171
2.	Постановка задачи	172
3.	Анализ численного решения	174

Д. Г. Рахимов

	О вычислении кратных фредгольмовых точек дискретного спектра линейных оператор-функций методом ложных возмущений	180
--	------------------------------------------------------------------------------------------------------------------	-----

1.	Введение	180
2.	Постановка задачи	180
3.	Сведение к одномерному случаю	181
4.	Случай кратного собственного значения с ОЖН.	184

Г. Ф. Сафина

	О задаче сохранения частот осесимметричных колебаний трубы .	187
--	--------------------------------------------------------------	-----

1.	Введение	187
2.	Прямая задача по осесимметричным колебаниям оболочки	187
3.	Влияние упругих закреплений оболочки на частоты ее осесимметричных колебаний	188
4.	Задача сохранения заданных частот колебаний	190
5.	Заключение	196

С.И. Спивак, А.В. Балаев, И.А. Нуриахметов

Математическая модель неизотермических автоколебаний в реакции окисления окиси этилена 199

1. Постановка задачи 199
2. Ход решения 200
3. Пример расчета температуры 201

С. И. Спивак, А. С. Исмагилова

Метод анализа информативности кинетических измерений при определении параметров математических моделей химической кинетики 203

1. Введение 203
2. Графическая интерпретация маршрутов химических реакций 203
3. Пример 205

М.И. Тимошин

Использование динамических симметрий к интегрированию ОДУ второго порядка 211

1. Введение 211
2. Пример нахождения динамических симметрий ОДУ второго порядка 213
3. Пример использования динамических симметрий к интегрированию ОДУ второго порядка 215
4. Решения типа бегущей волны нелинейного уравнения теплопроводности . . . 217

А. Н. Тында, А. Е. Романов

Численное решение плоских контактных задач для неоднородных стареющих вязкоупругих оснований 221

1. Математическая модель 221
2. Описание алгоритма 223

М.Н. Фаттахов, Р.Р. Исмаилов, Э.Д. Шакирьянов, С.М. Усманов

Моделирование трехмерной свободно-радикальной полимеризации методом Монте-Карло 227

1. Введение 227
2. Объект исследования 227
3. Описание математической модели 228
4. Результаты численного эксперимента 230
5. Заключение 231

П.А. Шаманаев, В.А. Атряхин

Построение математической модели прогнозирования потока научных и научно-педагогических кадров 234

1. Введение 234
 2. Описание модели прогнозирования потока научных и научно-педагогических кадров 234
-

Р. Р. Шангареев

- Кинетическое описание и моделирование процессов с учетом дезактивации катализатора 239
1. Введение 239
 2. Постановка задачи 240

КРАТКИЕ СООБЩЕНИЯ

В. В. Дикусар, Н. В. Зубов, С. В. Зубов

- Определение вещественного радиуса устойчивости 246

С.А. Дутов, О.А. Зубова, А.И. Иванов

- Модифицированный метод построения минимального многочлена 250

Н.В. Зубов, В.В. Дикусар, С.А. Дутов

- Задача определения минимального числа управляющих воздействий 255

В. И. Зубов, О. А. Зубова, А. И. Иванов

- Построение определенного решающего правила 260

ВОПРОСЫ ПРЕПОДАВАНИЯ И ПРИЛОЖЕНИЯ

С. Н. Лизин, С. А. Федосин

- Управление данными в корпоративных информационных системах 263
1. Проблема отслеживания изменений 263
 2. Транзакционные и нетранзакционные 265
 3. Темпоральность в реляционной СУБД 266
 4. Заключение 268

- Памяти Николая Владимировича Зубова 275

- Правила оформления рукописей для публикации
в журнале «Журнал СВМО» 273

- Алфавитный указатель 275