УДК 378

ПРАКТИЧЕСКИЕ МЕТОДЫ РЕШЕНИЯ В ОБОБЩЁННЫХ ФУНКЦИЯХ

А.Ш. Даужанов, Н.А. Турганов, Г.С. Азизова
Каракалпакский государственный университет имени Бердаха, г. Нукус,
aynazard@mail.ru, n-turganov95@mail.ru, *g-azizvova96@mail.ru*

Аннотация. Рассматривается способ нахождения производных разрывных функций в пространстве обобщённых функций, показаны преимущества этой теории, прежде всего, возможности

для вычислений производных разрывных функций по сравнению с обычными (классическими) производными.

Ключевые слова: функционал, обобщенные функции, функция Хевисайда, дельта - функция Дирака.

Введение. В последние годы все больше количество задач уравнений математической физики и теоретической физики решается при помощи методов, связанных с так называемыми интегрируемыми функциями и обобщёнными производными.Для работы с такими функциями требуется специальная техника – методы теории обобщённых функций. Теория обобщённых функций есть общий метод, позволяющий рассматривать и вычислять расходящиеся интегралы, суммировать расходящиеся ряды, дифференцировать разрывные функции и производить другие операции, невозможные в классическом анализе [5]. Обобщая различных понятий и методов математического анализа и теории дифференциальных уравнений, обобщённые функции, являются одним из важных разделов современной математики и в настоящее время находят широкое применения во многих практических областях естествознания, в том числе – во многих современных направлениях математики.

Несколько слов об истории возникновения обобщённых функции. Считается, что возникновение теории обобщённых функции связано с развитием математического анализа и теоретической физики. В начале XX века учёный – математик, известный специалист в области механики и теории потенциала Н.М.Гюнтер и другие учёные издали труды, в которых рассматривали не «функции точки», а «теория функции от областей», и это лучше соответствовало физической характеристике квантово-механических явлений. Фундаментальные идеи Хевисайда, Дирака, Кирхгофа, а также работы Ж.Адамара, М.Рисса способствовали её появлению.

Основы математической теории обобщённых функций были заложены известным математиком прошлого столетия С.Л.Соболевым на основе финитных бесконечно дифференцируемых функций в работах, выполненных им в 1935-39 гг., а в 1945-50 гг. Л.Шварц дал интегральное изложение теории обобщённых функций на основе пространств быстро убывающих функций.

Изложение основного материала. В процессе обучения теории обобщённых функций студенты изучают линейные операторы и функционалы, знакомятся с такими определениями и понятиями как обобщённая функция, обобщённая производная, регуляризация обобщённой функции, сходимость в пространстве обобщённых функции и другими понятиями и определениями теории обобщённых функций. Более подробно с общей теорией обобщённых функций можно познакомиться по книгам [1–4].

Рассмотрим некоторые примеры с использованием обобщённых функций. $\delta(x)-$ функции Дирака, так же, как и единичная функция Хевисайда $\theta(x)$ относится обобщённым функциям. Применение дифференцирования к функции Хевисайда приводит к дельта-функции Дирака. Дельта-функция $\delta(x)$ - упрощает решение многих задач, используется для описания производных от разрывных функций в точках разрыва.

Пример 1. Рассмотрим функцию Хевисайда, равная нулю для отрицательных значений аргумента и единице – для положительных (используется в математической физике):

$$\theta(x) = \begin{cases} 0, x < 0, \\ 1, x \geq 0. \end{cases}$$

Она является локально интегрируемой ($\theta \in L_{1,loc}$), следовательно, порождает регулярную обобщённую функцию:

$$\forall\varphi(x) \in D: (\theta, \varphi) = \int_{-\infty}^{+\infty} \theta(x)\varphi(x)dx = \int_0^{+\infty} \varphi(x)dx.$$

Пример 2. Сингулярной обобщённой функцией является $\delta-$функция, сопоставляющий для любой основной функции $\forall\varphi \in D$ её значение в точке 0 :

$$(\delta(x), \varphi(x)) = \int_{-\infty}^{+\infty} \delta(x)\varphi(x)dx = \varphi(0) \qquad \text{(т.е. } \delta \notin L_{1,loc}\text{)}.$$

Связь с функцией $\theta(x)$:

$$\theta(x)=\int_{-\infty}^{x}\delta(y)dy;\ \ \theta(-x)=\int_{x}^{+\infty}\delta(-y)dy\,, \qquad (1)$$

$$\frac{d\theta(x)}{dx}=\delta(x);\ \ \frac{d\theta(-x)}{dx}=-\delta(-x)\,. \qquad (2)$$

Пример 3. Сингулярная функция имеет производную, обращающуюся в бесконечность на счетном множестве точек. Конечнозначными сингулярными функциями являются функция знака (сигнум) и модуля аргумента ($|x|$).

1) *Функция знака аргумента.* $sign\,x=\dfrac{x}{|x|}$ Связь с функциями $\theta(x)$ и $\delta(x)$: $sign\,x=2\theta(x)-1$; $sign\,x=\theta(x)-\theta(-x)$; $\dfrac{d\,sign\,x}{dx}=2\delta(x)$.

2) *Функция модуля аргумента.* $|x|=x\,sign\,x$ не имеет (классической) производной в нуле. Но исходя из определения производной в обобщённом смысле и по теореме о связи обычной и обобщённой производных, как функционала типа функции, обобщённая функция может быть результатом операций дифференцирования над непрерывной кусочно гладкой функцией (см., например, [1-4]). Тогда

$$f'(x)=f'_{об.пр.}(x)=f'_{кл.пр.}(x)+\left[f\right]_{x_0}\delta(x-x_0)\,, \qquad (3)$$

где $\left[f\right]_{x_0}=f(x_0+0)-f(x_0-0)-$ величина скачка функции $f(x)$ в точке разрыва x_0, $f'_{кл.пр.}(x)-$ классическая производная (определённая всюду, кроме точки $x=x_0$) и $\delta(x-x_0)-$ дельта - функция со сдвигом аргумента на x_0.

Обобщённую функцию, соответствующую функции $f'_{кл.пр.}(x)$ по формуле (3), называют *регулярной частью обобщённой производной* $f'(x)=f'_{об.пр.}(x)$.

После введения *производной в обобщённом смысле*, первой производной $|x|$ будет функция сигнум: $\dfrac{d\,|x|}{dx}=sign\,x$, для второй производной получаем дельта-функцию Дирака: $\dfrac{d^2|x|}{dx^2}=2\delta(x)$.

Таким образом, не зная функции $\delta(x)$ и $\theta(x)$, приходится говорить, что производная нельзя находить там, где функция разрывна. Обобщённые функционалы $\delta(x)$ – функция Дирака и $\theta(x)$ – функция Хевисайда решает вопрос о производной в точке разрыва (в частности, используются при вычислении частных производных обобщённых функций, порождённых обычными функциями с конечными разрывами).

Заключение. В работе показано, что применение обобщённых функций для задач дифференцирования разрывных функций позволяют использовать методы математического анализа применительно к функциям, не обладающим свойством непрерывности. Кроме того, важным представляется значение методов теории обобщённых функций при введении в преподавания курсов по выбору, посвящённым элементам теории пространств Соболева, более расширенного изложения теории дифференциальных уравнений.

Список использованных источников

1. Агранович М.С. Обобщённые функции. М., МЦНМО, 2014.
2. Александров В.А. Обобщённые функции. Новосиб. гос. ун-т, 2005.
3. Бельхеева Р.К. Обобщённые функции в примерах и задачах. Новосиб. гос. ун-т, 2014.
4. Богачёв В.И., Смолянов О.Г. Действительный и функциональный анализ. М. – Ижевск, 2009.
5. Даужанов А.Ш. и др. Методы теории обобщённых функций. Нукус «ILIMPAZ», 2021.