УДК 519.6 + 517.983.54

ПРИМЕНЕНИЕ ЯВНОГО ИТЕРАЦИОННОГО МЕТОДА С ПОПЕРЕМЕННО ЧЕРЕДУЮЩИМСЯ ШАГОМ ДЛЯ РЕШЕНИЯ НЕКОРРЕКТНЫХ ЗАДАЧ

***М.В. Зданевич**, 5 курс*
*Научный руководитель – **О.В. Матысик**, к.ф.-м.н., доцент*
Брестский государственный университет имени А.С. Пушкина

1. Постановка задачи. В гильбертовом пространстве *H* исследуется операторное уравнение первого рода

$$Ax = y, \tag{1}$$

где *A* – положительный ограниченный и самосопряженный оператор, для которого нуль не является собственным значением, однако принадлежит спектру оператора *A*, и, следовательно, задача некорректна.

Пусть $y \in R(A)$, т.е. при точной правой части *y* уравнение (1) имеет единственное решение *x*. Для отыскания этого решения применяется явная итерационная процедура

$$x_{n+1} = x_n - \alpha_{n+1}(Ax_n - y), \quad x_0 = 0,$$
$$\alpha_{2n+1} = \alpha, \quad n = 0, 1, 2, \ldots, \alpha_{2n+2} = \beta, \quad n = 0, 1, 2, \ldots \tag{2}$$

Обычно правая часть уравнения известна с некоторой точностью δ, т.е. известен y_δ, для которого $\|y - y_\delta\| \le \delta$. Поэтому вместо схемы (2) приходится рассматривать приближения

$$x_{n+1,\delta} = x_{n,\delta} - \alpha_{n+1}(Ax_{n,\delta} - y_\delta), \quad x_{0,\delta} = 0,$$

$$\alpha_{2n+1} = \alpha, \quad n = 0, 1, 2, \ldots, \alpha_{2n+2} = \beta, \quad n = 0, 1, 2, \ldots \tag{3}$$

Ниже, под сходимостью метода (3) понимается утверждение о том, что приближения (3) сколь угодно близко подходят к точному решению уравнения при достаточно малых δ и $n\delta$ и достаточно больших *n*.

2. Сходимость метода в случае априорного выбора числа итераций.

2.1. Сходимость при точной правой части уравнения. По индукции нетрудно показать, что $x_{n+1} = \alpha_{n+1} y + \alpha_n (E - \alpha_{n+1} A) y + \ldots + \alpha_1 (E - \alpha_{n+1} A)(E - \alpha_n A) \ldots (E - \alpha_2 A) y$. Считаем, что $\|A\| = 1$. Тогда, воспользовавшись интегральным представлением самосопряжённого оператора, получим

$$x - x_n = \int_0^1 \lambda^{-1}(1 - \alpha_1\lambda)(1 - \alpha_2\lambda) \ldots (1 - \alpha_n\lambda)\, dE_\lambda y = \int_0^1 \lambda^{-1}(1 - \alpha\lambda)^k (1 - \beta\lambda)^m\, dE_\lambda y.$$

где E_λ – спектральная функция оператора *A*. Здесь l, m – натуральные показатели, $l+m=n$, $l=m=\left[\frac{n}{2}\right]$ или $l=m+1$. Потребуем, чтобы здесь и всюду ниже для α, удовлетворяющих условию $0<\alpha<2$, и для $\beta>0$ было

$$\left|(1-\alpha\lambda)(1-\beta\lambda)\right|<1 \tag{4}$$

для любого $\lambda \in (0,1]$.

Разобьем полученный интеграл на два:

$$x - x_n = \int_0^\varepsilon \lambda^{-1}(1-\alpha\lambda)^l(1-\beta\lambda)^m dE_\lambda y + \int_\varepsilon^1 \lambda^{-1}(1-\alpha\lambda)^l(1-\beta\lambda)^m dE_\lambda y.$$

при условиях $0<\alpha<2$, $\beta>0$ и (4) второй интеграл сходится, так как

$$\left\|\int_\varepsilon^1 \lambda^{-1}(1-\alpha\lambda)^l(1-\beta\lambda)^m dE_\lambda y\right\| \le q^n \left\|\int_\varepsilon^1 dE_\lambda x\right\| \to 0, \quad n\to\infty.$$

Здесь $q = \max\limits_{\lambda\in[\varepsilon,1]} \left|(1-\alpha\lambda)(1-\beta\lambda)\right| < 1.$

$$\left\|\int_0^\varepsilon \lambda^{-1}(1-\alpha\lambda)^l(1-\beta\lambda)^m dE_\lambda y\right\| < \left\|\int_0^\varepsilon \lambda^{-1} dE_\lambda y\right\| = \left\|\int_0^\varepsilon dE_\lambda x\right\| = \left\|E_\varepsilon x\right\| \to 0,$$

так как E_ε сильно стремится к нулю при $\varepsilon\to 0$. Таким образом, $\|x-x_n\|\to 0, \quad n\to\infty.$

Тем самым доказана сходимость метода (2) к точному решению операторного уравнения (1) при точной правой части *y*.

2.2. Сходимость при приближенной правой части уравнения. Итерационный процесс (3) является сходящимся, если нужным образом выбирать число итераций *n* в зависимости от уровня погрешности δ. Справедлива

Теорема. *При условиях* $0<\alpha<2$, $\beta>0$ *и* (4) *итерационный процесс* (3) *сходится, если выбирать число итераций n из условия* $n\delta\to 0, \quad n\to\infty, \quad \delta\to 0.$

Доказательство. Рассмотрим $x - x_{n,\delta} = (x - x_n) + (x_n - x_{n,\delta})$. Оценим $\|x_n - x_{n,\delta}\|$, где

$$x_n - x_{n,\delta} = [\alpha_n + \alpha_{n-1}(E-\alpha_n A) + \ldots + \alpha_1(E-\alpha_n A)(E-\alpha_{n-1}A)\ldots(E-\alpha_2 A)](y-y_\delta) =$$

$$= \int_0^1 [1-(1-\alpha\lambda)^l(1-\beta\lambda)^m]\lambda^{-1} dE_\lambda (y-y_\delta).$$

Найдём на [0,1] максимум подынтегральной функции

$$g_n(\lambda) = \lambda^{-1}[1-(1-\alpha\lambda)^l(1-\beta\lambda)^m] > 0.$$

Нетрудно показать, что $\frac{1-(1-\alpha_1\lambda)(1-\alpha_2\lambda)\ldots(1-\alpha_n\lambda)}{\lambda} \le \alpha_1+\alpha_2+\ldots+\alpha_n$, поэтому $g_n(\lambda) \le l\alpha + m\beta$. Отсюда получим $\|x_n - x_{n,\delta}\| \le (l\alpha+m\beta)\delta$. Поскольку $\|x - x_{n,\delta}\| \le \le \|x-x_n\| + \|x_n - x_{n,\delta}\| \le \|x-x_n\| + (l\alpha+m\beta)\delta$ и $\|x-x_n\|\to 0$, $n\to\infty$, то для сходимости метода (3) достаточно потребовать, чтобы $(l\alpha+m\beta)\delta\to 0, \quad n\to\infty, \quad \delta\to 0.$ Таким образом, достаточно, чтобы $n\delta\to 0, \quad n\to\infty, \quad \delta\to 0.$ Теорема доказана.

2.3. Оценка погрешности. Оценить скорость сходимости приближений (3) без дополнительных предположений невозможно, так как неизвестна и может быть сколь угодно малой скорость убывания к нулю $\|x-x_n\|$. Поэтому для оценки скорости сходимости метода будем использовать дополнительную априорную информацию на гладкость точного решения x уравнения (1) – возможность его истокообразного представления, т.е. что $x = A^s z$, $s>0$. Тогда имеем $y = A^{s+1} z$ и, следовательно, получим $x - x_n = \int_0^1 \lambda^s (1-\alpha\lambda)^{n/2} (1-\beta\lambda)^{n/2}\, dE_\lambda z$. Для оценки $\|x - x_n\|$ найдем максимум модуля подынтегральной функции $f(\lambda) = \lambda^s (1-\alpha\lambda)^{n/2} (1-\beta\lambda)^{n/2} = \lambda^s \left[1-(\alpha+\beta)\lambda+\alpha\beta\lambda^2\right]^{n/2}$. Нетрудно показать, что при условиях $0<\alpha<2$, $(\alpha+\beta)^2 < 8\alpha\beta$, $\frac{1}{16} + \alpha\beta \le \alpha+\beta < \frac{3}{2}\alpha\beta$ для достаточно больших n справедлива оценка $\max\limits_{[0,1]} f(\lambda) \le s^s \left[n(\alpha+\beta)\right]^{-s}$ и, следовательно, $\|x - x_n\| \le s^s \left[n(\alpha+\beta)\right]^{-s} \|z\|$. Таким образом, общая оценка погрешности итерационной процедуры (3) запишется в виде $\|x - x_{n,\delta}\| \le s^s \left[n(\alpha+\beta)\right]^{-s} \|z\| + \frac{n}{2}(\alpha+\beta)\delta$. Для минимизации полученной оценки погрешности вычислим правую часть в точке, в которой производная от нее равна нулю; в результате получим оценку

$$\|x - x_{n,\delta}\|_{\text{опт}} \le (1+s)\, 2^{-\frac{s}{s+1}} \delta^{\frac{s}{s+1}} \|z\|^{\frac{1}{s+1}}$$

и априорный момент останова

$$n_{\text{опт}} = s\left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right)^{-1} 2^{-\frac{s}{s+1}} \delta^{-\frac{1}{s+1}} \|z\|^{\frac{1}{s+1}}.$$

Предложенный метод может быть успешно использован в системах полной автоматической обработки экспериментов, математической экономике, сейсмике, геологоразведке, диагностике плазмы.