УДК 519.24

ИССЛЕДОВАНИЕ ПЕРВОГО МОМЕНТА ОЦЕНКИ ВЗАИМНОЙ СПЕКТРАЛЬНОЙ ПЛОТНОСТИ, ПОСТРОЕННОЙ ПО МЕТОДУ УЭЛЧА

***Т.Г. Стасюк**, 5 курс*
*Научный руководитель – **Е.И. Мирская**, к.ф.-м.н., доцент*
Брестский государственный университет им. А.С. Пушкина

Исследование статистических оценок спектральных плотностей является одной из классических задач анализа временных рядов. Это связано с широким применением анализа временных рядов к анализу данных, которые возникают в физике, технике, теории распознавания образов, экономике. Часто данные являются многомерными. Такая ситуация особенно характерна для экономических данных.

П. Уэлч предложил оценки спектральной плотности, использующие блоки данных, которые могут пересекаться, что приводит к эффекту уменьшения дисперсии оценок. В.Н. Колмогоров и И.Г. Журбенко для одномерных временных рядов предложили оценки, в которых эффект разбиения данных на блоки комбинируется с эффектом взвешивания.

В данной работе в качестве оценки неизвестной взаимной спектральной плотности исследована статистика, построенная по методу Уэлча. Предложенная оценка использована для анализа многомерных временных рядов.

Рассмотрим r −мерный стационарный случайный процесс $X^r(t), t \in Z$, с $MX_a(t) = 0, a = \overline{1,r}$, с неизвестной взаимной спектральной плотностью $f_{ab}(\lambda)$, $\lambda \in \Pi = [-\pi, \pi]$, $a, b = \overline{1,r}$. Пусть $X_a(0), X_a(1), ..., X_a(T-1)$ − T последовательных наблюдений за процессом $X_a(t), t \in Z, a = \overline{1,r}$ и число наблюдений $T = S(N-M)+M$, где S − число пересекающихся интервалов разбиения длины N, $0 \le M < N$.

В качестве оценки неизвестной взаимной спектральной плотности процесса рассмотрим статистику вида

$$\hat{f}_{ab}^{T}(\lambda) = \frac{1}{S}\sum_{s=1}^{S} I_{ab}^{s(N-M)}(\lambda), \qquad (1)$$

где

$$I_{ab}^{s(N-M)}(\lambda) = d_a^{s(N-M)}(\lambda)\overline{d_a^{s(N-M)}(\lambda)},$$

$$d_a^{s(N-M)}(\lambda)=\left[2\pi\sum_{t=(s-1)(N-M)}^{s(N-M)+M-1}h_T^2\left(t-(s-1)(N-M)\right)\right]^{-\frac{1}{2}}\times$$

$$\times\sum_{t=(s-1)(N-M)}^{s(N-M)+M-1}h_T\left(t-(s-1)(N-M)\right)X_a(t)e^{-it\lambda},$$

$s=\overline{1,S}$, $\lambda\in\Pi$, $a=\overline{1,r}$, причем наблюдения сглаживаются одним и тем же окном просмотра данных $h_T(t), t\in Z$.

Статистика $d_a^{s(N-M)}(\lambda)$ исследована в работе [1, с. 104].

Исследованы некоторые статистические свойства оценки $\hat{f}_{ab}^{(\cdot)}(\lambda), \lambda\in\Pi,\ a,b=\overline{1,r}$. Доказана

Теорема 1. *Математическое ожидание оценки взаимной спектральной плотности* $\hat{f}_{ab}^{(\cdot)}(\lambda), \lambda\in\Pi, a,b=\overline{1,r}$, *имеет вид*

$$M\hat{f}_{ab}^{(\cdot)}(\lambda)=\int_{\Pi}f_{ab}(x+\lambda)\Phi_N(x)dx,$$

где функция $\Phi_N(x)$ *задается равенством*

$$\Phi_N(x)=\left[2\pi\sum_{t=0}^{N-1}h_T^2(t)\right]^{-1}\left|\varphi_N(x)\right|^2,$$

а $\varphi_N(x), x\in\Pi$, *задается выражением*

$$\varphi_N(x)=\sum_{t=0}^{N-1}h_T(t)e^{ixt}.$$

Исследуем асимптотическое поведение математического ожидания оценки $\hat{f}_{ab}^{(\cdot)}(\lambda), \lambda\in\Pi, a,b=\overline{1,r}$, заданной соотношением (1).

Теорема 2. *Пусть взаимная спектральная плотность* $f_{ab}(\lambda), \lambda\in\Pi$, *ограничена на* Π, *непрерывна в точке* $\lambda\in\Pi$, *окна просмотра данных ограничены и имеют ограниченную вариацию, тогда*

$$\lim_{N\to\infty}M\hat{f}_{ab}^{(\cdot)}(\lambda)=f_{ab}(\lambda),$$

$a,b=\overline{1,r}$.

Доказательство. Используя свойства функции $\Phi_N(x)$, получим

$$\left|M\hat{f}_{ab}^{(\cdot)}(\lambda)-f_{ab}(\lambda)\right|=\left|\int_{\Pi}f_{ab}(x+\lambda)\Phi_N(x)dx-f_{ab}(\lambda)\int_{\Pi}\Phi_N(x)dx\right|\le\int_{\Pi}\left|f_{ab}(x+\lambda)-f_{ab}(\lambda)\right|\times$$

$$\times\left|\Phi_N(x)\right|dx=\int_{\{|x|\le\delta\}}\left|f_{ab}(x+\lambda)-f_{ab}(\lambda)\right|\left|\Phi_N(x)\right|dx+\int_{\Pi\setminus\{|x|\le\delta\}}\left|f_{ab}(x+\lambda)-f_{ab}(\lambda)\right|\left|\Phi_N(x)\right|dx=$$

$$=I_1+I_2,$$

для некоторого $0<\delta<\pi$.

Рассмотрим каждый из интегралов.

Так как функция $f_{ab}(\lambda)$ непрерывна в точке λ, то $I_1\to 0$ при $T\to\infty$.

Рассмотрим I_2. Учитывая ограниченность взаимной спектральной плотности на Π, получим

$$I_2\le 2\max_x\left|f_{ab}(x)\right|\int_{\Pi\setminus\{|x|\le\delta\}}\left|\Phi_N(x)\right|dx.$$

Учитывая свойства функции $\Phi_N(x)$, получим $I_2\to 0$ при $T\to\infty$. Теорема доказана.

Список использованных источников

1. Труш, Н.Н. Асимптотические методы статистического анализа временных рядов / Н.Н. Труш. – Минск: БГУ, 1999. – 218 с.