МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ И НАУКИ РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ
ФГБОУ ВПО «МОРДОВСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ ПЕДАГОГИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ ИМЕНИ М. Е. ЕВСЕВЬЕВА»

МАТЕМАТИКА И МАТЕМАТИЧЕСКОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ

Труды Всероссийской научно-практической конференции с международным участием «Математика и математическое моделирование»
Саранск, 13–14 октября 2011 г.

Саранск 2011

О СИСТЕМАХ ЭКВИВАЛЕНТНЫХ СИСТЕМЕ ЛОТКИ–ВОЛЬТЕРРА С ЛОГИСТИЧЕСКОЙ ПОПРАВКОЙ

Э. В. Мусафиров

Полесский государственный университет, г. Пинск, Беларусь

Многие процессы, происходящие в реальных системах, моделируются с помощью систем дифференциальных уравнений. Однако, как правило, эти дифференциальные системы не интегрируются в конечном виде, что приводит к необходимости изучать свойства решений этих систем по виду самих систем. На качественное поведение семейств решений существенное влияние оказывает наличие, количество и расположение периодических решений. При этом для выяснения вопросов о существовании и количестве периодических решений можно использовать отображение Пуанкаре (отображение за период) (см., например, [1]), знание которого позволяет решить вопросы существования и устойчивости периодических решений. Учитывая, что отображение за период определяется через общее решение системы, кажется, что найти явное выражение для отображения за период для неинтегрируемых в конечном виде систем невозможно. Однако иногда это удается сделать с помощью отражающей функции (ОФ) Мироненко В.И. (см. [2, 3]). Далее приведем сведения из теории ОФ, необходимые для дальнейшего изложения.

Рассмотрим систему

$$\dot{x} = X(t,x), \quad t \in \mathrm{P}, x \in \mathrm{P}^n, \tag{1}$$

решения которой однозначно определяются начальными условиями. Пусть общее решение этой системы в форме Коши имеет вид $x = \varphi(t; t_0, x_0)$.

Для каждой такой системы определяется (см. [2, с. 11], а также [3, с. 62]) *отражающая функция* $F(t,x) := \varphi(-t; t, x)$, определенная в некоторой области, содержащей гиперплоскость $t = 0$.

Функция $F(t,x)$ есть ОФ системы (1) тогда и только тогда, когда эта F является решением системы уравнений в частных производных, называемой *основным соотношением* (ОС),

$$\frac{\partial F(t,x)}{\partial t} + \frac{\partial F(t,x)}{\partial x} X(t,x) + X\left(-t, F(t,x)\right) = 0, \tag{2}$$

с начальным условием $F(0,x) \equiv x$.

Любая непрерывно дифференцируемая функция $F(t,x)$, удовлетворяющая условию $F\left(-t, F(t,x)\right) \equiv F(0,x) \equiv x$, является ОФ целого класса систем вида (см. [3])

$$\dot{x} = -\frac{1}{2}\frac{\partial F}{\partial x}\left(-t, F(t,x)\right)\left(\frac{\partial F(t,x)}{\partial t} - 2S(t,x)\right) - S\left(-t, F(t,x)\right), \tag{3}$$

где $S(t,x)$ – произвольная вектор-функция, при которой решения системы (3) однозначно определяются начальными условиями.

Поэтому все системы вида (1) разбиваются на классы эквивалентности вида (3) так, что каждый класс характеризуется своей ОФ, называемой *отражающей функцией класса*.

Все системы из одного класса имеют один и тот же оператор сдвига (см. [1, с. 11-13]) на любом интервале $(-\alpha;\alpha)$. Поэтому все эквивалентные 2ω-периодические системы имеют одно и то же отображение за период $[-\omega;\omega]$.

Пусть известно, что система (1) и система

$$\dot{y} = Y(t,x), \quad t \in \mathrm{P},\, y \in \mathrm{P}^n \tag{4}$$

принадлежат одному классу эквивалентности, и пусть одна из этих систем, скажем система (1), является 2ω-периодической. Тогда если решения $\varphi(t;-\omega,x)$ и $\psi(t;-\omega,x)$ систем (1) и (4) соответственно продолжимы на отрезок $[-\omega,\omega]$, то отображение за период $[-\omega,\omega]$ для системы (1) есть $\varphi(\omega;-\omega,x) \equiv F(-\omega,x) \equiv \psi(\omega;-\omega,x)$, хотя система (4) может быть непериодической. Отсюда следует, что между 2ω-периодическими решениями системы (1) и решениями двухточечной задачи $y(-\omega) = y(\omega)$ для системы (4) можно установить взаимно однозначное соответствие.

Таким образом, при изучении вопросов существования и устойчивости периодических решений, а также существования решений краевых задач у некоторой дифференциальной системы эту систему можно заменить эквивалентной (в смысле совпадения ОФ). Это легко сделать, когда ОФ данной системы известна. Однако иногда можно построить дифференциальную систему, эквивалентную данной, и в том случае, когда ОФ неизвестна. Например, если система (1) эквивалентна некоторой стационарной системе, то эта система совпадает с системой $\dot{x} = X(0,x)$. Таким образом, в том классе эквивалентности, в котором существует стационарная система, эта стационарная система может играть роль такой системы. В других классах роль стационарной системы выполняет *простая система* [4, 5], получающаяся из системы (3) при $S(t,x) \equiv 0$,

$$\dot{x} = -\frac{1}{2}\frac{\partial F}{\partial x}\big(-t, F(t,x)\big)\frac{\partial F(t,x)}{\partial t} \equiv -\frac{1}{2}\left(\frac{\partial F(t,x)}{\partial x}\right)^{-1}\frac{\partial F(t,x)}{\partial t},$$

где $F(t,x)$ – ОФ этой системы. Заметим, что любая стационарная система проста, однако среди простых есть и нестационарные.

Находить возмущения дифференциальных систем, не меняющие ОФ (назовем такие возмущения *допустимыми*), позволяет слудующая теорема [6].

Теорема 1. *Пусть вектор-функция* $\Delta(t,x)$ *является решением дифференциального уравнения в частных производных*

$$\frac{\partial \Delta}{\partial t}(t,x) + \frac{\partial \Delta}{\partial x}(t,x)X(t,x) - \frac{\partial X}{\partial x}(t,x)\Delta(t,x) = 0. \tag{5}$$

Тогда возмущенная дифференциальная система

$$\dot{x} = X(t,x) + \alpha(t)\Delta(t,x), \quad t \in \mathrm{P},\, x \in D \subset \mathrm{P}^n, \tag{6}$$

где $\alpha(t)$ *– произвольная непрерывная скалярная нечетная функция, эквивалентна дифференциальной системе (1).*

В настоящей работе преследовалась цель поиска допустимых возмущений для системы Лотки–Вольтерра с логистической поправкой

$$\begin{aligned} &\dot{x} = a_1 x - a_2 xy - a_3 x^2, \\ &\dot{y} = -b_1 y + b_2 xy - b_3 y^2; \quad a_i, b_i, x, y \in \mathrm{P} \quad (i = \overline{1,3}), \end{aligned} \tag{7}$$

которая используется при моделировании конкурирующих процессов, в частности в биологии и экономике.

Так как система (7) стационарная, то она является простой. Для простых систем находить допустимые возмущения позволяет следующая теорема.

Теорема 2. *Система (1) с непрерывной функцией* $X(t,x)$ *проста тогда и только тогда, когда она эквивалентна (в смысле совпадения ОФ) любой системе вида*

$$\dot{x} = (1 + \alpha(t))X(t,x), \quad t \in \mathrm{P}, \quad x \in \mathrm{P}^n, \tag{8}$$

где $\alpha(t)$ *– непрерывная нечетная скалярная функция.*

Доказательство. Необходимость. Пусть система (1) простая с ОФ $F(t,x)$. Тогда, согласно [4], $F_x(t,x)X(t,x) \equiv X(-t,F(t,x))$. Из ОС для $F(t,x)$ и системы (1) следует тождество

$$F_t(t,x) + F_x(t,x)X(t,x) + X(-t,F(t,x)) \equiv 0.$$

Рассмотрим ОС для $F(t,x)$ и системы (8):

$$\begin{aligned} &F_t(t,x) + (1+\alpha(t))F_x(t,x)X(t,x) + (1-\alpha(t))X(-t,F(t,x)) \equiv \\ &\equiv F_t(t,x) + F_x(t,x)X(t,x) + X(-t,F(t,x)) + \\ &+ \alpha(t)\big(F_x(t,x)X(t,x) - X(-t,F(t,x))\big) \equiv 0. \end{aligned}$$

Следовательно, $F(t,x)$ – ОФ системы (8), т.е. системы (1) и (8) эквивалентны.

Достаточность. Пусть система (1) эквивалентна любой системе (8), и пусть $F(t,x)$ – ОФ этих систем. Из ОС для системы (8) следует, что для любой нечетной скалярной функции $\alpha(t)$ верно тождество

$$\begin{aligned} 0 &\equiv F_t(t,x) + (1+\alpha(t))F_x(t,x)X(t,x) + (1-\alpha(t))X(-t,F(t,x)) \equiv \\ &\equiv F_t(t,x) + F_x(t,x)X(t,x) + X(-t,F(t,x)) + \\ &+ \alpha(t)\big(F_x(t,x)X(t,x) - X(-t,F(t,x))\big). \end{aligned}$$

Откуда, учитывая ОС для системы (1), следует, что для любой нечетной скалярной функции $\alpha(t)$ верно тождество

$$\alpha(t)\big(F_x(t,x)X(t,x) - X(-t,F(t,x))\big) \equiv 0.$$

Положим $\alpha(t) \equiv t$, тогда $F_x(t,x)X(t,x) \equiv X(-t,F(t,x)), \quad \forall t \in \mathrm{P} \setminus \{0\}$. Т.к. $F(0,x) \equiv x$, то $F_x(0,x) \equiv E$ и, следовательно, $F_x(t,x)X(t,x) \equiv X(-t,F(t,x))$ $\forall t \in \mathbf{R}$. Значит, согласно [4], система (1) простая. Теорема доказана.

Из теоремы 2 вытекает следующее утверждение, позволяющее накопленные результаты для стационарных систем использовать и для изучения качественного поведения некоторых нестационарных систем.

Следствие 1. *Любая стационарная система* $\dot{x} = X(x)$ *эквивалентна нестационарной системе* $\dot{x} = (1+\alpha(t))X(x)$, *где* $\alpha(t)$ *– произвольная непрерывная нечетная скалярная функция.*

Теорема. 1) *При* $b_1 = -a_1$, $b_2 = a_3$, $b_3 = a_2/3$ *система (7) эквивалентна системе вида*

$$\dot{x} = x(a_1 - a_2y - a_3x)(1+\alpha_1(t)) - a_2y\left((a_2y - 3a_1)^2 + 3a_2a_3xy\right)\alpha_2(t),$$

$$\dot{y} = y\left(a_1 - \frac{a_2y}{3} + a_3x\right)(1+\alpha_1(t)) + 3a_3y\left((a_2y - 3a_1)^2 + 3a_2a_3xy\right)\alpha_2(t);$$

2) при $b_1 = -a_1$, $b_2 = -3a_3$, $b_3 = -a_2$ *система (7) эквивалентна системе вида*

$$\dot{x} = x(a_1 - a_2y - a_3x)(1+\alpha_1(t)) - a_2x\left(a_1^2 - a_3x(2a_1 + a_2y) + a_3^2x^2\right)\alpha_2(t),$$

$$\dot{y} = y(a_1 + a_2y - 3a_3x)(1+\alpha_1(t)) - a_3x\left(a_1^2 - a_3x(2a_1 + a_2y) + a_3^2x^2\right)\alpha_2(t);$$

3) при $b_1 = -a_1$, $b_2 = -a_3/2$, $b_3 = a_2/3$ *система (7) эквивалентна системе вида*

$$\dot{x} = x(a_1 - a_2y - a_3x)(1+\alpha_1(t)) - 2a_2y\left((a_2y - 3a_1)^2 + 3a_2a_3xy\right)\alpha_2(t),$$

$$\dot{y} = \frac{y}{6}(6a_1 - 2a_2y - 3a_3x)(1+\alpha_1(t)) - 3a_3y\left(a_2^2y^2 - 9a_1^2\right)\alpha_2(t),$$

где $\alpha_i(t)$, $i = \overline{1,2}$ *– произвольные скалярные непрерывные нечетные функции.*

Доказательство вытекает из теоремы 1 последовательной проверкой тождества (5) для каждого множителя при $\alpha_i(t)$. Теорема доказана.

Заметим, что требование нечетности функций $\alpha_i(t)$ для приложений часто не является критичным, так как обычно динамика процессов моделируется на неотрицательной временной полуоси.

Полученные результаты позволяют использовать результаты исследования качественного поведения решений стационарной системы Лотки–Вольтерра с логистической поправкой (7) для изучения более сложных по своей природе нестационарных возмущенных систем. При этом, в частности, характер устойчивости решений, при $t = t_0$ выходящих из одной и той же точки, всех допустимо возмущенных систем такой же как и у исходной системы.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Красносельский, М.А. Оператор сдвига по траекториям дифференциальных уравнений / М.А.Красносельский. – М.: Наука, 1966. – 332 с.

2. Мироненко, В.И. Отражающая функция и периодические решения дифференциальных уравнений / В.И.Мироненко. – Минск: Университетское, 1986. – 76 с.

3. Мироненко, В.И. Отражающая функция и исследование многомерных дифференциальных систем / В.И.Мироненко. – Гомель: ГГУ им. Ф.Скорины, 2004. – 196 с.

4. Мироненко, В.И. Простые системы и периодические решения дифференциальных уравнений / В.И.Мироненко // Дифференц. уравнения. – 1989. – Т. 25, №12. – С. 2109-2114.

5. Мусафиров, Э.В. О простоте линейных дифференциальных систем / Э.В. Мусафиров // Дифференц. уравнения. – 2002. – Т. 38, №4. – С. 570-572.

6. Мироненко, В.В. Возмущения дифференциальных систем, не меняющие временных симметрий / В.В.Мироненко // Дифференц. уравнения. – 2004. – Т. 40, №10. – С. 1325-1332