УДК 517.55

ОБ ОБОБЩЕНИЯХ ВЕРХНЕЙ ПОЛУПЛОСКОСТИ В МНОГОМЕРНОМ КОМПЛЕКСНОМ ПРОСТРАНСТВЕ

Б.Т. Курбанов, Ж.Б. Каримбоев
Каракалпакский государственный университет,
kurbanovbukharbay@gmail.com, karimboyevjahongir94@gmail.com

Аннотация. Работа посвящена изучению некоторых задач анализа на одном многомерном обобщении верхней полуплоскости, границей которой является сфера Пуанкаре.

Ключевые слова: об обобщениях верхней полуплоскости, многомерном комплексном пространстве.

Многие задачи анализа, поставленные для единичного круга на плоскости, можно перенести на верхнюю полуплоскость при помощи преобразования Кэли

$$w = \frac{i(1+z)}{1-z}.$$

Два естественных обобщения единичного круга из комплексной плоскости $\mathbf{C}$ – шар и поликруг в $\mathbf{C}^n$ связаны с двумя во многом различными методами развития многомерного комплексного анализа на основе классической теории функций комплексного переменного. В поликруге доминирующей является структура прямого произведения, которая во многом определяет «покоординатные» методы исследования ([1]). В шаре ([2]) тоже естественно возникают хорошие интегральные представления, которые вместе с богатой группой автоморфизмов дают мощный аппарат исследования голоморфных функций. В настоящее время, в связи с более глубокими изучениями голоморфных функций в многомерных областях, возникла необходимость исследования задач голоморфного продолжения функций с границ и интегральных формул Бергмана, Коши-Сеге, Пуассона в неограниченных областях ([3-7]). Поэтому является актуальным нахождение многомерных аналогов формулы для реализации типа "единичный круг - верхняя полуплоскость". В этой статье мы рассмотрим многомерные обобщения верхней полуплоскости в виде реализации поликруга и единичного шара из $\mathbf{C}^n$.

1. Неограниченная реализации поликруга из $\mathbf{C}^n$.

Пусть Π^n - неограниченная область в $\mathbf{C}^n$ вида

$$\Pi^n = \{u = (u_1,...,u_n) \in \mathbf{C}^n : \operatorname{Im} u_k > 0, k = 1,..,n\},$$

которая представляет собой декартово произведение n верхних полуплоскостей

$$\Pi^n = \{u_k \in \mathbf{C}^n : \ \operatorname{Im} u_k > 0\}.$$

Остовом этой области является множество

$$X^n = \{u \in \mathbf{C}^n : \ \operatorname{Im} u_k = 0, \ \ k = 1,..,n\},$$

Известно, что мера Лебега dx на X^n записывается в виде

$$dx = dx_1 \wedge dx_2 \wedge \ldots \wedge dx_n,$$

где $x_k = \operatorname{Re} u_k$.

Далее, пусть U^n - единичный поликруг в $\mathbf{C}^n$

$$U^n = \{z = (z_1,...,z_n) \in \mathbf{C}^n : \ \ |z_k| < 1, \ \ k = 1,..,n\}$$

и

$$T^n = \{z \in \mathbf{C}^n : \ \ |z_k| = 1, \ \ k = 1,..,n\}$$

его остов.

Рассмотрим отображение вида $\varphi = (\varphi_1,...,\varphi_n) : \mathbf{C}^n_z \to \mathbf{C}^n_u$, где

$$u_k = \varphi_k(z) = i \cdot \frac{1 + z_k}{1 - z_k}, \ \ k = 1,...,n. \qquad (1)$$

Лемма 1. *Отображение* φ *является биголоморфным отображением* U^n *на* Π^n*, при этом* T^n *переходит в* X^n.

Теорема 1. *Пусть* ψ *произвольный автоморфизм области* Π^n *и* $\psi(I) = b$. *Тогда существует унитарное преобразование* ψ_U *вида (2), для которого*

$$\psi_b = \psi_U \circ \psi^{-1}. \qquad (3)$$

Лемма 2. *Справедливо соотношение*

$$P_{U^n}(\varphi^{-1}(u), \varphi^{-1}(b))\, dm_n(\varphi^{-1}(u)) = P(x,b)\, dx,$$

где dm_n - *нормированная мера Лебега на* T^n*, которая имеет вид*

$$dm_n(w) = \frac{1}{(2\pi i)^n} \frac{dw_1}{w_1} \wedge .. \wedge \frac{dw_n}{w_n}.$$

2. Обобщение верхней полуплоскости в виде неограниченной реализации единичного шара из $\mathbf{C}^n$

Пусть D неограниченная область в $\mathbf{C}^n$ вида

$$D = \{u = (u_1,...,u_n) \in \mathbf{C}^n : \ \operatorname{Im} u_1 > |u'|^2\},$$

где $|u'|^2 = |u_1|^2 + ... + |u_n|^2$. Ее граница называется сферой Пуанкаре ([3],[9]):

$$\partial D = \{u \in \mathbf{C}^n : \ \operatorname{Im} u_1 = |u'|^2\}.$$

Мера Лебега на ∂D записывается следующим образом:

$$dm(u) = \left(\frac{i}{2}\right)^{n-1} dx_1 \wedge du' \wedge d\overline{u}',$$

где $x_1 = \operatorname{Re} u_1$, $du' = du_2 \wedge ... \wedge du_n$, $d\overline{u}' = d\overline{u}_2 \wedge ... \wedge d\overline{u}_n$.

Обозначим через B_n единичный шар в $\mathbf{C}^n$

$$B_n = \{z \in \mathbf{C}^n : |z|^2 = |z_1|^2 + ... + |z_n|^2 < 1\},$$

а через S_n его границу

$$S_n = \{z \in \mathbf{C}^n : |z|^2 = 1\}.$$

Далее, через $\varphi = (\varphi_1,...,\varphi_n)$ обозначим преобразование $\mathbf{C}_z^n \to \mathbf{C}_u^n$, где

$$u_1 = \varphi_1(z) = \frac{i(1 - z_1)}{1 + z_1}, \ u_k = \varphi_k(z) = \frac{z_k}{1 + z_1}, \qquad (5)$$
$$k = 2,...,n$$

Теорема 2. *Отображение φ является биголоморфным отображением шара B_n на область D.*

Как известно (см. напр. [2]), автоморфизм φ_a единичного шара B_n, переставляющий точки a и $0 = (0,...,0)$ имеет явный вид:

$$\varphi_a(z) = \frac{a - \langle z,\overline{a}\rangle \frac{a}{|a|^2} - \sqrt{1 - |a|^2}\left(z - \langle z,\overline{a}\rangle \frac{a}{|a|^2}\right)}{1 - \langle z,\overline{a}\rangle}$$

где $\langle z,\overline{a}\rangle = z_1\overline{a}_1 + ... + z_n\overline{a}_n$.

Используя отображения φ и φ_a мы можем, как это сделано в предыдущем пункте, выписать автоморфизм области D, переводящий точку $b = \varphi(a)$ в точку $I = (i,0,...0)$, в виде композиций:

$$\psi_b = \varphi \circ \varphi_a \circ \varphi^{-1}.$$

Если φ_U - унитарное преобразование единичного шара B_n, сохраняющий точку $0 = (0,...,0)$, то $\psi_U = \varphi \circ \varphi_U \circ \varphi^{-1}$ определяет унитарное преобразование области D, сохраняющий точку $i = (i,0,...,0)$.

Теорема 3. *Пусть ψ произвольный автоморфизм, области D и $\psi(I) = b$. Тогда существует унитарное преобразование ψ_U области D, для которого*

$$y_b = y_U \, \mathrm{o} \, y^{-1}$$

Это утверждение доказывается аналогично теореме 1, с использованием соответствующего представления для автоморфизмов единичного шара B_n.

В [10] приведен конструктивный вид ядра Сеге для областей Зигеля 2-го рода и с помощью этого ядра определено ядро Пуассона для этих областей. Так как область D является областью Зигеля 2-го рода (см.[11]), мы можем выписать в явном виде ядра Сеге и Пуассона для области D.

Теорема 3. *Ядро Сеге для области* D *имеет вид:*

$$S(u,b) = \frac{c}{[i(b_1 - \overline{u}_1) + 2\left\langle b, \overline{u} \right\rangle']^n}, \qquad (7)$$

где $c = -\dfrac{2^{n-2}(n-1)!}{p^n}$, $\left\langle b, \overline{u} \right\rangle' = b_2\overline{u}_2 + \ldots + b_n\overline{u}_n$, $(u \, \mathrm{O} \, ¶D, \, b \, \mathrm{O} \, D)$

Пусть $u = j\ (z)$, $b = j\ (a)$.

Лемма 3. *При отображении* j *ядро Пуассона* P_B *и мера Лебега,* dm_n *примут вид:*

$$1) P_B\left(j^{-1}(u), j^{-1}(b)\right) = c_p \left| i + u_1 \right|^{2n} P(u,b),$$

где $c_p = \dfrac{(-1)^{n-1} p^n}{2^{n-2}(n-1)^t}$;

$$2) \; dm_n(j^{-1}(n)) = \frac{c_m}{\left| i + n_1 \right|^{2n}} dm(n),$$

где

$$c_m = \frac{(-1)^{n^2+1} 2^{2n-2}(n-1)!}{p^n}.$$

Список использованных источников

1. Рудин У. Теория функций в поликруге. М: Мир, 1974.

2. Рудин У. Теория функций в единичном, шаре из C\ М.: Мир, 1984.

3. Мысливец С.Г. Граничная теорема Мореры на сфере Пуанкаре//Комплексный анализ и дифференциальные операторы. Сб. научных трудов. Красноярск, КрасГУ, 2000. с.97-102.]

4. Stein E.M. Boundary behavior of holomorphic functions of several complex variables. Princeton: Princeton Univ. Press. 1972.

5. Худайберганов Г., Курбанов Б.Т. Об одной реализации классической области первого типа // Узбекский математический журнал, 2014, №1, С. 126-129.

6. Зигель К. Автоморфные функции нескольких комплексных переменных. М.:ИЛ,1954.

7. Владимиров B.C., Сергеев А.Г. Комплексный анализ в трубе будущего// Современные проблемы математики. Фундаментальные направления. М.: ВИНИТИ. 19S5. Т.8. С. 191-266.

8. Владимиров B.C. Обобщенные функции в математической физике. М.: Наука, 1979.

9. Шабат Б.В. Введение в комплексный анализ. Ч. 2. М.: Наука, 3-е изд., 1985.

10. Koranyi A. The Poisson integral for generalized half-planes and bounded symmetric domaines// Ann. Math. 1965. V. 82, N 2. P. 332-350.

11. Пятецкий—Шапиро И.И. Геометрия классических областей и теория автоморфных функций. М.: Наука, 1961.