УДК 519.6 + 517.983.54

О ПРИБЛИЖЕННОМ РЕШЕНИИ НЕКОРРЕКТНЫХ ЗАДАЧ

***Р.Ю. Улезло**, 5 курс*
*Научный руководитель – **О.В. Матысик**, к.ф.-м.н., доцент*
Брестский государственный университет имени А.С. Пушкина

В последние десятилетия в математической науке выделился важный раздел – теория некорректно поставленных задач и методы их приближённого решения. Потребности практики приводят к необходимости решения некорректных задач, которые во многих случаях описываются операторными уравнениями первого рода. Некорректные задачи часто встречаются в технике, физике, экономике и других естественных науках. Для их решения широко используются итерационные методы.

Будем рассматривать в гильбертовом пространстве *H* операторное уравнение первого рода

$$Ax = y \tag{1}$$

с положительным ограниченным самосопряжённым оператором *A*, для которого нуль является собственным значением, т. е. задача (1) имеет неединственное решение. Предположим, что $y \in R(A)$, т. е. при точной правой части *y* уравнения решение (неединственное) задачи (1) существует. Для его отыскания используем итерационную метод явного типа

$$x_{n+1} = (E - \alpha A)^2 x_n + 2\alpha y - \alpha^2 Ay, \quad x_0 = 0. \tag{2}$$

Обозначим через $N(A) = \{x \in H \mid Ax = 0\}$, $M(A)$ – ортогональное дополнение ядра $N(A)$ до H. Пусть $P(A)x$ – проекция $x \in H$ на $N(A)$, а $\Pi(A)x$ – проекция $x \in H$ на $M(A)$.

Справедлива

<u>Теорема</u>. *Пусть* $A \ge 0,\ y \in H,\ 0 < \alpha < 2/\|A\|$, *тогда для итерационного процесса* (2) *верны следующие утверждения*:

а) $Ax_n \to \Pi(A)y, \|Ax_n - y\| \to I(A, y) = \inf\limits_{x \in H}\|Ax - y\|$;

б) метод (2) *сходится тогда и только тогда, когда уравнение* $Ax = \Pi(A)y$ *разрешимо. В последнем случае* $x_n \to P(A)x_0 + x^*$, *где* x^* — *минимальное решение уравнения*.

Доказательство. Применим оператор A к методу (2) и получим

$$Ax_n = A(E - \alpha A)^2 x_{n-1} + \left[E - (E - \alpha A)^2\right](P(A)y + \Pi(A)y),$$

где $y = P(A)y + \Pi(A)y$. Так как $AP(A)y = 0$, то справедливо равенство $Ax_n = A(E - \alpha A)^2 x_{n-1} + \left[E - (E - \alpha A)^2\right]\Pi(A)y$. Последнее равенство запишется в виде $v_n = (E - \alpha A)^2 v_{n-1}$, где $v_n = Ax_n - \Pi(A)y$ и $v_n \in M(A)$. Отсюда $v_n = (E - \alpha A)^{2n} v_0$. Имеем $A \ge 0$ и A – положительно определён в $M(A)$, т. е. $(Ax, x) > 0\ \ \forall x \in M(A)$. Так как $0 < \alpha < \frac{2}{\|A\|}$, то $\|E - \alpha A\| < 1$, поэтому справедлива цепочка неравенств

$$\|v_n\| = \left\|(E - \alpha A)^{2n} v_0\right\| = \left\|\int_0^{\|A\|}(1 - \alpha\lambda)^{2n} dE_\lambda v_0\right\| \le \left\|\int_0^{\varepsilon_0}(1 - \alpha\lambda)^{2n} dE_\lambda v_0\right\| +$$

$$+\left\|\int_{\varepsilon_0}^{\|A\|}(1 - \alpha\lambda)^{2n} dE_\lambda v_0\right\| \le \left\|\int_0^{\varepsilon_0} dE_\lambda v_0\right\| + q^n(\varepsilon_0)\left\|\int_{\varepsilon_0}^{\|A\|} dE_\lambda v_0\right\| = \|E_{\varepsilon_0} v_0\| + q^n(\varepsilon_0)\|v_0 - E_{\varepsilon_0} v_0\| < \varepsilon$$

при $\varepsilon_0 \to 0,\ n \to \infty$ (здесь $|1 - \alpha\lambda| \le q(\varepsilon_0) < 1$ при $\lambda \in [\varepsilon_0, \|A\|]$). Следовательно, $v_n \to 0$, откуда $Ax_n \to \Pi(A)y$ и $\Pi(A)y \in A(H)$. Таким образом, получим $\|Ax_n - y\| \to \|\Pi(A)y - y\| = \|P(A)y\| = I(A, y)$ [1]. Итак, а) доказано.

Докажем б). Пусть процесс (2) сходится. Покажем, что уравнение $Ax = \Pi(A)y$ разрешимо. Из сходимости $\{x_n\} \subset H$ к $z \in H$ и из а) следует $Ax_n \to Az = \Pi(A)y$, следовательно, $\Pi(A)y \in A(H)$ и уравнение $Ax = \Pi(A)y$ разрешимо.

Пусть теперь $\Pi(A)y \in A(H)$ (уравнение $Ax = \Pi(A)y$ разрешимо), следовательно, $\Pi(A)y = Ax^*$, где x^* – минимальное решение уравнения $Ax = y$ (оно единственно в $M(A)$). Тогда метод (2) имеет вид

$$x_n = (E-\alpha A)^2 x_{n-1} + A^{-1}\left[E-(E-\alpha A)^2\right]\Pi(A)y = (E-\alpha A)^2 x_{n-1} + A^{-1}\left[E-(E-\alpha A)^2\right]Ax^* =$$

$$= (E-\alpha A)^2 x_{n-1} + \left[E-(E-\alpha A)^2\right]x^* = x_{n-1} + \left[E-(E-\alpha A)^2\right](x^* - x_{n-1}).$$

Разобьём последнее равенство на два:

$$P(A)x_n = P(A)x_{n-1} + P(A)\left[E-(E-\alpha A)^2\right](x^* - x_{n-1}) =$$

$$= P(A)x_{n-1} + \left[E-(E-\alpha A)^2\right]P(A)(x^* - x_{n-1}) = P(A)x_{n-1} = P(A)x_0,$$

так как $AP(A)(x^* - x_{n-1}) = 0$;

$$\Pi(A)x_n = \Pi(A)x_{n-1} + \Pi(A)\left[E-(E-\alpha A)^2\right](x^* - x_{n-1}) =$$

$$= \Pi(A)x_{n-1} - \left[E-(E-\alpha A)^2\right](\Pi(A)x_{n-1} - x^*),$$

так как $x^* \in M(A)$.

Обозначим $w_n = \Pi(A)x_{n-1} - x^*$, тогда $w_n = (E-\alpha A)^2 w_{n-1}$ и, аналогично v_n, можно показать, что $w_n \to 0,\ n \to \infty$. Следовательно, $\Pi(A)x_n \to x^*$. Отсюда $x_n = P(A)x_n + \Pi(A)x_n \to P(A)x_0 + x^*$. Теорема доказана.

З а м е ч а н и е. *Так как* $x_0 = 0$, то $x_n \to x^*$, *т.е. процесс* (2) *сходится к нормальному решению, т. е. к решению с минимальной нормой*.

Предложенный метод можно эффективно использовать при решении различных прикладных некорректных задач, встречающихся в математической экономике, геофизике, космических исследованиях (спектроскопии), медицине.

Список использованных источников

1. Bialy, H. Iterative Behandlung Linearer Funktionsgleichungen / H. Bialy // Arch. Ration. Mech. and Anal. – 1959. – Vol. 4, № 2. – P. 166-176.