УДК 517-518.948

ПРИМЕНЕНИЕ МЕТОДОВ НЕПОЛНОГО ПРОГНОЗА ДЛЯ РЕШЕНИЯ НЕЛИНЕЙНЫХ СИСТЕМ УРАВНЕНИЙ

О.В. Чечко, О.С. Грицук*, 4 курс*
Научный руководитель – ***В.М. Мадорский****, к.ф.-м.н., доцент*
Брестский государственный университет имени А.С. Пушкина

Одной из проблем прикладной математики является задача поиска решения систем нелинейных уравнений. Решение таких систем, как правило, невозможно в замкнутом виде. В связи с этим для решения систем нелинейных уравнений широко применяются итерационные методы. Одним из популярных методов решения систем нелинейных уравнений является метод Ньютона. Основное достоинство его – локальная квадратичная сходимость, однако он сходится с достаточно хорошего начального приближения. В связи с тем, что, как правило, нам не известно такое приближение, метод Ньютона в чистом виде применять нецелесообразно. Работа посвящена эффективным сверхлинейным квазиньютоновским итерационным процессам для решения нелинейных уравнений. Опишем предлагаемый ниже алгоритм:

В частности нами была рассмотрена следующая система уравнений:

Полесгу

до цикла имеем β_0, x_0. Вычислим Δx_0 по формуле $f'(x_0)\Delta x_0 = -\sqrt{\beta_0} f(x_0)$, где $\beta_0 \in [10^{-6}, 10^{-3}]$ и, используя равенство $x_1 = x_0 + \Delta x_0$, определим x_1. Находим β_1 по формуле $\beta_1 = \min\left(1, \frac{\gamma_0 \|\Delta x_0\| \|f(x_0)\|}{\beta_0 \|\Delta x_1\| \|f(x_1)\|}\right), \gamma_1 = \left(\frac{\gamma_0 \|\Delta x_0\| \|f(x_0)\|}{\|\Delta x_1\| \|f(x_1)\|}\right)$. Заходим в цикл:

Шаг 1 . Решается система уравнений (1) относительно Δx_n :

$$f'(x_n)\Delta x_n = -f(x_n), n = 0,1,2\ldots$$

Шаг 2 . Вносится поправка в вектор x_n :

$$x_{n+1} = x_n + \beta_n \Delta x_n,\ n = 0,1,2,\ldots,\ \beta_0 \in [10^{-3}, 10^{-1}]$$

Шаг 3 . Если $\|\Delta x_n\| \le \varepsilon$, где ε – малая величина (параметр останова), то конец просчётов, иначе переход на шаг 4.

Шаг 4 . Определяется новая шаговая длина: если $\|f(x_{n+1})\| < \|f(x_n)\|$, то $\beta_{n+1} = 1$, иначе пересчет β_{n+1} :

$$\beta_{n+1} = \min\left(1, \frac{\gamma_n \|\Delta x_n\| \|f(x_n)\|}{\beta_n \|\Delta x_{n+1}\| \|f(x_{n+1})\|}\right), \gamma_{n+1} = \left(\frac{\gamma_n \|\Delta x_n\| \|f(x_n)\|}{\|\Delta x_{n+1}\| \|f(x_{n+1})\|}\right), \gamma_0 = \beta_0^{\ 2},\ \beta_0 \in [10^{-6}, 10^{-3}]$$

и установим $x_0 := x_1$; $x_1 := x_2$; $\|\Delta x_0\| := \|\Delta x_1\|$; $\beta_0 := \beta_1$ и переход на Шаг 1 .

Доказательство сходимости предлагаемого процесса может быть приведено вполне аналогично, как это делается в работе [1].

Сравним рассмотренный метод с известным методом неполного прогноза Жанлава-Пузынина[2]:

Шаг 1. Решается нелинейная система уравнений относительно Δx_n:

$$f^{/}(x)\Delta x_n = -\beta_n f(x_n),\ n=0,1,2,\ldots$$

Шаг 2. Вносится поправка в вектор x_n:

$$x_{n+1} = x_n + \Delta x_n,\ n=0,1,2,\ldots,\ \beta_0 \in [10^{-4}, 10^{-1}].$$

Шаг 3. Проверка. Если $\|f(x_{n+1})\| < \varepsilon$, где ε - малая величина (параметр останова), то конец просчётов, иначе переход на шаг 4.

Шаг 4. Определяется новая шаговая длина: если $\|f(x_{n+1})\| < \|f(x_n)\|$, то $\beta_{n+1} = 1$, иначе

$$\beta_{n+1} = \min\left(1, \frac{\beta_n \|f(x_n)\|}{\|f(x_{n+1})\|}\right), \quad n=0,1,2,\ldots$$

и осуществляется переход на шаг 1.

Численные эксперименты проводились на системе (1).

$$\begin{cases} 2x_1 + x_2 + \ldots + x_{n-1} + x_n = n+1 \\ x_1 + 2x_2 + \ldots + x_{n-1} + x_n = n+1 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ x_1 + x_2 + \ldots + 2x_{n-1} + x_n = n+1 \\ x_1 x_2 \ldots x_{n-1} x_n = 1 \end{cases} \quad (1)$$

При решении системы (1) использовались как предложенный нами метод (назовем его метод 1), так и известный метод Жанлава-Пузынина [2]. Оба они являются квазиньютоновскими методами неполного прогноза. Методы неполного прогноза являются достаточно эффективными и позволяют` найти решение за разумное количество итераций даже в случае случайного начального вектора. Нами начальный вектор выбирался из промежутка (-10,10). Рассмотренные методы оказались совершенно разными по эффективности.

Полесгу

Результаты просчетов сведены в таблицу1.

Исследуется сходимость рассматриваемых процессов на системах разной размерности. В качестве начального приближения используется один и тот же случайный вектор и приближенное решение получается с точностью не менее 1e-9 по норме невязки.

Таблица – Связь между размерностью и количеством итераций для достижения нужной точности

	Метод 1	**Метод Жанлава-Пузынина**	**Размерность N**
итер.	363	1583	N = 6
точн	1,71191453335329E-06	9,99288939496648E-06	
итер.	40	2063	N = 8
точн	1,40752187686645E-10	9,99166096235677E-08	
итер.	151	1974	N = 10
точн	8,1703495047325E-07	9,98639882026802E-07	
итер.	96	2172	N = 15
точн	3,90244040021993E-12	9,92831955706023E-08	

Анализ таблицы показал, что метод Жанлава-Пузынина оказался значительно менее эффективным, чем метод 1.

Список используемых источников

1. Мадорский, В.М. Квазиньютоновские процессы для решения нелинейных уравнений / В.М. Мадорский. – Брест.: БрГУ, 2005.- 186с.

2. Жанлав, Т. О сходимости на основе непрерывного аналога метода Ньютона. / Т.Жанлав, И.В. Пузынин // Ж.вычисл.матем.и матем.физ. – 1992. – Т.32, №6. – С.846-856.

Полесгу