УДК 513.82

ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНАЯ ГЕОМЕТРИЯ ПОВЕРХНОСТИ В ПРОСТРАНСТВЕ МИНКОВСКОГО, ПОЛУЧЕННОЙ ДВИЖЕНИЕМ ОКРУЖНОСТИ ВДОЛЬ КРИВОЙ МНИМОГО ТИПА

***Е. П. Самсонюк**, 5 курс*
*Научный руководитель – **А.А. Юдов**, к.ф.-м.н., доцент*
Брестский государственный университет имени А.С. Пушкина

Рассматривается пространство Минковского – четырехмерное псевдо-евклидово пространство индекса 1, в этом пространстве рассматривается окружность, передвигающаяся вдоль кривой мнимого типа. Эта окружность является обобщенной соприкасающейся стью этой кривой: $-x^2 + +y^2 = \frac{1}{\rho_u''^2}$ и исследуется такая поверхность с помощью аппарата аффинной связности. Ставится задача: *найти коэффициенты аффинной связности* Γ_{ij}^k.

Кривую задает уравнение $\rho = \rho\ u$ в системе $\{0, e_1, e_2, e_3, e_4\}$, e_1 – мнимый единичный вектор, e_2, e_3, e_4 – единичные векторы. u – параметр и его можно выбрать натуральным, тогда уравнение соприкасающейся окружности в системе $M\ \{\rho', \frac{\rho''}{\rho''}\}$, запишется в виде: $x = \frac{1}{\rho''_u} shv$, $y = \frac{1}{\rho''_u} chv - \frac{1}{\rho''_u}$.

А уравнение поверхности $R = R(u,v)$ запишем в виде:

$r = \ u, v\ = \rho\ u\ + \frac{1}{\rho''_u} shv\rho'_u + \frac{1}{\rho''^{\,2}_u}(chv - 1)\rho''_u$.

Находим координаты метрического тензора g_{ij}: $g_{11} = r_u^2$, $g_{12} = g_{21}(r_u, r_v)$, $g_{22} = r_v^2$. Запишем

$$r_u = \rho'\ u\ + \ \frac{1}{\rho''_u}\ '_u \rho'_u shv + \frac{1}{\rho''_u} shv\rho''_u + \ \frac{1}{\rho''^{\,2}_u}\ '_u\ ch - 1\ \rho''_u +$$

$$+\frac{1}{\rho''^{\,2}_u} *\ chv - 1\ \rho'''_u = \rho'_u\ \ 1 + shv\ \ \frac{1}{\rho''_u}\ '_u\ \ +$$

$$+\rho''_u\ \ \frac{1}{\rho''_u} shv + \ \frac{1}{\rho''^{\,2}_u}\ '_u\ chv - 1\ \ + \rho'''_u\ \ \frac{1}{\rho''^{\,2}_u}\ chv - 1$$

Обозначим через $A = \ \ 1 + shv\ \ \frac{1}{\rho''_u}\ '_u$; $B = \ \ \frac{1}{\rho''_u} shv + \ \frac{1}{\rho''^{\,2}_u}\ '_u\ chv - 1$;

$C = \ \frac{1}{\rho''^{\,2}_u}\ chv - 1$, получим $r_u = A\rho'_u + B\rho''_u + C\rho'''_u$. Запишем

$r_v = \frac{1}{\rho''_u} chv\rho'_u + \ \frac{1}{\rho''^{\,2}_u} shv\ \ \rho''_u$.

Введем обозначение $D = \frac{1}{\rho''_u} chv$; $E = \ \frac{1}{\rho''^{\,2}_u} shv$, получим $r_v = D\rho'_u + E\rho''_u$.

Вычисляя коэффициенты метрического тензора, получим:

$r_u^2 = g_{11} = \ \ A\rho'_u + B\rho''_u + C\rho'''_u, A\rho'_u + B\rho''_u + C\rho'''_u\ \ = -A^2 + B^2\ \ \rho''_u\ ^2 + +C^2\ \ \rho'''_u\ ^2 + 2AC(\rho'_u;\rho'''_u) + 2BC(\rho''_u;\rho'''_u)$;

$r_v^2 = g_{22} = \ \ D\rho'_u + E\rho''_u; D\rho'_u + E\rho''_u\ \ = -D^2 + E^2(\rho''_u)^2$;

$(r_u; r_v) = g_{12} = g_{21} = \ \ A\rho'_u + B\rho''_u + C\rho'''_u; A\rho'_u + B\rho''_u + C\rho'''_u\ \ = -AD + +BE\ \ \rho''_u\ ^2 + CD\ \ \rho'_u;\rho'''_u\ \ + CE(\rho''_u;\rho'''_u)$.

Находим тензор, обратный метрическому:

$g^{11} = \frac{g_{22}}{\Delta}$; $g^{22} = \frac{g_{11}}{\Delta}$; $g^{12} = -\frac{g_{12}}{\Delta}$; $g^{21} = -\frac{g_{21}}{\Delta}$, где

$\Delta = ((-A^2 + B^2\rho''^{\,2}_u + C^2\rho'''^{\,2}_u + 2AC\ \ \rho'_u;\rho'''_u\ \ + 2BC\ \ \rho''_u;\rho'''_u\ \ * (-D^2 + +E^2\rho''^{\,2}_u)) - \ \ -AD + BE\rho''^{\,2}_u + CD\ \ \rho'_u;\rho'''_u\ \ + CE\ \ \rho''_u;\rho'''_u\ \ \ *\ \ -AD + +BE\rho''^{\,2}_u + CD\ \ \rho'_u;\rho'''_u\ \ + CE\ \ \rho''_u;\rho'''_u\ \ \ = -D^2B^2\rho''^{\,2}_u - D^2C^2\rho'''^{\,2}_u - -2D^2BC\ \ \rho''_u;\rho'''_u\ \ - A^2E^2\rho''^{\,2}_u + 2E^2AC\rho''^{\,2}_u\ \ \rho'_u;\rho'''_u\ \ + 2ADBE\rho''^{\,2}_u + +2ADCE\ \ \rho''_u;\rho'''_u\ \ - 2BECD\rho''^{\,2}_u\ \ \rho'_u;\rho'''_u\ \ - C^2D^2\ \ \rho'_u;\rho'''_u\ ^2 - C^2DE\ \ \rho''_u;\rho'''_u\ \ - -2C^2DE\ \ \rho'_u;\rho'''_u\ \ \ \rho''_u;\rho'''_u\ \ $.

Находим коэффициенты связности по формуле:

$g_{1k}\Gamma^1_{ji} + g_{2k}\Gamma^2_{ji} = \frac{1}{2}\ \ \frac{\partial g_{ki}}{\partial x^j} + \frac{\partial g_{jk}}{\partial x^i} - \frac{\partial g_{ji}}{\partial x^k}$, где $i, j = 1,2$.

Распишем данные уравнения и получим 8 уравнений метрического тензора:

1) $g_{11}\Gamma^1_{11} + g_{21}\Gamma^2_{11} = \frac{1}{2}\ \ \frac{\partial g_{11}}{\partial u} + \frac{\partial g_{11}}{\partial u} - \frac{\partial g_{11}}{\partial u}$;

2) $g_{11}\Gamma^1_{21} + g_{21}\Gamma^2_{21} = \frac{1}{2}\ \ \frac{\partial g_{12}}{\partial u} + \frac{\partial g_{11}}{\partial v} - \frac{\partial g_{12}}{\partial u}$;

3) $g_{11}\Gamma^1_{21} + g_{21}\Gamma^2_{21} = \frac{1}{2}\ \ \frac{\partial g_{11}}{\partial v} + \frac{\partial g_{21}}{\partial u} - \frac{\partial g_{21}}{\partial u}$;

4) $g_{11}\Gamma^1_{22} + g_{21}\Gamma^2_{22} = \frac{1}{2}\ \ \frac{\partial g_{12}}{\partial v} + \frac{\partial g_{21}}{\partial v} - \frac{\partial g_{22}}{\partial u}$;

5) $g_{12}\Gamma^1_{22} + g_{22}\Gamma^2_{22} = \frac{1}{2}\ \ \frac{\partial g_{22}}{\partial v} + \frac{\partial g_{22}}{\partial v} - \frac{\partial g_{22}}{\partial v}$;

6) $g_{12}\Gamma^1_{12} + g_{22}\Gamma^2_{12} = \frac{1}{2}\ \ \frac{\partial g_{22}}{\partial u} + \frac{\partial g_{12}}{\partial v} - \frac{\partial g_{12}}{\partial v}$;

7) $g_{12}\Gamma^1_{11} + g_{22}\Gamma^2_{11} = \frac{1}{2}\ \ \frac{\partial g_{21}}{\partial u} + \frac{\partial g_{12}}{\partial u} - \frac{\partial g_{11}}{\partial v}$;

8) $\quad g_{12}\Gamma^1_{21} + g_{22}\Gamma^2_{21} = \frac{1}{2}\ \frac{\partial g_{21}}{\partial v} + \frac{\partial g_{22}}{\partial u} - \frac{\partial g_{21}}{\partial v}$.

Коэффициенты аффинной связности могут быть найдены по формуле:

$\Gamma^k_{ij} = \frac{1}{2} g^{k1}\ \ \frac{\partial g_{1i}}{\partial x^j} + \frac{\partial g_{1j}}{\partial x^i} - \frac{\partial g_{ij}}{\partial x^1}\ \ + \frac{1}{2} g^{k2}\ \ \frac{\partial g_{2i}}{\partial x^j} + \frac{\partial g_{2j}}{\partial x^i} - \frac{\partial g_{ij}}{\partial x^2}$, где $i, j = 1{,}2$.

Получили 8 уравнений коэффициентов связности:

1) $\quad \Gamma^1_{11} = \frac{1}{2} g^{11}\ \ \frac{\partial g_{11}}{\partial u} + \frac{\partial g_{11}}{\partial u} - \frac{\partial g_{11}}{\partial u}\ \ + \frac{1}{2} g^{12}\ \ \frac{\partial g_{21}}{\partial u} + \frac{\partial g_{21}}{\partial u} - \frac{\partial g_{11}}{\partial v}$;

2) $\quad \Gamma^1_{21} = \frac{1}{2} g^{11}\ \ \frac{\partial g_{11}}{\partial u} + \frac{\partial g_{11}}{\partial u} - \frac{\partial g_{11}}{\partial u}\ \ + \frac{1}{2} g^{12}\ \ \frac{\partial g_{21}}{\partial u} + \frac{\partial g_{21}}{\partial u} - \frac{\partial g_{11}}{\partial v}$;

3) $\quad \Gamma^1_{12} = \frac{1}{2} g^{21}\ \ \frac{\partial g_{11}}{\partial u} + \frac{\partial g_{11}}{\partial u} - \frac{\partial g_{11}}{\partial u}\ \ + \frac{1}{2} g^{12}\ \ \frac{\partial g_{21}}{\partial u} + \frac{\partial g_{21}}{\partial u} - \frac{\partial g_{11}}{\partial v}$;

4) $\quad \Gamma^1_{22} = \frac{1}{2} g^{11}\ \ \frac{\partial g_{12}}{\partial u} + \frac{\partial g_{11}}{\partial v} - \frac{\partial g_{21}}{\partial u}\ \ + \frac{1}{2} g^{12}\ \ \frac{\partial g_{22}}{\partial u} + \frac{\partial g_{21}}{\partial v} - \frac{\partial g_{21}}{\partial v}$;

5) $\quad \Gamma^1_{11} = \frac{1}{2} g^{11}\ \ \frac{\partial g_{12}}{\partial v} + \frac{\partial g_{12}}{\partial v} - \frac{\partial g_{22}}{\partial u}\ \ + \frac{1}{2} g^{12}\ \ \frac{\partial g_{22}}{\partial v} + \frac{\partial g_{22}}{\partial v} - \frac{\partial g_{21}}{\partial v}$;

6) $\quad \Gamma^1_{21} = \frac{1}{2} g^{21}\ \ \frac{\partial g_{12}}{\partial v} + \frac{\partial g_{12}}{\partial v} - \frac{\partial g_{22}}{\partial u}\ \ + \frac{1}{2} g^{22}\ \ \frac{\partial g_{22}}{\partial v} + \frac{\partial g_{22}}{\partial v} - \frac{\partial g_{22}}{\partial v}$;

7) $\quad \Gamma^1_{12} = \frac{1}{2} g^{21}\ \ \frac{\partial g_{12}}{\partial u} + \frac{\partial g_{11}}{\partial v} - \frac{\partial g_{21}}{\partial u}\ \ + \frac{1}{2} g^{22}\ \ \frac{\partial g_{22}}{\partial u} + \frac{\partial g_{21}}{\partial v} - \frac{\partial g_{21}}{\partial v}$;

8) $\quad \Gamma^1_{22} = \frac{1}{2} g^{21}\ \ \frac{\partial g_{11}}{\partial u} + \frac{\partial g_{11}}{\partial u} - \frac{\partial g_{11}}{\partial v}\ \ + \frac{1}{2} g^{22}\ \ \frac{\partial g_{21}}{\partial u} + \frac{\partial g_{21}}{\partial u} - \frac{\partial g_{11}}{\partial v}$.

В работе исследуется геометрия поверхностей пространства Минковского. Полученные результаты могут быть эффективно использованы в специальной теории относительности, микрофизике и астрономии.