УДК 517.983+519.6

СХОДИМОСТЬ НЕЯВНОГО МЕТОДА ИТЕРАЦИЙ С НЕОГРАНИЧЕННЫМ ОПЕРАТОРОМ В СЛУЧАЕ НЕЕДИНСТВЕННОГО РЕШЕНИЯ

Ю.А. Мороз*,4 курс*
Научный руководитель – ***В.Ф. Савчук****, к.ф –м.н., доцент*
Брестский государственный университет имени А.С. Пушкина

В гильбертовом пространстве H решается уравнение I рода

$$Ax = y, \tag{1}$$

где A – неограниченный линейный и самосопряжённый оператор, для которого нуль не является собственным значением, но нуль принадлежит спектру оператора A, поэтому задача неустойчива, и, значит, некорректна. Для отыскания решения уравнения (1) применяется итерационный метод

$$x_{n+1} = (A^2 + B)^{-1}(Bx_n + Ay),\; x_0 = 0. \tag{2}$$

Здесь B – ограниченный вспомогательный самосопряжённый оператор, который выбирается для улучшения обусловленности. В качестве B возьмём оператор $B = bE,\ b > 0,\ E$ – тождественный оператор.

Пусть 0 – собственное значение оператора A (т.е. уравнение (1) имеет неединственное решение). Обозначим через $N(A) = \{x \in H \mid Ax = 0\}$, и пусть $M(A)$ - ортогональное дополнение ядра $N(A)$ до H. Пусть далее $P(A)x$ - проекция $x \in H$ на $N(A)$, а $\Pi(A)x$ - проекция $x \in H$ на $M(A)$. Справедлива

Теорема*. Пусть* $A = A^* \geq 0$, $\|A\| \leq M$, $y \in H$, $b > 0$*, тогда для метода (2) справедливы следующие утверждения:*

а) $Ax_n \to \Pi(A)y$, $\|Ax_n - y\| \to I(A,y) = \inf\limits_{x\in H}\|Ax - y\|$*;*

б) процесс (2) сходится тогда и только тогда, когда уравнение $Ax = \Pi(A)y$ *разрешимо; в последнем случае* $x_n \to P(A)x_0 + x^*$*, где* x^* *- минимальное решение уравнения (1).*

Доказательство. Применив оператор A к (2), получим $A(A^2 + B)x_n = ABx_{n-1} + A^2y$, где $y = P(A)y + \Pi(A)y$. Так как $AP(A)y = 0$, то получим $(A^2 + B)(Ax_n - \Pi(A)y) = B(Ax_{n-1} - \Pi(A)y)$. Пусть $Ax_n - \Pi(A)y = \upsilon_n$, $\upsilon_n \in M(A)$, тогда $(A^2 + B)\upsilon_n = B\upsilon_{n-1}$. Отсюда $\upsilon_n = (A^2 + B)^{-1}B\upsilon_{n-1}$, следовательно, $\upsilon_n = (A^2 + B)^{-n}B^n\upsilon_0$. Так как A положительно определён в $M(A)$, т.е. $(Ax, x) > 0$ $\forall x \in M(A)$ и $b > 0$, то $\|(A^2 + B)^{-1}B\| < 1$ и поэтому $\dfrac{b}{\lambda^2 + b} < 1$, $\lambda \in [0, M]$. Тогда

$$\left\|\int_{\varepsilon}^{M} \frac{b^n}{(\lambda^2+b)^n}\, dE_\lambda \upsilon_0\right\| \le q^n \left\|\int_{\varepsilon}^{M} dE_\lambda \upsilon_0\right\| \le q^n \|\upsilon_0\| \to 0,\ n\to\infty.$$

$$\left\|\int_{0}^{\varepsilon} \frac{b^n}{(\lambda^2+b)^n}\, dE_\lambda \upsilon_0\right\| \le \left\|\int_{0}^{\varepsilon} dE_\lambda \upsilon_0\right\| = \|E_\varepsilon \upsilon_0\| \to 0,\ \varepsilon\to 0$$ в силу свойств спектральной функции. Следовательно, $\upsilon_n \to 0$, $n\to\infty$, откуда $Ax_n \to \Pi(A)y$ и $\Pi(A)y \in A(H)$. $\|Ax_n - y\| \to \|\Pi(A)y - y\| = \|P(A)y\| = I(A, y)$. Итак, утверждение а) доказано.

Докажем б). Пусть процесс (2) сходится. Покажем что уравнение $Ax = \Pi(A)y$ разрешимо. Из сходимости $\{x_n\} \subset H$ к $z \in H$ и из а) следует, что $Ax_n \to Az = \Pi(A)y$, следовательно, $\Pi(A)y \in A(H)$ и уравнение $\Pi(A)y = Ax$ разрешимо. Пусть теперь $\Pi(A)y \in A(H)$ (уравнение $\Pi(A)y = Ax$ разрешимо), следовательно, $\Pi(A)y = Ax^*$, где x^* - минимальное решение уравнения $Ax = y$ (оно единственно в $M(A)$). Тогда (2) примет вид

$$(A^2+B)x_n = Bx_{n-1} + A\Pi(A)y = (A^2+B)x_{n-1} + A^2(x^* - x_{n-1}).$$

Отсюда $x_n = x_{n-1} + (A^2+B)^{-1}A^2(x^* - x_{n-1})$. Последнее равенство разобьём на два:

$$P(A)x_n = P(A)x_{n-1} + (A^2+B)^{-1}A^2P(A)(x^* - x_{n-1}) = P(A)x_{n-1} = P(A)x_0;$$

$$\Pi(A)x_n = \Pi(A)x_{n-1} + (A^2+B)^{-1}A^2\Pi(A)(x^* - x_{n-1}) =$$

$$= \Pi(A)x_{n-1} + (A^2+B)^{-1}A^2\left[x^* - \Pi(A)x_{n-1}\right],$$

так как $x^* \in M(A)$. Обозначим $\omega_n = \Pi(A)x_n - x^*$, тогда из

$$\Pi(A)x_n - x^* = \Pi(A)x_{n-1} - x^* - (A^2+B)^{-1}A^2\left[\Pi(A)x_{n-1} - x^*\right]$$

получим

$$\omega_n = \omega_{n-1} - (A^2+B)^{-1}A^2\omega_{n-1} = B(A^2+B)^{-1}\omega_{n-1}.$$

Следовательно, $\omega_n = B^n(A^2+B)^{-n}\omega_0$ и, аналогично υ_n, можно показать, что $\omega_n \to 0$, $n\to\infty$. Таким образом, $\Pi(A)x_n \to x^*$. Отсюда имеем $x_n = P(A)x_n + \Pi(A)x_n \to P(A)x_0 + x^*$. Теорема доказана.

Замечание. *Так как $x_0 = 0$, то $x_n \to x^*$, т.е. процесс (2) сходится к решению с минимальной нормой.*

Список использованных источников

1. Савчук, В.Ф. Регуляризация операторных уравнений в гильбертовом пространстве / В. Ф. Савчук, О. В. Матысик. – Брест : Изд-во БрГУ. – 2008. – 196 с.