УДК 519.6

ОБ ОДНОМ ИТЕРАЦИОННОМ МЕТОДЕ РЕШЕНИЯ НЕКОРРЕКТНЫХ ЗАДАЧ

***И.Д. Торчик**, 4 курс*
*Научный руководитель – **В.Ф. Савчук**, к.ф.–м. н., доцент*
Брестский государственный университет имени А.С. Пушкина

В действительном гильбертовом пространстве *H* решается уравнение 1 рода

$$Ax = y, \tag{1}$$

где *A* – ограниченный положительный самосопряженный оператор, для которого нуль не является собственным значением. Однако нуль принадлежит спектру оператора *A* и, следовательно, задача некорректна.

Предположим, что при точной правой части *y* существует единственное решение x уравнения (1). Для отыскания решения уравнения (1) применим итерационный метод

$$x_{n+1} = (E - \alpha A^3)x_n + \alpha A^2 y, \quad x_0 = 0. \tag{2}$$

В случае, когда правая часть уравнения (1) известна приближенно, $\|y - y_\delta\| \le \delta$, метод (2) примет вид

$$x_{n+1,\delta} = (E - \alpha A^3)x_{n,\delta} + \alpha A^2 y_\delta, \quad x_{0,\delta} = 0. \tag{3}$$

Для метода (3) доказана сходимость в исходной норме гильбертова пространства и получена оценка погрешности. Доказаны теоремы.

<u>Теорема 1.</u> При условии $0 < \alpha < \dfrac{2}{M^3}$ метод (2) сходится в исходной норме гильбертова пространства.

<u>Теорема 2.</u> Итерационный метод (3) при условии $0 < \alpha < \frac{2}{M^3}$ сходится, если выбрать число итераций n из условия $n^{\frac{1}{3}}\delta \to 0, n \to \infty, \delta \to 0$.

<u>Теорема 3.</u> Если точное решение уравнения (1) истокопредставимо, т.е. $x = A^s z, \quad s > 0$, то при условии $0 < \alpha < \frac{5}{4M^3}$ для метода (3) справедлива оценка погрешности

$$\left\| x - x_{n,\delta} \right\| \le s^{\frac{s}{3}} (3n\alpha e)^{-\frac{s}{3}} \left\| z \right\| + \left(\frac{5}{4} \right)^{\frac{2}{3}} \cdot 3n^{\frac{1}{3}} \alpha^{\frac{1}{3}} \delta, n \ge 1.$$

<u>Теорема 4.</u> При условии $0 < \alpha \le \frac{5}{4M^3}$ и $x = A^s z$, $s > 0$ оптимальная оценка погрешности имеет вид

$$\left\| x - x_{n,\delta} \right\| \le (1+s) \left(\frac{s}{3} \right)^{-\frac{2s}{3(s+1)}} \cdot e^{-\frac{s}{3(s+1)}} \left\| z \right\|^{\frac{1}{s+1}} \delta^{\frac{s}{s+1}}, \quad n \ge 2 \tag{4}$$

и получается при

$$n_{опт} = s^{\frac{s+3}{s+1}} 3^{-\frac{s+3}{s+1}} e^{-\frac{s}{s+1}} \alpha^{-1} \left\| z \right\|^{\frac{3}{s+1}} \delta^{-\frac{3}{s+1}} \tag{5}$$

<u>Замечание.</u> Оптимальная оценка (4) не зависит от α, но $n_{опт}$ зависит от него, поэтому для уменьшения $n_{опт}$ и, следовательно, объема вычислительной работы следует брать α возможно большим, удовлетворяющим условию $0 < \alpha \le \frac{5}{4M^3}$, и так, чтобы $n_{опт}$ было целым.

Рассмотренный метод найдет практическое применение в прикладной математике: он может быть использован для решения задач, встречающихся в гравиметрии, спектроскопии, теории потенциала, синтезе антенн, акустике, автоматической обработке результатов физического эксперимента, определении формы радиоимпульса, излученного источником, и формы электрического импульса на входе кабеля.

Список использованных источников

1. Савчук, В.Ф. Регуляризация операторных уравнений в гильбертовом пространстве / В.Ф. Савчук, О.В. Матысик. – Брест : Издательство БрГУ. – 2008. – 196 с.