УДК 517.983+519.6

СХОДИМОСТЬ МЕТОДА ИТЕРАЦИЙ НЕЯВНОГО ТИПА В ЭНЕРГЕТИЧЕСКОЙ НОРМЕ ГИЛЬБЕРТОВА ПРОСТРАНСТВА

А.В. Комарчук, *4 курс*
Научный руководитель – ***В.Ф. Савчук****, к. ф.–м. наук, доцент*
Брестский государственный университет имени А.С. Пушкина

Поскольку некорректные задачи постоянно встречаются в многочисленных приложениях математики, то их изучение и разработка методов их решения является актуальной. Здесь изучается неявный итерационный метод решения некорректных задач с априорным выбором числа итераций.

В гильбертовом пространстве H решается операторное уравнение 1 рода

$$Ax = y \tag{1}$$

с положительным ограниченным самосопряженным оператором A, для которого нуль не является собственным значением. Однако предполагается, что нуль принадлежит спектру оператора A, поэтому задача (1) неустойчива и, следовательно, некорректна. Для решения задачи предлагается неявный итерационный метод

$$(E+\alpha A^2)x_{n+1} = (E-\alpha A^2)x_n + 2\alpha Ay,\ x_0 = 0. \tag{2}$$

Обычно правая часть уравнения известна с некоторой точностью δ, т.е. известно y_δ, такое, что $\| y - y_\delta \| \le \delta$ тогда метод (2) примет вид

$$(E+\alpha A^2)x_{n+1,\delta} = (E-\alpha A^2)x_{n,\delta} + 2\alpha Ay_\delta,\ x_{0,\delta} = 0. \tag{3}$$

Доказана сходимость методов (2) и (3) в энергетической норме гильбертова пространства $\|x\|_A = \sqrt{(Ax,x)}$, получена оценка погрешности метода (3) в энергетической норме, причем для ее получения не потребовалось знаний об истокопредставимости точного решения. Использование энергетической нормы как бы заменяет истокопредставимость степени $s = \frac{1}{2}$ для точного решения.

Доказаны теоремы.

Теорема 1. Итерационный метод (2) при условии $\alpha > 0$ сходится в энергетической норме гильбертова пространства.

Теорема 2. При условии $\alpha > 0$ итерационный метод (3) сходится в энергетической норме гильбертова пространства, если число итераций n выбирать из условия $n^{1/4}\delta \to 0, n \to \infty, \delta \to 0$.

Теорема 3. При условии $\alpha > 0$ общая оценка погрешности для метода (3) в энергетической норме запишется в виде

$$\left\|x - x_{n,\delta}\right\|_A \le (4n\alpha e)^{-1/4}\|x\| + 2(4n\alpha)^{1/4}\delta.$$

Теорема 4. При условии $\alpha > 0$ оптимальная оценка погрешности для метода (3) в энергетической норме имеет вид

$$\left\|x - x_{n,\delta}\right\|_A^{опт} \le 2^{3/2} e^{-1/8} \delta^{1/2} \|x\|^{1/2} \tag{4}$$

и получается при

$$n_{опт} = 2^{-4}\alpha^{-1}e^{-1/2}\delta^{-2}\|x\|^2. \qquad (5)$$

Замечание. Из (4) следует, что оптимальная оценка погрешности не зависит от параметра α, но $n_{опт}$ зависит от α. Поскольку на α нет ограничений сверху $(\alpha > 0)$, то за счет его выбора можно получить $n_{опт} = 1$, т.е. оптимальная оценка погрешности будет достигаться уже на первом шаге итераций. Для этого достаточно взять

$$\alpha_{опт} = 2^{-4}e^{-1/2}\delta^{-2}\|x\|^2.$$

Выясним условия, при которых из сходимости метода в энергетической норме, следует сходимость в исходной норме гильбертова пространства. Справедлива

Теорема 5. Если выполнены условия

1) $E_\varepsilon x_{n,\delta} = 0,$

2) $E_\varepsilon x = 0,$ где $E_\varepsilon = \int_0^\varepsilon dE_\lambda \lambda,$ ε - фиксированное положительное число

$(0 < \varepsilon < \|A\|),$ то из сходимости $x_{n,\delta}$ к x в энергетической норме следует сходимость в обычной норме гильбертова пространства.

Предложенный метод может быть успешно применен в прикладной математике: он может быть использован для решения задач, встречающихся в гравиметрии, спектроскопии, теории потенциала, акустике, автоматической обработке результатов физического эксперимента, определении формы радиоимпульса, излученного источником, и формы электрического импульса на входе кабеля.

Список использованных источников

1. Савчук, В.Ф. Регуляризация операторных уравнений в гильбертовом пространстве / В.Ф. Савчук, О.В. Матысик. – Брест : Издательство БрГУ. – 2008. – 196 с.