УЧРЕЖДЕНИЕ ОБРАЗОВАНИЯ
«ГРОДНЕНСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ
ИМЕНИ ЯНКИ КУПАЛЫ»

ЭКОНОМИЧЕСКОЕ РАЗВИТИЕ БЕЛАРУСИ В КОНТЕКСТЕ РАСШИРЕНИЯ ЕВРОПЕЙСКОГО СОЮЗА (НИРС ФЭУ – 2005)

Материалы Международной студенческой научной конференции

12-13 мая 2005 г.

Гродно

Республика Беларусь

В 2 частях
Часть 2

Гродно 2005

О.В.Сидская
Научный руководитель – д-р физ.-мат. наук, проф. Н.С.Коваленко
(Белорусский государственный экономический университет)

МАТЕМАТИЧЕСКАЯ МОДЕЛЬ МАКРОКОНВЕЙЕРНОЙ ОРГАНИЗАЦИИ АСИНХРОННЫХ КОНКУРИРУЮЩИХ ПРОЦЕССОВ ПРИ ОГРАНИЧЕННОМ ЧИСЛЕ КАНАЛОВ ОБМЕНА

В рамках концепции макроконвейерных вычислений наиболее типовыми являются математические задачи, связанные с разработкой и выбором способов реализации одновременно протекающих процессов, конкурирующих за использование ограниченных ресурсов многократного применения (процессоры, память разных уровней, каналы и т.п.). Анализ показывает, что общее время реализации заданных объемов вычислений в условиях макроконвейерной концепции обработки потоков данных существенно зависит от соотношения длительностей операций счета и обмена, порядка их выполнения, наличия достаточного числа каналов и т.п. Соответствующую задачу, возникающую при анализе макроконвейерного способа организации вычислений в условиях ограниченного числа каналов, будем рассматривать ниже в постановке, сформулированной Ю.В.Капитоновой и А.А.Летичевским.

Пусть имеется многопроцессорная система МС, которая характеризуется следующими параметрами: p – число процессоров ($p \geq 2$), каждый из которых имеет собственную локальную память; m – число каналов ($m \geq 1$), через которые каждый из процессоров имеет доступ к внешней памяти, общей для всех процессоров.

Предполагается, что в МС одновременно выполняются p процессов, причем каждый из них состоит из $2s$ ($s \geq 1$) блоков, которые периодически повторяются в порядке «обмен, счет». Заданы также времена обменов ($t_1, t_2, ..., t_s$) и времена счета ($T_1, T_2, ..., T_S$). Предполагается, что число каналов ограничено ($m \leq p$), т.е. процессы конкурируют за использование каналов:

1) одновременно готовы к выполнению p процессов ($p \geq 2$);

2) в каждый момент времени m процессов ($m \geq 1$) из p ($p \geq 2$), одновременно (параллельно) протекающих в МС, выполняются синхронно, без ожиданий, остальные в очереди ждут освобождения каналов;

3) во время счета процесс монополизирует один и тот же процессор, во время обмена – канал;

4) очередной j-й блок счета на каждом процессоре выполняется только после завершения соответствующего j-го блока обмена, а каждый (j+1)-й блок обмена выполняется после завершения j-го блока счета;

5) времена обменов ($t_1, t_2, ..., t_s$) и времена счета ($T_1, T_2, ..., T_S$) предполагаются одинаковыми для всех процессов.

Кроме того, процессы считаются равноприоритетными, а режим работы каналов является циклическим.

Общее время выполнения всех p процессов, использующих m каналов, обозначим через $T_P(m)$. Заметим, что при $m \geq p$ в рамках принятой модели вычислений общее время выполнения p процессов $T_P(p)$ составит, очевидно, величину

$$T_P(p) = \sum_{j=1}^{s} \left(t_j + T_j\right) \quad (1).$$

Если окажется, что $m>p$, то m-p каналов не будут задействованы.

Из физических соображений наибольший интерес в рамках концепции макроконвейерных вычислений представляет случай ограниченного числа каналов, т.е. $m \langle\langle p$, и $p=km$, где $k>1$ – целое число.

Для нахождения общего времени выполнения p процессов $T_P(m)$ при $p=km$, $k>1$, все множество из p процессов разобъем на k групп по m процессов таким образом, что все m процессов в каждой группе будут выполняться строго синхронно. Это возможно в силу условий 1–5 и циклического режима работы каналов. Тогда ясно, что для вычисления $T_P(m)$ достаточно учитывать только по одному процессу из каждой группы.

Отобразим выполнение $p=km$ процессов, $k>1$, на p процессорах ($p \geq 2$) с помощью временных линейных диаграмм Ганта, соответствующих блокам обмена и счета. При этом осуществляется конвейеризация каждого из j-х блоков обмена и счета по всем p процессорам, причем m блоков обмена и p блоков счета могут выполняться одновременно. Далее производится совмещение всех диаграмм, соответствующих блокам, выполняющимся на разных процессорах, начиная со второй, справа налево на максимально возможную величину, не нарушающую условий 1–5 взаимодействия блоков с каналами и процессорами.

Теорема 1: *Общее время выполнения p процессов $(p \geq 2)$, конкурирующих за использование m каналов при $p=km$, $k>1$, определяется из соотношений:*

$$T_p(m) \leq T_{крит.}(\theta_{11}, \theta_{3s}) + \sigma,$$

где
$$\sigma = \sum_{j=1}^{s-2} \max\{0, T_j - (k-1)t_{j+1}\}, \qquad (2)$$

Во многих случаях, в том числе в ряде практических приложений, для вычисления $T_P(m)$ важно знать, когда в соотношениях (2) имеет место точное равенство. Ответ на этот вопрос дает следующая теорема.

Теорема 2: Если длительность времен выполнения блоков обмена и счета удовлетворяют соотношениям $t_j \leq T_j$, то в формулах (3) имеет место точное равенство, т. е.

$$T_p(m) = T_{крит}(\theta_{11}, \theta_{3s}) + \sum_{j=1}^{s-2} \max\{0, T_j - (k-1)t_{j+1}\}, \qquad (3)$$

Для вычисления величины критического пути $T_{крит.}(\theta_{11}, \theta_{3s})$, которая входит составной частью в соотношения (2)-(3), во многих случаях удобней воспользоваться следующей явной формулой:

$$T_{крит.}(\theta_{11}, \theta_{3s}) = = \max_{1 \leq u \leq s}\left[\sum_{j=1}^{u} \max(kt_{j-1}, t_{j-1} + T_{j-1}) + (k-1)t_u + \sum_{j=u}^{s}(t_j + T_j)\right], \qquad (4)$$

где $t_0 = T_0 = 0$.

Справедливость формулы (4) проверяется индукцией по s. Заметим, что трудоемкость вычислений по формулам (4) составляет $O(s)$ операций.

На практике на различных этапах автоматизированного проектирования МС с макроконвейерной организацией вычислений, включая соответствующее общесистемное программное обеспечение, а также при разработке программ и алгоритмов одной из центральных является задача выбора по различным критериям оптимального соотношения числа процессоров и каналов МС.

Рассматриваемая в данной работе математическая модель реализации асинхронных конкурирующих процессов при макроконвейерном способе организации вычислений в МС позволяет оценивать минимальное общее время выполнения заданных объемов вычислений, находить условия оптимальной балансировки обмена и счета, числа процессоров и каналов МС. Более того, данная математическая модель и полученные условия балансировки полностью подтверждают основной принцип макроконвейерных вычислений, выдвинутый ранее академиком В.М.Глушковым.

Список литературы

1. Михалевич В.С., Капитонова Ю.В., Летичевский А.А. О методах организации макроконвейерных вычислений // Кибернетика. – 1986. – №3. – С.3–10.

2. Капитонова Ю.В., Кляус П.С., Коваленко Н.С. Математическая модель конвейерной организации конкурирующих процессов // Докл. АН. – 1987. – Т.293. – №6. – С.1320–1324.