ISSN 1818-9830

ВЕСТНИК 1/06

ФОНДА ФУНДАМЕНТАЛЬНЫХ ИССЛЕДОВАНИЙ

Научно-теоретический и информационно-методический журнал Белорусского республиканского фонда фундаментальных исследований

Издается с III квартала 1997 г.

ВЕСТНИК ФОНДА ФУНДАМЕНТАЛЬНЫХ ИССЛЕДОВАНИЙ

№ 1 [35], 2006

Учредитель — **Белорусский республиканский фонд фундаментальных исследований**

220072, г. Минск,
пр. Независимости, 66;
тел. 284-07-42,
284-25-05

Минск, 2006

СОДЕРЖАНИЕ

УДК 681.3.06:519

П. А. ПАВЛОВ

СРАВНИТЕЛЬНЫЙ АНАЛИЗ ОДИНАКОВО РАСПРЕДЕЛЕННЫХ КОНКУРИРУЮЩИХ ПРОЦЕССОВ С УЧЕТОМ ДОПОЛНИТЕЛЬНЫХ СИСТЕМНЫХ РАСХОДОВ

Белорусский государственный экономический университет

(Поступила в редакцию 28.06.2005)

В работе проведен сравнительный анализ минимального общего времени выполнения множества одинаково распределенных конкурирующих процессов в асинхронном и базовых синхронных режимах с учетом накладных расходов.

Введение

При организации параллельных вычислений различают *режим разделения времени*, *режим параллельного выполнения* и *режим распределенной обработки* [1]. Появление мультипроцессорных систем, сетевых вычислительных комплексов, кластерных вычислительных систем, локальных и глобальных сетей, сети Интернет привело к росту распределенного программирования. В связи с этим особую актуальность приобретают задачи построения и исследования математических моделей оптимальной организации конкурирующих процессов при распределенной обработке, изучения потенциальных возможностей ускорения и эффективности вычислений за счет распределенной обработки, нахождения условий оптимальной реализации заданных объемов вычислений.

1. Математическая модель распределенной обработки конкурирующих процессов

Как и в [2], математическая модель распределенной обработки конкурирующих процессов включает в себя p, $p \geq 2$, процессоров многопроцессорной системы, n, $n \geq 2$, конкурирующих процессов, s, $s \geq 2$, блоков Q_j, $j=\overline{1,s}$, структурированного на блоки программного ресурса, $[t_{ij}]$, $i=\overline{1,n}$, $j=\overline{1,s}$, матрицу времен выполнения блоков конкурирующими процессами. Введем в рассмотрение параметр $\varepsilon > 0$, характеризующий время (накладные расходы), затрачиваемое многопроцессорной системой на организацию параллельного использования блоков программного ресурса множеством распределенных конкурирующих процессов. Предполагается, что все n процессов используют одну копию структурированного на блоки программного ресурса. В дальнейшем будем говорить, что вышеперечисленные объекты математической модели образуют систему конкурирующих процессов.

Определение. *Систему конкурирующих процессов будем называть одинаково распределенной, если времена* t_{ij} *выполнения блоков* Q_j, $j=\overline{1,s}$, *программного ресурса каждым из i – х процессов совпадают и равны* t_i *для всех* $i=\overline{1,n}$, *т. е. справедлива цепочка равенств* $t_{i1}=t_{i2}=...=t_{is}=t_i$, $i=\overline{1,n}$.

Обозначим $T^n=\sum_{i=1}^{n}t_i$ суммарное время выполнения каждого из блоков Q_j всеми n процессами и назовем набор параметров (t_1, t_2, ..., t_n, T^n) данной системы конкурирующих процессов характеристическим.

2. Анализ режимов организации распределенных конкурирующих процессов

В [2] введены и исследованы базовые *асинхронный* и два *синхронных режима*. Для данных режимов получены математические соотношения для вычисления наименьшего общего времени выполнения множества конкурирующих неоднородных, однородных и одинаково распределенных процессов. Большой интерес представляет задача сравнительного анализа полученных соотношений. В данной статье проводится такой анализ для класса одинаково распределенных процессов при учете дополнительных системных расходов $\varepsilon > 0$.

Пусть $\beta=\left\{(t_1^{\varepsilon},t_2^{\varepsilon},...,t_n^{\varepsilon},T_{\varepsilon}^{n})\middle|T_{\varepsilon}^{n}=\sum_{i=1}^{n}t_i^{\varepsilon},t_i^{\varepsilon}=t_i+\varepsilon>0\right\}$ — множество всех допустимых характеристических наборов систем одинаково распределенных конкурирующих процессов. Выделим из множества β подмножество характеристических наборов вида

$$\mathrm{H}(T_{\varepsilon}^{n})=\{(t_1^{\varepsilon},t_2^{\varepsilon},...,t_n^{\varepsilon},T_{\varepsilon}^{n})\in\beta\mid t_1^{\varepsilon}\le t_2^{\varepsilon}\le...\le t_l^{\varepsilon}\ge t_{l+1}^{\varepsilon}\ge...\ge t_n^{\varepsilon},l=\overline{1,n}\}.$$

Тогда для введенного подмножества характеристических наборов справедлива следующая

Теорема 1. *Пусть* $\delta\in\mathrm{H}(T_{\varepsilon}^{n})$ *— характеристический набор любой одинаково распределенной системы с параметрами p, n, s и накладными расходами* $\varepsilon > 0$. *Тогда в случае* $2\le s\le p$ *минимальные общие времена* T_{op}^{ac}, T_{op}^{1} *и* T_{op}^{2} *выполнения множества одинаково распределенных конкурирующих процессов в асинхронном и базовых синхронных режимах совпадают.*

Доказательство. Пусть $t_l^{\varepsilon}=\max_{1\le i\le n}t_i^{\varepsilon}$. Тогда для асинхронного и второго синхронного режима, обеспечивающего непрерывное выполнение каждого блока Q_j всеми n процессами для любого характеристического допустимого набора одинаково распределенной системы, в том числе и для любого характеристического набора $\delta\in\mathrm{H}(T_{\varepsilon}^{n})$ при $2\le s\le p$, имеют место равенства

$$T_{op}^{ac}(p,n,s,\varepsilon)=T_{op}^{2}(p,n,s,\varepsilon)=T_{\varepsilon}^{n}+(s-1)t_l^{\varepsilon}.$$

Пусть взаимодействие процессов, процессоров и блоков осуществляется в первом синхронном режиме с непрерывным выполнением блоков программного ресурса внутри каждого из процессов. В этом режиме для любого характеристического набора из множества β при $2 \le s \le p$ выполняется равенство

$$T_{op}^{1}(p,n,s,\varepsilon) = T_{\varepsilon}^{n} + (s-1)\left[t_n^{\varepsilon} + \sum_{i=2}^{n} \max\{t_{i-1}^{\varepsilon} - t_i^{\varepsilon}, 0\}\right].$$

Покажем, что для любого характеристического набора $\delta \in \mathrm{H}(T_{\varepsilon}^{n})$ выполняется равенство $t_n^{\varepsilon} + \sum\limits_{i=2}^{n} \max\{t_{i-1}^{\varepsilon} - t_i^{\varepsilon}, 0\} = t_l^{\varepsilon}$, тем самым будет доказана теорема.

Так как $t_l^{\varepsilon} = \max\limits_{1 \le i \le n} t_i^{\varepsilon}$, то для всех номеров $1 \le i \le l \le n$ имеет место равенство $\sum\limits_{i=2}^{l} \max\{t_{i-1}^{\varepsilon} - t_i^{\varepsilon}, 0\} = 0$, а для $1 \le i \le l \le n$ имеет место $\sum\limits_{i=l+1}^{n} \max\{t_{i-1}^{\varepsilon} - t_i^{\varepsilon}, 0\} = t_l^{\varepsilon} - t_n^{\varepsilon}$. Следовательно,

$$t_n^{\varepsilon} + \sum_{i=2}^{n} \max\{t_{i-1}^{\varepsilon} - t_i^{\varepsilon}, 0\} = t_n^{\varepsilon} + t_l^{\varepsilon} - t_n^{\varepsilon} = t_l^{\varepsilon},$$

что и требовалось доказать.

Теорема 2. *Для любой одинаково распределенной системы с параметрами p, n, s и накладными расходами $\varepsilon > 0$, допустимый характеристический набор которой $\delta \notin \mathrm{H}(T_{\varepsilon}^{n})$, при $2 \le s \le p$ выполняются соотношения*

$$T_{op}^{1}(p,n,s,\varepsilon) > T_{op}^{ac}(p,n,s,\varepsilon) = T_{op}^{2}(p,n,s,\varepsilon). \tag{1}$$

Доказательство. Условия теоремы 2 равносильны неравенству $t_n^{\varepsilon} + \sum\limits_{i=2}^{n} \max\{t_{i-1}^{\varepsilon} - t_i^{\varepsilon}, 0\} - \max\limits_{1 \le i \le n} t_i^{\varepsilon} > 0$. Доказательство последнего проведем индукцией по числу процессов n, $n \ge 2$. При $n = 2$ множество всех допустимых характеристических наборов систем одинаково распределенных конкурирующих процессов $\beta = (t_1^{\varepsilon}, t_2^{\varepsilon})$ будет принадлежать классу $\mathrm{H}(T_{\varepsilon}^{n})$.

Пусть, далее, неравенство (1) выполняется при $n = j$, т. е. $t_j^{\varepsilon} + \sum\limits_{i=2}^{j} \max\{t_{i-1}^{\varepsilon} - t_i^{\varepsilon}, 0\} - \max\limits_{1 \le i \le j} t_i^{\varepsilon} > 0$, покажем, что оно справедливо при $n = j + 1$. Действительно, при $n = j + 1$ имеем

$$t_{j+1}^{\varepsilon} + \sum_{i=2}^{j+1} \max\{t_{i-1}^{\varepsilon} - t_i^{\varepsilon}, 0\} - \max_{1 \le i \le j+1} t_i^{\varepsilon} =$$

$$= t_{j+1}^{\varepsilon} + \sum_{i=2}^{j} \max\{t_{i-1}^{\varepsilon} - t_i^{\varepsilon}, 0\} + \max\{t_j^{\varepsilon} - t_{j+1}^{\varepsilon}, 0\} - \max_{1 \le i \le j+1} t_i^{\varepsilon}.$$

Рассмотрим два случая:

1) $\max\limits_{1 \le i \le j+1} t_i^{\varepsilon} = t_{j+1}^{\varepsilon}$. Имеем

$$t_{j+1}^{\varepsilon}+\sum_{i=2}^{j}\max\{t_{i-1}^{\varepsilon}-t_i^{\varepsilon},0\}+\max\{t_j^{\varepsilon}-t_{j+1}^{\varepsilon},0\}-t_{j+1}^{\varepsilon}=$$

$$=\sum_{i=2}^{j}\max\{t_{i-1}^{\varepsilon}-t_i^{\varepsilon},0\}+\max\{t_j^{\varepsilon}-t_{j+1}^{\varepsilon},0\}>0.$$

Здесь второе слагаемое равно нулю, так как $t_{j+1}^{\varepsilon}\geq t_j^{\varepsilon}$, а первое слагаемое больше нуля, ибо в противном случае $\delta\in \mathrm{H}(T_{\varepsilon}^{n})$, что противоречит условию теоремы 2.

2) значение $\max\limits_{1\leq i\leq j+1} t_i^{\varepsilon}$ находится в промежутке $1\leq i\leq j$. В этом случае имеем

$$t_{j+1}^{\varepsilon}+\sum_{i=2}^{j}\max\{t_{i-1}^{\varepsilon}-t_i^{\varepsilon},0\}+\max\{t_j^{\varepsilon}-t_{j+1}^{\varepsilon},0\}-\max_{1\leq i\leq j+1}t_i^{\varepsilon}=$$

$$=t_{j+1}^{\varepsilon}-t_j^{\varepsilon}+t_j^{\varepsilon}+\sum_{i=2}^{j}\max\{t_{i-1}^{\varepsilon}-t_i^{\varepsilon},0\}-\max_{1\leq i\leq j+1}t_i^{\varepsilon}+\max\{t_j^{\varepsilon}-t_{j+1}^{\varepsilon},0\}.$$

Здесь $t_j^{\varepsilon}+\sum\limits_{i=2}^{j}\max\{t_{i-1}^{\varepsilon}-t_i^{\varepsilon},0\}-\max\limits_{1\leq i\leq j+1}t_i^{\varepsilon}>0$ по индукционному предположению и в силу того, что $\max\limits_{1\leq i\leq j+1}t_i^{\varepsilon}=\max\limits_{1\leq i\leq j}t_i^{\varepsilon}$. Покажем далее, что $t_{j+1}^{\varepsilon}-t_j^{\varepsilon}+\max\{t_j^{\varepsilon}-t_{j+1}^{\varepsilon},0\}\geq 0$. Действительно, для $t_j^{\varepsilon}=t_{j+1}^{\varepsilon}$ равенство нулю очевидно.

При $t_j^{\varepsilon}>t_{j+1}^{\varepsilon}$ получаем $t_{j+1}^{\varepsilon}-t_j^{\varepsilon}+\max\{t_j^{\varepsilon}-t_{j+1}^{\varepsilon},0\}=t_{j+1}^{\varepsilon}-t_j^{\varepsilon}+t_j^{\varepsilon}-t_{j+1}^{\varepsilon}=0$, а при $t_j^{\varepsilon}<t_{j+1}^{\varepsilon}$ имеем, что $t_{j+1}^{\varepsilon}-t_j^{\varepsilon}+\max\{t_j^{\varepsilon}-t_{j+1}^{\varepsilon},0\}=t_{j+1}^{\varepsilon}-t_j^{\varepsilon}>0$, что и требовалось доказать.

Полученные результаты служат основой для построения и исследования математических моделей оптимальной организации одинаково распределенных конкурирующих процессов.

Работа выполнена при финансовой поддержке Белорусского республиканского фонда фундаментальных исследований в рамках темы «Разработка новых подходов к распараллеливанию численных методов математической физики на основе анализа тонких свойств графов» (проект № Ф04Р-156).

Литература

1. Воеводин В. В., Воеводин Вл. В. Параллельные вычисления. СПб., 2002.
2. Иванников В. П., Коваленко Н. С., Метельский В. М. // Программирование. 2000. № 5. С. 44–52.
3. Эндрюс Г. Р. Основы многопоточного, параллельного и распределенного программирования. Пер. с англ. М., 2003.

P. A. PAVLOV

THE COMPARATIVE ANALYSIS OF EQUALLY DISTRIBUTED COMPETING PROCESSES IN VIEW OF ADDITIONAL SYSTEM CHARGES

Summary

The comparative analysis of times of performance of set of competing processes is carried out.