УДК 517-518.948

СРАВНИТЕЛЬНЫЙ АНАЛИЗ НЕЛОКАЛЬНЫХ ГРАДИЕНТНОГО И КВАЗИНЬЮТОНОВСКОГО МЕТОДОВ

А.А. Ступкин, А.А. Харитонюк, *4 курс*
Научный руководитель – ***В.М. Мадорский****, к ф.-м н., доцент.*
Брестский государственный университет имени А.С. Пушкина

Пусть необходимо решить уравнение

$$F(x) = f(x) + g(x) = 0,\quad f \in C_D^2,\ g \in C_D. \tag{1}$$

Для решения уравнения (1), аппроксимируя $g(x)$ рядом Фурье и в качестве $f(x)$ берем $f(x) - g_{aprox}(x)$ и соответственно вместо $g(x)$ берем $g(x) - g_{aprox}(x)$. Далее применим следующие нелокальные итерационные процедуры.

Градиентный метод:

Шаг 1 Последовательные приближения находятся по формуле:

$$x_{k+1} = x_k - \beta_k \frac{\overline{f'}(x_k)f(x_k)\left(\|f(x_k)\|^2 + \beta_{k-1}\|g(x_k)\|^2\right)}{\|\overline{f'}(x_k)f(x_k)\|^2} \tag{2}$$

Шаг 2. Если $\|f(x_k) + g(x_k)\| < \varepsilon$, то приближенное решение уравнения (1) найдено, иначе пересчитывается шаговая длина по формуле:

$$\beta_{k+1} = min\left(1, \frac{\beta_k\|f(x_k)\|^2 + \beta_{k-1}\|g(x_k)\|^2}{\|f(x_{k+1})\|^2 + \beta_k\|g(x_{k+1})\|^2}\right), \beta_0, \beta_{-1}, \in [10^{-3}, 10^{-1}], \tag{3}$$

и переходим на шаг 1.

Относительно операторов f и g полагаем, что имеют место соотношения: $\|f''(x)\| \le K$, $\|\beta_n g(x_{n+1}) - \beta_{n-1} g(x_n)\| \le \beta_n L\|x_{n+1} - x_n\|$.

Теорема.

Пусть в интересующей нас области D существует решение уравнения (1). Тогда при выполнении перечисленных выше условий, накладываемых на операторы f и g, если начальное приближение x_0 и шаговая длина β_0 таковы, что выполняется соотношение $\varepsilon_0 = (KB^2 + LB)\|\beta_0 f(x_0)\| < 1$, итерационный процесс (2)- (3) со сверхлинейной (локально с квадратичной) скоростью сходится к решению уравнения (1).

Доказательство теоремы вполне аналогично тому, как это проводится в работе [2].

Квазиньютоновский метод:

Шаг 1 Решается линейная система относительно Δx_k:

$$f(x_k)\Delta x_k = -\beta_n(f'(x_k) + \beta_k g(x_k)) \tag{4}$$

Шаг 2 Рассчитывается новое значение x_{k+1}:

$$x_{k+1} = x_k + \Delta x_k \tag{5}$$

Шаг 3. Если $\|f(x_k) + g(x_k)\| < \varepsilon$, то приближенное решение уравнения (1) найдено, иначе пересчитывается шаговая длина по формуле:

$$\beta_{k+1} = min\left(1, \frac{\beta_k\|f(x_k)\|^2 + \beta_{k-1}\|g(x_k)\|^2}{\|f(x_{k+1})\|^2 + \beta_k\|g(x_{k+1})\|^2}\right), \beta_0, \beta_{-1}, \in [10^{-3}, 10^{-1}], \tag{6}$$

и переходим на шаг 1.

Вычислительный эксперимент и его обсуждение

Для тестирования использовалась система:

$$2\ x_1\ +\ x_2 + x_3 + \cdots + x_n = 3 - n;$$
$$x_1 + 2\ x_2\ + x_3 + \ldots + x_n = 3 - n;$$
$$x_1 +\ x_2 + 2\ x_3\ + \ldots + x_n = 3 - n;$$
$$\ldots$$
$$x_1 +\ x_2 + \cdots + x_{n-1} + 2\ x_n\ = 3 - n;$$
$$x_1 x_2\ x_3 \ldots x_n = \pm 1;$$

Система тестировалась при значениях случаемым образом полученных из интервалов $-2,2$, $-3,3$, $-5,5$ и запускалась на тестирование 1000 раз. В качестве точности ε использовалась величина E-10. Для градиентного метода в случае, если заданная точность не достигнута за 100000 итераций, для квазиньютоновского- 1000 итераций (в связи с большими затратами на каждую итерацию квазиньютоновского метода), запуск считался неудавшимся.

Тестирование проводилось на компьютере: процессор 2.2 Ггц, ОЗУ 1024 Mb, программа написана на Visual C#.

Результаты тестирования сведены в таблице:

Таблица – Связь между эффективностью процессов и начальными данными.

Интервал начальных приближений	Метод	
	Градиентный	Квазиньютоновский
$-2,2$	95,1%(40184,8)	98,5%(14053,7)
$-3,3$	84,2%(55629,9)	94,3%(15053,2)
$-5,5$	71,1%(147307,5)	93,3%(10163,1)

В ячейках таблицы показан процент удавшихся запусков, в скобках указано среднее время (в микросекундах), понадобившееся программе, чтобы достигнуть заданной точности. В связи с этим можно сделать следующие выводы: квазиньютоновский метод оказался эффективнее как по широте области сходимости, та и по скорости сходимости к решению.

Список использованных источников

1. Приближённое решение операторных уравнений / М.А. Красносельский [и др.]; - Моссква: Наука, 1969. – 455с.

2. Мадорский, В.М. Квазиньютоновские процессы для решения нелинейных уравнений / В.М. Мадорский. – Брест : БрГУ, 2005. – 174с.