

ГОСУДАРСТВЕННОЕ НАУЧНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ  
«НАУЧНО-ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ ЭКОНОМИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ  
МИНИСТЕРСТВА ЭКОНОМИКИ РЕСПУБЛИКИ БЕЛАРУСЬ»

# **ЭКОНОМИКА, МОДЕЛИРОВАНИЕ, ПРОГНОЗИРОВАНИЕ**

Сборник научных трудов

*Основан в 2007 году*

**Выпуск 18**

**ISSN 2218-0435**

Минск  
2024

УДК 330  
ББК 65.0  
Э40

Редакционная коллегия:

М.К. Кравцов (гл. ред.), Н.Г. Берченко (зам. гл. ред.), Я.М. Александрович (зам. гл. ред.), Т.А. Дехтярь (отв. секретарь), В.А. Воробьев, А.Е. Дайнеко, А.В. Данильченко, В.И. Малюгин, М.М. Ковалев, А.В. Червяков, Ю.С. Харин, Г.А. Хацкевич

Международный совет:

В.С. Мхитарян (Россия), В.К. Горбунов (Россия), В.А. Цыбатов (Россия), С.Л. Ткаченко (Россия), З.Ф. Мамедов (Азербайджан), В. Чжоу (КНР), Ф. Вернер (Германия)

Э40 **Экономика**, моделирование, прогнозирование: сб. науч. тр. / Ред. коллегия: М.К. Кравцов (гл. ред.) [и др.]. – Минск: НИЭИ Мин-ва экономики Респ. Беларусь, 2024. – Вып. 18. – 316 с.

В сборнике представлены результаты исследований по экономике, моделированию и прогнозированию. Отражены вопросы инновационного развития и цифровой экономики; структурной и макроэкономической политики; интеграционного объединения, сотрудничества и международных цепочек создания стоимости; экономического роста и научно-технического прогресса; экономики замкнутого цикла и финансовой безопасности; стратегического менеджмента и маркетинга; регионального развития; функционирования сектора деловых услуг в Беларуси; регулирования рынка труда России.

Значительное внимание уделено: 1) разработке методологии моделирования и прогнозирования социально-экономического развития страны и ее регионов, а также моделированию импортных потоков на основе таблиц «затраты – выпуск»; 2) построению кратчайшей транспортно-логистической сети с минимальными суммарными затратами и с учетом ее реального расположения на местности; 3) применению математических методов, алгоритмов и пакетов программ к решению прикладных задач.

Издание будет полезно широкому кругу читателей – научным работникам, преподавателям, докторантам, аспирантам, магистрантам, студентам и специалистам-практикам, интересующимся проблемами экономики, моделирования и прогнозирования.

**УДК 330**

Сборник включен Высшей аттестационной комиссией Республики Беларусь в Перечень научных изданий для опубликования результатов диссертационных исследований. Входит в систему Российского индекса научного цитирования (РИНЦ).

При перепечатке ссылка на сборник обязательна.

**УДК 330  
ББК 65.0**



## О ВРЕМЕНИ РЕАЛИЗАЦИИ РАСПРЕДЕЛЕННЫХ ВЫЧИСЛЕНИЙ ПРИ ОГРАНИЧЕННОМ ЧИСЛЕ КОПИЙ ПРОГРАММНОГО РЕСУРСА

Павлов П.А.,

*кандидат физико-математических наук, доцент,  
Полесский государственный университет*

Повышение производительности вычислительных систем всегда было и остается актуальной проблемой. Никакая вычислительная система по своей мощности не может сравниться с теми суммарными ресурсами, которые сосредоточены в локальных и глобальных компьютерных сетях. Быстрое развитие информационно-коммуникационных и сетевых технологий привело к интенсивному использованию географически распределенных вычислительных ресурсов и созданию на их основе динамически-масштабируемых высокопроизводительных *распределенных вычислительных систем* (РВС).

В литературе отсутствует каноническое определение распределенной вычислительной системы. Например, профессор Эндрю Стюарт Таненбаум (*Andrew Stuart Tanenbaum*) определяет *распределенную систему* как «...набор независимых компьютеров, представляющихся их пользователям единой объединенной системой» (Стин ван, Таненбаум, 2021). В книге (Роби, Замо-ра, 2022) сказано, что «...*под распределенной системой* мы понимаем всякую вычислительную систему, в которой несколько компьютеров или процессоров, так или иначе, вступают во взаимодействие». Вероятно, можно считать, что *распределенная система* – это система, компоненты которой расположены на разных сетевых компьютерах, которые обмениваются данными и координируют свои действия путем передачи сообщений друг другу (Бабичев, Конь-

ков, 2019). Моделью *распределенной системы* может также быть набор программных средств, представляющий собой совокупность взаимосвязанных процессов, выполняемых на одном и том же вычислительном устройстве (Косяков, 2014).

Из приведенных определений следуют важные специфические особенности РВС: *отсутствие общей памяти и необходимость обмена сообщениями* между программными компонентами для их взаимодействия и синхронизации; *отсутствие единого времени*, которое характеризует территориальное распределение компонентов системы; *географическая удаленность* компонентов системы, являющаяся отличительным признаком распределенности; *автономность и гетерогенность узлов системы*, позволяющие системе легко масштабироваться; наличие *параллельных процессов*, зачастую разделяющих ресурсы системы; наличие *связующего или промежуточного программного слоя (middleware)*, объединяющего вычислительные ресурсы в единую целостную систему.

В настоящее время существуют различные типы распределенных вычислительных систем: вычислительные кластеры, симметричные мультипроцессоры (SMP), системы с распределенной разделяемой памятью (DSM), массово-параллельные системы (MPP) и мультикомпьютеры (Топорков, Емельянов, 2018).

При создании РВС особую актуальность приобретают задачи построения и исследования математических моделей организации взаимодействия процессов, конкурирующих за программный ресурс. В связи с этим представляют интерес задачи распределенных вычислений, связанные с получением математических соотношений, которые могут иметь как прямой, так и обратный характер. При постановке прямых задач условиями являются значения параметров распределенной вычислительной системы, а решением – минимальное общее время реализации заданных объемов вычислений. Постановка обратных задач сводится к расчету характеристик распределенных систем, поиску критериев эффективности и оптимальности организации выполнения множества распределенных конкурирующих взаимодействующих процессов. Кроме того, принципы распределенной организации процессов относятся не только к универсальным способам достижения высокой производительности и надежности вычислительных средств, они носят достаточно общий характер и присущи процессам различной природы, прежде всего системам управления, операционным системам, системам автоматизированного проектирования, распределенным энергетическим системам и т.д. (Zaiets, Shtepa, Pavlov, 2019; Каплун, Павлов, Штепа, 2019; Коваленко, Павлов, 2023). При построении и исследовании математических моделей и задач оптимальной организации распределенных процессов широко применяются аппарат теории графов, линейных диаграмм Ганта, теории расписаний, комбинаторной оптимизации, алгебры матриц и др. (Танаев, Сотсков, Струсевиц, 1989; Емеличев, Ковалев, Кравцов, 1981; Лазарев, 2019).

Случай наличия в общей памяти РВС одной копии программного ресурса (PR) был изучен с различных точек зрения в работах (Павлов, Коваленко, 2011; Коваленко, Павлов, Овсеев, 2012; Kovalenko, Pavlov, Ovseec, 2012; Kovalenko, Pavlov, 2012; 2014; Pavlov, 2012; 2023a; 2023b; Коваленко, Павлов, 2023). Но, к сожалению, отсутствуют работы по математическому моделированию функционирования распределенных систем, в которых в общей памяти находится не одна, а несколько копий программного ресурса. Поэтому изучение задач, относящихся к оптимальной организации распределенных параллельных вычислений, приобретает особую актуальность в случае, когда в общей памяти РВС может быть одновременно размещено ограниченное число копий программного ресурса. Такое обобщение носит принципиальный характер, поскольку отражает основные черты мультимедийной обработки, а также позволяет сравнить эффективность конвейерной и параллельной обработки.

В работе построена математическая модель распределенных вычислений, решены задачи нахождения минимального времени выполнения неоднородных и однородных распределенных процессов, конкурирующих за использование ограниченного числа копий программного ресурса в синхронном режиме в случаях неограниченного и ограниченного параллелизма по числу процессоров многопроцессорной системы. При этом использованы идеи структурирования программного ресурса на линейно-упорядоченные блоки с их последующей конвейеризацией по процессам и процессорам многопроцессорной системы (Павлов, Коваленко, 2011).

**Математическая модель распределенных вычислений при ограниченном числе копий программного ресурса.** Конструктивными элементами для построения математических моделей, реализующих методы распределенных вычислений, являются понятия процесса и программного ресурса. Будем рассматривать *процесс* как последовательность наборов команд (процедур, блоков, подпрограмм)  $I_s = (1, 2, \dots, s)$ . Процессы, которые влияют на поведение один другого путем обмена информацией, называют *кооперативными* или *взаимодействующими* процессами. Многократно выполняемую в многопроцессорной системе программу или ее часть будем называть *программным ресурсом*, а множество соответствующих процессов – *конкурирующими*.

Математическая модель системы распределенной обработки конкурирующих взаимодействующих процессов при ограниченном числе копий программного ресурса включает:  $p \geq 2$  процессоров многопроцессорной системы, которые имеют доступ к общей памяти;  $n \geq 2$  распределенных конкурирующих процессов;  $s \geq 2$  блоков структурированного на блоки программного ресурса; матрицу  $T = [t_{ij}]$ ,  $i = \overline{1, n}$ ,  $j = \overline{1, s}$ , времен выполнения блоков программного ресурса распределенными взаимодействующими конкурирующими процессами;  $2 \leq c \leq p$  число копий структурированного на блоки программного ресурса, которые могут одновременно находиться в оперативной памяти, доступной для всех  $p$  процессоров;  $\theta > 0$  – параметр, характеризующий время дополнительных системных расходов, связанных с организацией конвейерного режима использования блоков структурированного программного ресурса множеством взаимодействующих конкурирующих процессов при распределенной обработке.

Будем также предполагать, что число блоков программного ресурса  $s \leq \left\lfloor \frac{p}{c} \right\rfloor$ , где  $[x]$  – целая часть числа, а число процессов  $n$  кратно числу копий  $c$  структурированного программного ресурса, т.е.  $n = mc$ ,  $m \geq 2$ , и что взаимодействие процессов, процессоров и блоков программного ресурса подчинено следующим условиям:

- 1) ни один из процессоров не может обрабатывать одновременно более одного блока;
- 2) процессы выполняются в параллельно-конвейерном режиме группами, т.е. осуществляется одновременное (параллельное) выполнение  $c$  копий каждого блока в сочетании с конвейеризацией группы из  $c$  копий  $Q_j$ -го блока по процессам и процессорам, где  $j = \overline{1, s}$ ;
- 3) обработка каждого блока программного ресурса осуществляется без прерываний;
- 4) распределение блоков  $Q_j$ ,  $j = \overline{1, s}$ , программного ресурса по процессорам для каждого из

процессов  $i = c(l-1) + q$ ,  $l = \overline{1, m}$ ,  $q = \overline{1, c}$ , где  $m = \frac{n}{c}$ , осуществляется циклически по правилу:

блок с номером  $j$  распределяется на процессор с номером  $c(j-1) + q$ .

Введем следующие режимы конвейерной реализации взаимодействия процессов, процессоров и блоков с учетом наличия  $c$  копий программного ресурса.

**Асинхронный режим** взаимодействия процессов, процессоров и блоков структурированного программного ресурса предполагает, что начало выполнения копии очередного  $Q_j$ -го блока,  $j = \overline{1, s}$ , определяется наличием  $c$  процессоров и готовностью копии блока к выполнению, при этом программный блок считается готовым к выполнению, если он не выполняется ни на одном из процессоров.

**Первый синхронный режим** обеспечивает линейный порядок выполнения блоков программного ресурса внутри каждого из процессов без задержек, т.е. в случае, когда  $2 \leq s \leq \left\lfloor \frac{p}{c} \right\rfloor$ , момент

завершения выполнения  $Q_j$ -го блока,  $j = \overline{1, s-1}$ , процессом с номером  $i = (l-1)c + q$ ,  $l = \overline{1, m}$ ,  $q = \overline{1, c}$ , на  $((j-1)c + q)$ -м процессоре совпадает с моментом начала выполнения следующего  $Q_{j+1}$ -го блока на процессоре с номером  $(jc + q)$ .

При **втором синхронном режиме** в случае, когда  $2 \leq s \leq \left\lceil \frac{p}{c} \right\rceil$ , момент завершения выполнения  $i$ -м процессом, где  $i = (l-1)c + q$ ,  $l = \overline{1, m-1}$ ,  $m = \frac{n}{c}$ ,  $q = \overline{1, c}$ ,  $j$ -го блока,  $j = \overline{1, s}$ , на  $((j-1)c + q)$ -м процессоре совпадает с моментом начала выполнения  $j$ -го блока процессом с номером  $(i+c)$  на этом же процессоре, т.е. обеспечивается непрерывное выполнение каждого блока всеми процессами.

**О п р е д е л е н и е 1.** Система  $n$  распределенных конкурирующих процессов называется **неоднородной**, если времена выполнения блоков программного ресурса  $Q_1, Q_2, \dots, Q_s$  зависят от объемов обрабатываемых данных и/или их структуры, т.е. разные для разных процессов.

**О п р е д е л е н и е 2.** Систему распределенных конкурирующих процессов будем называть **однородной**, если времена выполнения  $Q_j$ -го блока каждым из  $i$ -х процессов равны, т.е.  $t_{ij}^\theta = t_j^\theta$ ,  $i = \overline{1, n}$ ,  $j = \overline{1, s}$ .

**О п р е д е л е н и е 3.** Систему распределенных конкурирующих процессов будем называть **одинаково распределенной**, если времена выполнения всех блоков PR каждым из процессов совпадают и равны  $t_i^\theta$ , т.е. справедлива цепочка равенств  $t_{i1}^\theta = t_{i2}^\theta = \dots = t_{is}^\theta = t_i^\theta$ , для всех  $i = \overline{1, n}$ .

**Время реализации неоднородных процессов при достаточном числе процессоров.** На рис. 1 изображена диаграмма Ганта, иллюстрирующая функционирование распределенной системы, где  $T_{1c}^n(p, n, s, c, \theta)$  – время выполнения  $n$  неоднородных конкурирующих процессов, использующих  $c$  копий программного ресурса, структурированного на  $s$  линейно-упорядоченных блоков  $Q_1, Q_2, \dots, Q_s$  с матрицей времен выполнения с учетом дополнительных системных расходов  $T^\theta = [t_{ij}^\theta]_{n \times s}$  в первом синхронном режиме. Предполагается, что выполнение процессов осуществляется в вычислительной системе с  $p$  процессорами, и каждый из процессов является распределенным.

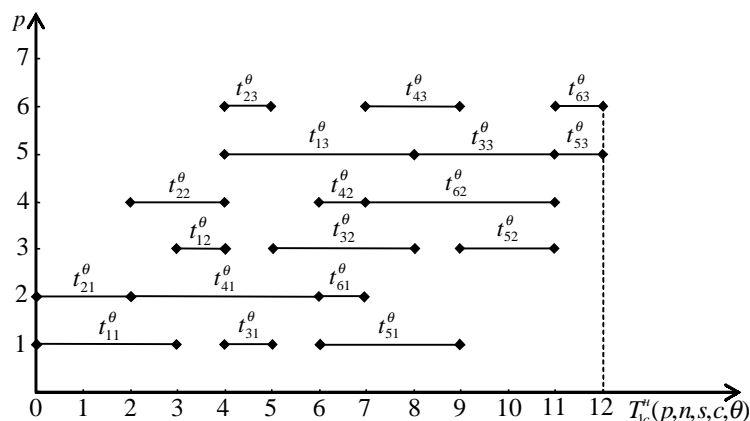


Рис. 1. Первый синхронный режим при достаточном числе процессоров

Источник: авторская разработка.

Рассмотрим случай, когда число процессоров *неоднородной* распределенной многопроцессорной системы является *достаточным*, т.е.  $2 \leq s \leq \left\lceil \frac{p}{c} \right\rceil$ . Все множество процессов разобьем на подмножество *c* по *m* процессов в каждом, причем в каждое *q*-е подмножество,  $q = \overline{1, c}$ , будут включены процессы с номерами  $i = c(l-1) + q$ ,  $l = \overline{1, m}$ , блоки которых будут выполняться на  $(c(j-1) + q)$ -х процессорах,  $j = \overline{1, s}$ . Тогда для вычисления времени выполнения  $T_{1c}^u(p, n, s, c, \theta)$  имеет место формула (Лазарев, 2019):

$$T_{1c}^u(p, n, s, c, \theta) = \max_{1 \leq q \leq c} \left( \sum_{i=1}^{m-1} \max_{1 \leq u \leq s} \left[ \sum_{j=1}^u t_{c(i-1)+q, j}^\theta - \sum_{j=1}^{u-1} t_{ci+q, j}^\theta \right] + \sum_{j=1}^s t_{c(m-1)+q, j}^\theta \right).$$

Здесь  $\max_{1 \leq u \leq s} \left[ \sum_{j=1}^u t_{c(i-1)+q, j}^\theta - \sum_{j=1}^{u-1} t_{ci+q, j}^\theta \right]$ ,  $i = \overline{1, m-1}$  – начало выполнения первого блока для каждого

из последующих процессов, начиная с  $(ci + q)$ -го в *q*-м подмноестве процессов, а  $\sum_{j=1}^s t_{c(m-1)+q, j}^\theta$  – длительность выполнения последнего процесса *q*-го подмноества, где  $q = \overline{1, c}$ .

**Время реализации распределенных неоднородных процессов при ограниченном параллелизме.** Рассмотрим общий случай, т.е. когда  $s > \left\lceil \frac{p}{c} \right\rceil$  и  $s = k \left\lceil \frac{p}{c} \right\rceil$ , где  $k > 1$  (рис. 2).

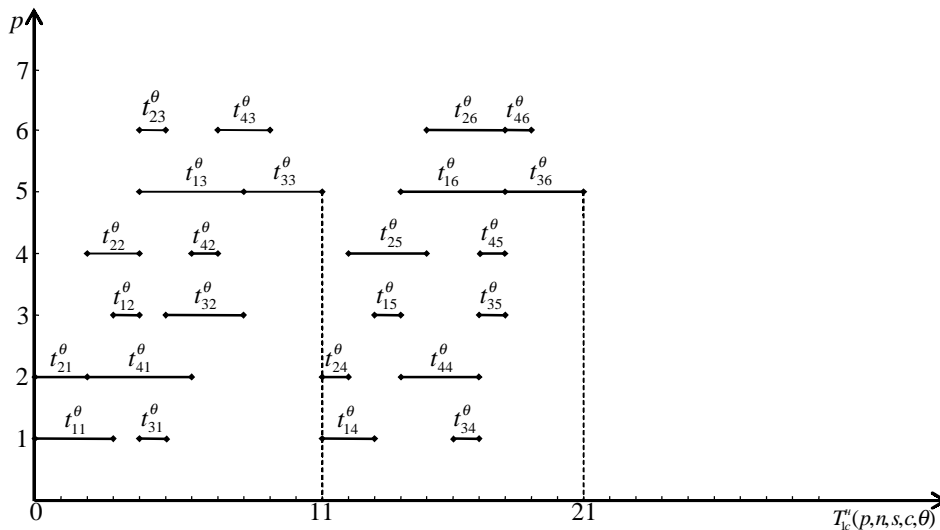


Рис. 2. Несовмещенные диаграммы Ганта при  $s = k \left\lceil \frac{p}{c} \right\rceil$ ,  $k > 1$

Источник: авторская разработка.

В этом случае выполним разбиение всех блоков на *k* групп по  $\left\lceil \frac{p}{c} \right\rceil$  блоков в каждой. Тогда матрица времен выполнения блоков структурированного PR с учетом дополнительных системных расходов  $\theta$ , связанных с организацией конвейерного режима использования блоков множеством

взаимодействующих конкурирующих процессов при распределенной обработке  $T^\theta = [t_{ij}^\theta]$ ,  $i = \overline{1, n}$ ,  $j = \overline{1, s}$ , разобьется на  $k$  подматриц  $T_\varphi^\theta$  размерностью  $n \times \left\lceil \frac{p}{c} \right\rceil$  каждая, где  $\varphi = \overline{1, k}$ .

Из анализа диаграмм Ганта на рис. 2 видно, что каждая из диаграмм отображает во времени выполнение очередных  $\left\lceil \frac{p}{c} \right\rceil$  блоков программного ресурса на  $c \left\lceil \frac{p}{c} \right\rceil$  процессорах всеми  $n$  процессами, причем при  $s > \left\lceil \frac{p}{c} \right\rceil$  непрерывность выполнения блоков структурированного программного

ресурса может нарушиться при переходе от  $\varphi$ -й группы блоков к  $(\varphi + 1)$ -й,  $\varphi = \overline{1, k-1}$ , а внутри каждой из групп непрерывное выполнение блоков каждого процесса сохраняется.

Для дальнейшего исследования, как и при достаточном числе процессоров, все множество процессов разобьем на подмножества, причем каждое  $q$ -е подмножество,  $q = \overline{1, c}$ , будет состоять из  $m$  процессов с номерами  $i = c(l-1) + q$ ,  $l = \overline{1, m}$ , которые будут выполняться на процессорах с номерами  $(c(j-1) + q)$ ,  $j = \overline{1, \left\lceil \frac{p}{c} \right\rceil}$ . Введем следующие обозначения:

- $t_{ij}^{\varphi, q}$  – время выполнения в  $\varphi$ -й группе блоков  $i$ -м процессом из  $q$ -го подмножества процессов  $j$ -го блока с учетом параметра  $\theta$  :

$$t_{ij}^{\varphi, q} = t_{c(i-1)+q, (\varphi-1)\left\lceil \frac{p}{c} \right\rceil + j}^\theta, \quad \varphi = \overline{1, k}, \quad q = \overline{1, c}, \quad i = \overline{1, m}, \quad j = \overline{1, \left\lceil \frac{p}{c} \right\rceil};$$

- $T_q^\varphi$  – время выполнения в  $\varphi$ -й группе блоков  $q$ -го подмножества процессов:

$$T_q^\varphi = \sum_{i=1}^{m-1} \max_{1 \leq u \leq \left\lceil \frac{p}{c} \right\rceil} \left[ \sum_{j=1}^u t_{c(i-1)+q, (\varphi-1)\left\lceil \frac{p}{c} \right\rceil + j}^\theta - \sum_{j=1}^{u-1} t_{ci+q, (\varphi-1)\left\lceil \frac{p}{c} \right\rceil + j}^\theta \right] +$$

$$+ \sum_{j=1}^{\left\lceil \frac{p}{c} \right\rceil} t_{c(m-1)+q, (\varphi-1)\left\lceil \frac{p}{c} \right\rceil + j}^\theta, \quad \varphi = \overline{1, k}, \quad q = \overline{1, c};$$

- $T_\varphi^\theta$  – общее время выполнения  $\varphi$ -й группы блоков всеми  $n$  процессами на  $c \left\lceil \frac{p}{c} \right\rceil$  процессорах с учетом параметра  $\theta$  :

$$T_\varphi^\theta = \max_{1 \leq q \leq c} \left( \sum_{i=1}^{m-1} \max_{1 \leq u \leq \left\lceil \frac{p}{c} \right\rceil} \left[ \sum_{j=1}^u t_{c(i-1)+q, (\varphi-1)\left\lceil \frac{p}{c} \right\rceil + j}^\theta - \sum_{j=1}^{u-1} t_{ci+q, (\varphi-1)\left\lceil \frac{p}{c} \right\rceil + j}^\theta \right] + \right.$$

$$\left. + \sum_{j=1}^{\left\lceil \frac{p}{c} \right\rceil} t_{c(m-1)+q, (\varphi-1)\left\lceil \frac{p}{c} \right\rceil + j}^\theta \right), \quad \varphi = \overline{1, k};$$



- $E_{ij}^{\varphi,q}$  – время завершения обработки в  $\varphi$ -й группе блоков  $i$ -м процессом из  $q$ -го подмножества  $j$ -го блока:

$$E_{ij}^{\varphi,q} = E_{c(i-1)+q,j}^{\varphi} = \sum_{\mu=1}^{i-1} \max_{1 \leq u \leq \left\lceil \frac{p}{c} \right\rceil} \left[ \sum_{w=1}^u t^{\theta}_{c(\mu-1)+q,(\varphi-1)\left\lceil \frac{p}{c} \right\rceil+w} - \sum_{w=1}^{u-1} t^{\theta}_{c\mu+q,(\varphi-1)\left\lceil \frac{p}{c} \right\rceil+w} \right] + \sum_{w=1}^j t^{\theta}_{c(i-1)+q,(\varphi-1)\left\lceil \frac{p}{c} \right\rceil+w}, \quad \varphi = \overline{1,k}, \quad q = \overline{1,c}, \quad i = \overline{1,m}, \quad j = \overline{1, \left\lceil \frac{p}{c} \right\rceil}.$$

Анализ диаграмм Ганта на рис. 2 свидетельствует, что минимальное общее время выполнения *неоднородных* распределенных процессов, конкурирующих за использование  $c$  копий структурированного программного ресурса в случае  $s > \left\lceil \frac{p}{c} \right\rceil$  и  $s = k \left\lceil \frac{p}{c} \right\rceil, k > 1$ , определяется как сумма длин составляющих диаграмм, т.е.

$$T_{1c}^H(p, n, s, c, \theta) = T_{1c}^H\left(p, n, k \left\lceil \frac{p}{c} \right\rceil, c, \theta\right) = \sum_{\varphi=1}^k T_{\varphi}^{\theta} = \sum_{\varphi=1}^k \max_{1 \leq q \leq c} T_q^{\varphi}.$$

Время  $T_{1c}^H\left(p, n, k \left\lceil \frac{p}{c} \right\rceil, c, \theta\right)$  можно существенно сократить, если воспользоваться совмещением последовательных диаграмм Ганта по оси времени справа налево. В результате совмещения получим:

$$T_{1c}^H\left(p, n, k \left\lceil \frac{p}{c} \right\rceil, c, \theta\right) = \sum_{\varphi=1}^k T_{\varphi}^{\theta} - \sum_{\varphi=1}^{k-1} \delta_{\varphi},$$

где  $\delta_{\varphi} = \min(\delta_{\varphi}', \delta_{\varphi}'')$ ,  $\varphi = \overline{1, k-1}$  – длина отрезка максимально возможного совмещения двух последовательных диаграмм Ганта по оси времени (рис. 3).

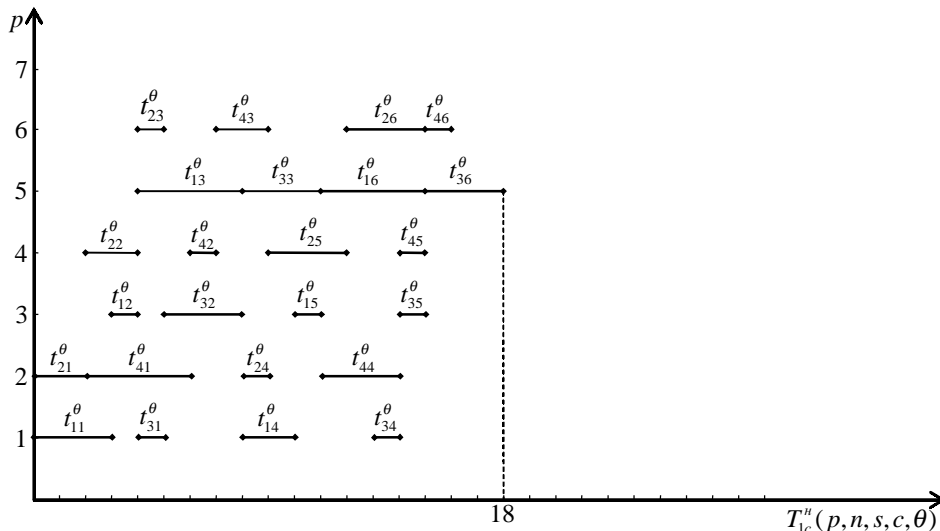


Рис. 3. Совмещенные диаграммы Ганта при  $s = k \left\lceil \frac{p}{c} \right\rceil, k > 1$

Источник: авторская разработка.

Здесь  $\delta_\varphi'$  – отрезок возможного совмещения по оси времени, который представляет собой разность между моментом начала выполнения  $j$ -го блока первым процессом  $q$ -го подмножества процессов в  $(\varphi + 1)$ -й группе блоков и моментом завершения выполнения  $j$ -го блока последним процессом  $q$ -го подмножества процессов в  $\varphi$ -й группе блоков, т.е.

$$\begin{aligned} \delta_\varphi' &= \min_{1 \leq q \leq c} \left( T_\varphi^\theta - T_q^\varphi + \min_{1 \leq j \leq \left\lfloor \frac{p}{c} \right\rfloor} \left[ \sum_{w=j+1}^{\left\lfloor \frac{p}{c} \right\rfloor} t^\theta_{c(m-1)+q, (\varphi-1) \left\lfloor \frac{p}{c} \right\rfloor + w} + \sum_{w=1}^{j-1} t^\theta_{q, \varphi \left\lfloor \frac{p}{c} \right\rfloor + w} \right] \right) = \\ &= \min_{1 \leq q \leq c} \left( \min_{1 \leq j \leq \left\lfloor \frac{p}{c} \right\rfloor} \left[ T_\varphi^\theta - E_{c(m-1)+q, j}^\varphi + \sum_{w=1}^{j-1} t^\theta_{q, \varphi \left\lfloor \frac{p}{c} \right\rfloor + w} \right] \right), \quad \varphi = \overline{1, k-1}. \end{aligned}$$

Значение  $\delta_\varphi''$  представляет собой разность между началом выполнения первого блока  $i$ -м процессом в  $(\varphi + 1)$ -й группе блоков и моментом завершения выполнения последнего блока  $i$ -м процессом в  $\varphi$ -й группе блоков, т.е.

$$\begin{aligned} \delta_\varphi'' &= \min_{1 \leq q \leq c} \left( \min_{1 \leq i \leq m} \left[ T_\varphi^\theta - E_{i, \left\lfloor \frac{p}{c} \right\rfloor}^{q, \varphi} + E_{i, 1}^{q, \varphi+1} - t_{i, 1}^{q, \varphi+1} \right] \right) = \\ &= \min_{1 \leq q \leq c} \left( \min_{1 \leq i \leq m} \left[ T_\varphi^\theta - E_{c(i-1)+q, \left\lfloor \frac{p}{c} \right\rfloor}^\varphi + E_{c(i-1)+q, 1}^{\varphi+1} - t_{c(i-1)+q, \left\lfloor \frac{p}{c} \right\rfloor + 1}^\theta \right] \right), \quad \varphi = \overline{1, k-1}. \end{aligned}$$

В случае, когда  $s = k \left\lfloor \frac{p}{c} \right\rfloor + r$ ,  $k \geq 1$ ,  $1 \leq r < \left\lfloor \frac{p}{c} \right\rfloor$  (рис. 4), все множество из  $s$  блоков разбивается на  $(k + 1)$ -ую группу по  $\left\lfloor \frac{p}{c} \right\rfloor$  блока(ов) в каждой, за исключением последней, в которой будет только  $r$  блока(ов) PR. Тогда время выполнения  $n$  неоднородных распределенных конкурирующих процессов, использующих  $c$  копий структурированного на  $s$  блока(ов) программного ресурса в вычислительной системе с  $p$  процессорами в первом синхронном режиме, будет определяться по формулам (рис. 5):

$$\begin{aligned} T_{1c}^n(p, n, s, c, \theta) &= T_{1c}^n \left( p, n, k \left\lfloor \frac{p}{c} \right\rfloor + r, c, \theta \right) = \sum_{\varphi=1}^k T_\varphi^\theta + T_{k+1}^\theta - \sum_{\varphi=1}^{k-1} \delta_\varphi - \delta_k = \\ &= \sum_{\varphi=1}^k \max_{1 \leq q \leq c} T_q^\varphi + \max_{1 \leq q \leq c} T_q^{k+1} - \sum_{\varphi=1}^{k-1} \delta_\varphi - \delta_k. \end{aligned}$$

Здесь:

- $T_{k+1}^\theta$  – время выполнения  $(k + 1)$ -й группы из  $r$  блоков всеми  $n$  процессами:

$$T_{k+1}^\theta = \max_{1 \leq q \leq c} \left( \sum_{i=1}^{m-1} \max_{1 \leq u \leq r} \left[ \sum_{j=1}^u t^\theta_{c(i-1)+q, k \left\lfloor \frac{p}{c} \right\rfloor + j} - \sum_{j=1}^{u-1} t^\theta_{ci+q, k \left\lfloor \frac{p}{c} \right\rfloor + j} \right] + \sum_{j=1}^r t^\theta_{c(m-1)+q, k \left\lfloor \frac{p}{c} \right\rfloor + j} \right) = \max_{1 \leq q \leq c} T_q^{k+1};$$

- $T_q^{k+1}$  – время выполнения  $q$ -го подмножества из  $m$  процессов в  $(k+1)$ -й группе блоков:

$$T_q^{k+1} = \sum_{i=1}^{m-1} \max_{1 \leq u \leq r} \left[ \sum_{j=1}^u t^{i-1+q,k} \left[ \frac{p}{c} \right]_{+j} - \sum_{j=1}^{u-1} t^{i+q,k} \left[ \frac{p}{c} \right]_{+j} \right] + \sum_{j=1}^r t^{i+(m-1)+q,k} \left[ \frac{p}{c} \right]_{+j}, \quad q = \overline{1, c};$$

- $\delta_k$  – величина максимально допустимого совмещения по оси времени  $k$ -й и  $(k+1)$ -й диаграмм:

$$\delta_k = \min(\delta_k', \delta_k'').$$

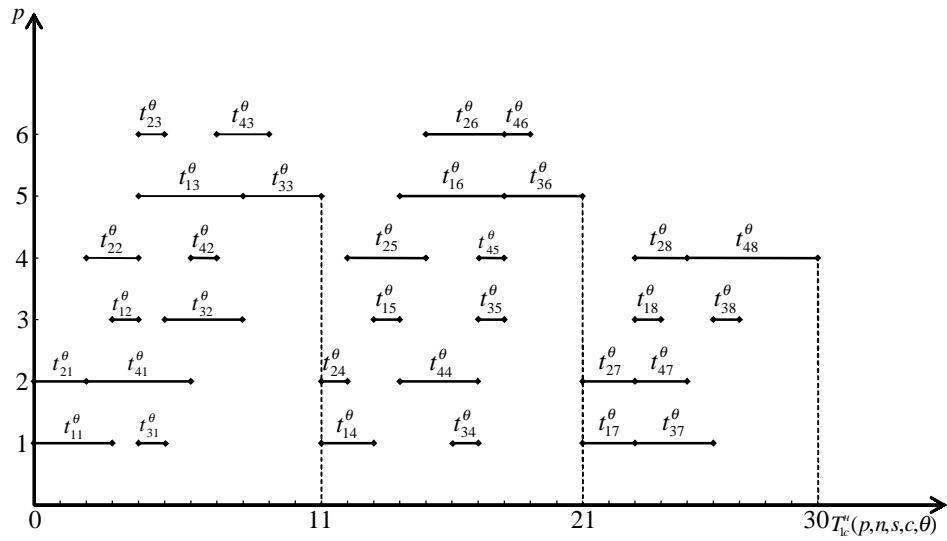


Рис. 4. Несовмещенные диаграммы Ганта при  $s = k \left[ \frac{p}{c} \right] + r, k \geq 1, 1 \leq r < \left[ \frac{p}{c} \right]$

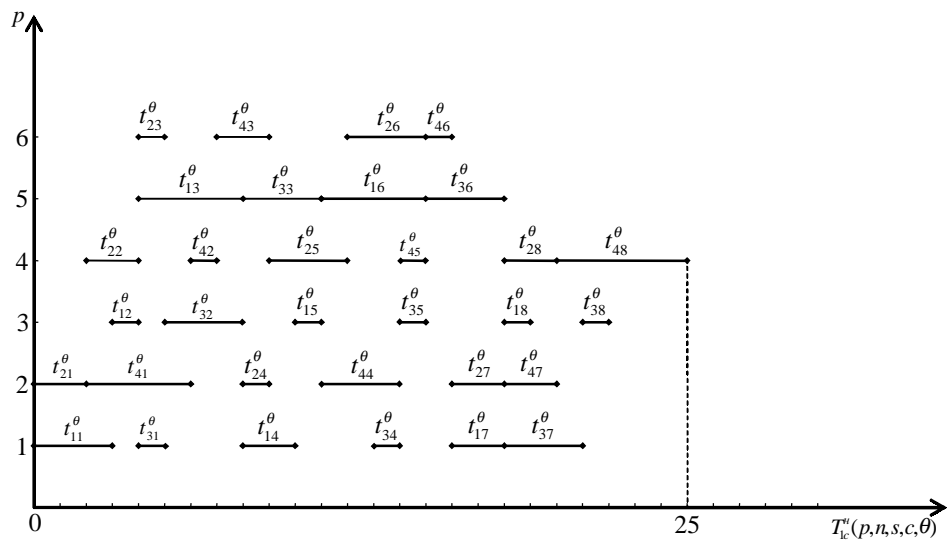


Рис. 5. Совмещенные диаграммы Ганта при  $s = k \left[ \frac{p}{c} \right] + r, k \geq 1, 1 \leq r < \left[ \frac{p}{c} \right]$

Отрезки возможного совмещения по оси времени  $\delta_k'$  и  $\delta_k''$  будут определяться по формулам:

$$\begin{aligned} \delta_k' &= \min_{1 \leq q \leq c} \left( T_k^\theta - T_q^k + \min_{1 \leq j \leq r} \left[ \sum_{w=j+1}^{\lfloor p/c \rfloor} t_{c(m-1)+q,(k-1)\lfloor \frac{p}{c} \rfloor + w}^\theta + \sum_{w=1}^{j-1} t_{q,k\lfloor \frac{p}{c} \rfloor + w}^\theta \right] \right) = \\ &= \min_{1 \leq q \leq c} \left( \min_{1 \leq j \leq r} \left[ T_k^\theta - E_{c(m-1)+q,j}^k + \sum_{w=1}^{j-1} t_{q,k\lfloor \frac{p}{c} \rfloor + w}^\theta \right] \right); \\ \delta_k'' &= \min_{1 \leq q \leq c} \left( \min_{1 \leq i \leq m} \left[ T_k^\theta - E_{i,\lfloor \frac{p}{c} \rfloor}^{\theta,k} + E_{i1}^{\theta,k+1} - t_{i1}^{q,k+1} \right] \right) = \\ &= \min_{1 \leq q \leq c} \left( \min_{1 \leq i \leq m} \left[ T_k^\theta - E_{c(i-1)+q}^k + E_{c(i-1)+q,1}^{k+1} - t_{c(i-1)+q,k\lfloor \frac{p}{c} \rfloor + 1}^\theta \right] \right). \end{aligned}$$

Здесь

$$E_{ij}^{q,k+1} = E_{c(i-1)+q,j}^{k+1} = \sum_{\mu=1}^{i-1} \max_{1 \leq u \leq r} \left[ \sum_{w=1}^u t_{c(\mu-1)+q,(k+1)r+w}^\theta - \sum_{w=1}^{u-1} t_{c\mu+q,(k+1)r+w}^\theta \right] + \sum_{w=1}^j t_{c(i-1)+q,(k+1)r+w}^\theta,$$

$$q = \overline{1,c}, \quad i = \overline{1,m}, \quad j = \overline{1,r}.$$

**Время реализации однородных конкурирующих процессов при ограниченном числе копий программного ресурса.** Согласно определению 2 для *однородных* систем распределенных конкурирующих процессов, времена выполнения  $Q_j$ -го блока каждым из  $i$ -х процессов равны, т.е.  $t_{ij}^\theta = t_j^\theta$ ,  $i = \overline{1,n}$ ,  $j = \overline{1,s}$ .

Через  $T_{1c}^\theta(p,n,s,c,\theta)$  обозначим минимальное общее время выполнения в первом синхронном режиме на  $p$  процессорах  $n$  однородных распределенных конкурирующих процессов, использующих  $c$  копий структурированного на  $s$  блоков программного ресурса с учетом дополнительных системных расходов  $\theta > 0$  (рис. 6).

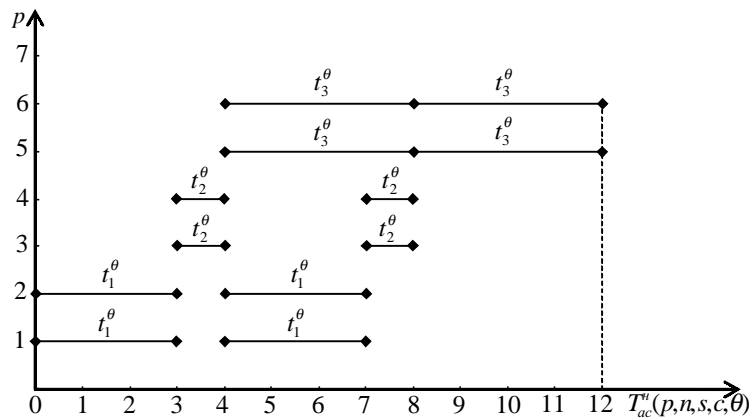


Рис. 6. Первый синхронный режим выполнения однородных распределенных процессов при достаточном числе процессоров

Источник: авторская разработка.

Из диаграммы на рис. 6 видно, что в случае достаточного числа процессоров, т.е. когда  $2 \leq s \leq \left\lceil \frac{p}{c} \right\rceil$ , вычисление общего времени выполнения  $n = mc$ ,  $m \geq 2$ , однородных распределенных процессов, конкурирующих за использование ограниченного числа копий программного ресурса  $2 \leq c \leq p$ , сводится к нахождению общего времени выполнения  $m$  процессов на  $\left\lceil \frac{p}{c} \right\rceil$  процессорах, конкурирующих за использование одной копии программного ресурса. Обозначим длительность выполнения всего программного ресурса каждым из процессов через  $T_s^\theta = \sum_{j=1}^s t_j^\theta$ , тогда

$$T_{1c}^\theta(p, n, s, c, \theta) = T_{1c}^\theta\left(\left\lceil \frac{p}{c} \right\rceil, m, s, 1, \theta\right) = \max_{1 \leq q \leq c} \left( \sum_{i=1}^{m-1} \max_{1 \leq u \leq s} \left[ \sum_{j=1}^u t_j^\theta - \sum_{j=1}^{u-1} t_j^\theta \right] + \sum_{j=1}^s t_j^\theta \right) =$$

$$= \sum_{i=1}^{m-1} \max_{1 \leq u \leq s} \left[ \sum_{j=1}^u t_j^\theta - \sum_{j=1}^{u-1} t_j^\theta \right] + \sum_{j=1}^s t_j^\theta = (m-1) \max_{1 \leq j \leq s} t_j^\theta + T_s^\theta. \quad (1)$$

Далее рассмотрим случай, когда  $s = k \left\lceil \frac{p}{c} \right\rceil$ ,  $k > 1$  (рис. 7).

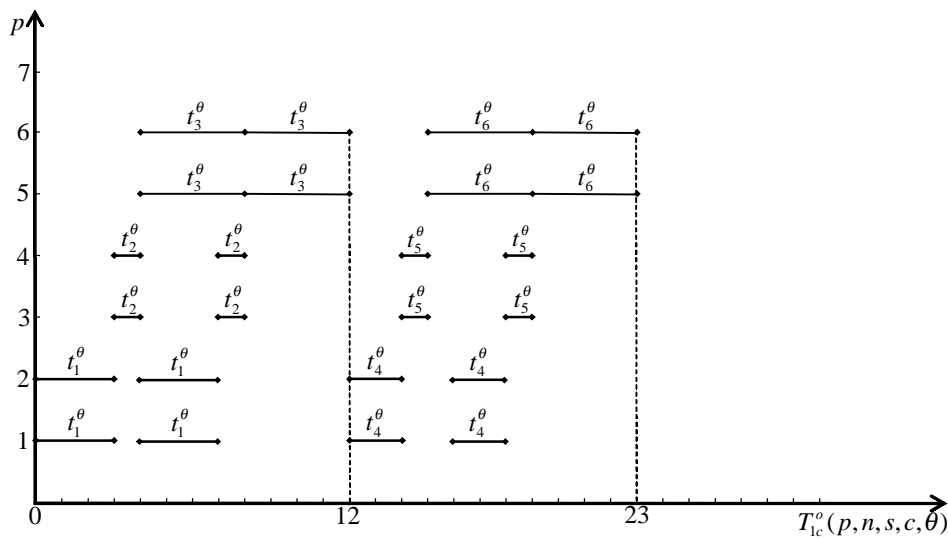


Рис. 7. Несовмещенные диаграммы Ганта однородных процессов при  $s = k \left\lceil \frac{p}{c} \right\rceil$ ,  $k > 1$

Источник: авторская разработка.

Для однородных процессов формулы для вычисления  $t_{ij}^{\theta,q}$ ,  $T_\varphi^\theta$  и  $E_{ij}^{\theta,q}$  с учетом того, что  $t_{ij}^\theta = t_j^\theta$ ,  $i = \overline{1, n}$ ,  $j = \overline{1, s}$ , будут иметь вид:

- $t_j^\varphi = t_{(\varphi-1)\left[\frac{p}{c}\right]+j}^\theta$  – время выполнения каждого из  $\varphi$ -х  $\left[\frac{p}{c}\right]$  блоков исходной последователь-

ности  $t_1^\theta, t_2^\theta, \dots, t_s^\theta$  с учетом параметра  $\theta$ ,  $\varphi = \overline{1, k}$ ,  $j = \overline{1, \left[\frac{p}{c}\right]}$ ;

- $T_\varphi^\theta$  – общее время выполнения  $\varphi$ -й группы блоков всеми  $n$  процессами с учетом параметра  $\theta$ :

$$T_\varphi^\theta = (m-1) \max_{1 \leq j \leq \left[\frac{p}{c}\right]} t_{(\varphi-1)\left[\frac{p}{c}\right]+j}^\theta + \sum_{j=1}^{\left[\frac{p}{c}\right]} t_{(\varphi-1)\left[\frac{p}{c}\right]+j}^\theta, \varphi = \overline{1, k};$$

- $E_{ij}^\varphi = E_{i,(\varphi-1)\left[\frac{p}{c}\right]+j}^\theta = (i-1) \max_{1 \leq j \leq \left[\frac{p}{c}\right]} t_{(\varphi-1)\left[\frac{p}{c}\right]+j}^\theta + \sum_{w=1}^j t_{(\varphi-1)\left[\frac{p}{c}\right]+w}^\theta$  – время завершения выполнения

в  $\varphi$ -й группе блоков всеми  $m$  процессами  $j$ -го блока, где  $\varphi = \overline{1, k}$ ,  $i = \overline{1, m}$ ,  $j = \overline{1, \left[\frac{p}{c}\right]}$ .

В случае, когда  $s = k \left[\frac{p}{c}\right]$ ,  $k > 1$ , минимальное время выполнения  $n$  однородных распределенных конкурирующих процессов, использующих  $c$  копий структурированного на  $s$  блоков программного ресурса с учетом дополнительных системных расходов  $\theta > 0$ , будет определяться как сумма длин составляющих диаграмм Ганта с учетом их суммарного максимально допустимого совмещения по оси времени (рис. 8), т.е.

$$T_{1c}^o \left( p, n, k \left[\frac{p}{c}\right], c, \theta \right) = \sum_{\varphi=1}^k T_\varphi^\theta - \sum_{\varphi=1}^{k-1} \min(\omega_\varphi', \omega_\varphi'').$$

Здесь величины  $\omega_\varphi'$  и  $\omega_\varphi''$  представляют собой временные отрезки максимально допустимого совмещения процессов  $\varphi$ -й и  $(\varphi+1)$ -й групп блоков:

- $\omega_\varphi'$  – отрезок возможного совмещения по оси времени, который представляет собой разность между моментом начала выполнения  $j$ -го блока первым процессом в  $(\varphi+1)$ -й группе блоков и моментом завершения выполнения  $j$ -го блока последним процессом в  $\varphi$ -й группе блоков:

$$\omega_\varphi' = \min_{1 \leq j \leq \left[\frac{p}{c}\right]} \left[ \sum_{w=j+1}^{\left[\frac{p}{c}\right]} t_{(\varphi-1)\left[\frac{p}{c}\right]+w}^\theta + \sum_{w=1}^{j-1} t_{\varphi\left[\frac{p}{c}\right]+w}^\theta \right], \varphi = \overline{1, k-1};$$

- $\omega_\varphi''$  – представляет собой разность между началом выполнения первого блока  $i$ -м процессом в  $(\varphi+1)$ -й группе блоков и моментом завершения выполнения последнего блока  $i$ -м процессом в  $\varphi$ -й группе блоков:

$$\omega_\varphi'' = \min_{1 \leq i \leq m} \left[ T_\varphi^\theta - E_{i, \left[\frac{p}{c}\right]}^\varphi + E_{i, 1}^{\varphi+1} - t_{\varphi\left[\frac{p}{c}\right]+1}^\theta \right], \varphi = \overline{1, k-1}.$$

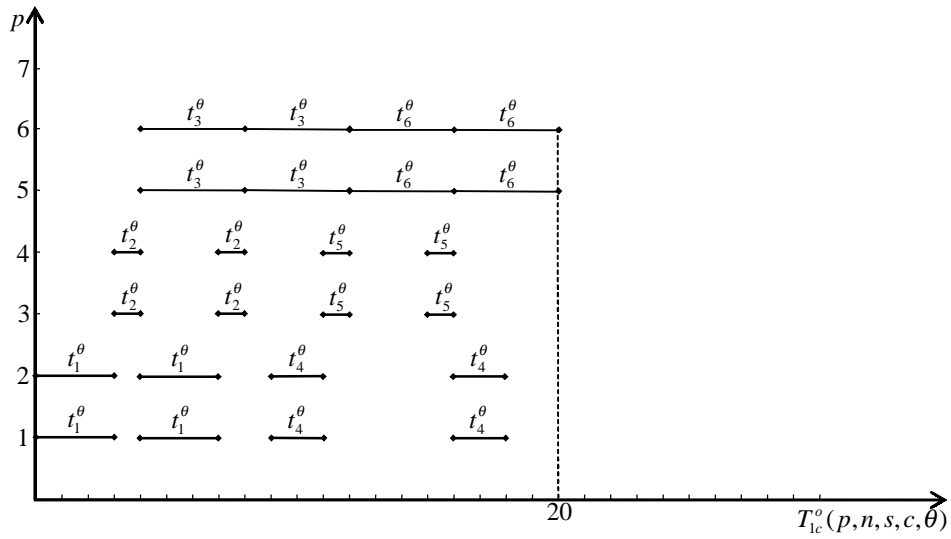


Рис. 8. Совмещенные диаграммы Ганта однородных процессов при  $s = k \left\lceil \frac{p}{c} \right\rceil$ ,  $k > 1$

Источник: авторская разработка.

Так как

$$T_{\varphi}^{\theta} = (m-1) \max_{1 \leq j \leq \lceil p/c \rceil} t_{(\varphi-1)\lceil p/c \rceil + j}^{\theta} + \sum_{j=1}^{\lceil p/c \rceil} t_{(\varphi-1)\lceil p/c \rceil + j}^{\theta},$$

$$E_{i, \lceil p/c \rceil}^{\varphi} = E_{i, \varphi \lceil p/c \rceil}^{\theta} = (i-1) \max_{1 \leq j \leq \lceil p/c \rceil} t_{(\varphi-1)\lceil p/c \rceil + j}^{\theta} + \sum_{w=1}^{\lceil p/c \rceil} t_{(\varphi-1)\lceil p/c \rceil + w}^{\theta},$$

$$E_{i, \lceil p/c \rceil + 1}^{\varphi+1} = E_{i, \varphi \lceil p/c \rceil + 1}^{\theta} = (i-1) \max_{1 \leq j \leq \lceil p/c \rceil} t_{\varphi \lceil p/c \rceil + j}^{\theta} + t_{\varphi \lceil p/c \rceil + 1}^{\theta},$$

то

$$\omega_{\varphi}'' = \min_{1 \leq i \leq m} \left[ T_{\varphi}^{\theta} - E_{i, \lceil p/c \rceil}^{\varphi} + E_{i, \lceil p/c \rceil + 1}^{\varphi+1} - t_{\varphi \lceil p/c \rceil + 1}^{\theta} \right] =$$

$$= \min_{1 \leq i \leq m} \left[ (m-1) \max_{1 \leq j \leq \lceil p/c \rceil} t_{(\varphi-1)\lceil p/c \rceil + j}^{\theta} + \sum_{j=1}^{\lceil p/c \rceil} t_{(\varphi-1)\lceil p/c \rceil + j}^{\theta} - (i-1) \max_{1 \leq j \leq \lceil p/c \rceil} t_{(\varphi-1)\lceil p/c \rceil + j}^{\theta} - \sum_{w=1}^{\lceil p/c \rceil} t_{(\varphi-1)\lceil p/c \rceil + w}^{\theta} + \right. \\ \left. + (i-1) \max_{1 \leq j \leq \lceil p/c \rceil} t_{\varphi \lceil p/c \rceil + j}^{\theta} + t_{\varphi \lceil p/c \rceil + 1}^{\theta} - t_{\varphi \lceil p/c \rceil + 1}^{\theta} \right] =$$

$$= \min_{1 \leq i \leq m} \left[ (m-i) \max_{1 \leq j \leq \lceil p/c \rceil} t_{(\varphi-1)\lceil p/c \rceil + j}^{\theta} + (i-1) \max_{1 \leq j \leq \lceil p/c \rceil} t_{\varphi \lceil p/c \rceil + j}^{\theta} \right], \quad \varphi = \overline{1, k-1}.$$

Можно заметить, что в случае, когда  $\max_{1 \leq j \leq [p/c]} t_{\varphi[\frac{p}{c}] + j}^\theta < \max_{1 \leq j \leq [p/c]} t_{(\varphi-1)[\frac{p}{c}] + j}^\theta$ , минимум последнего

выражения достигается при  $i = m$ , а в случае, когда  $\max_{1 \leq j \leq [p/c]} t_{\varphi[\frac{p}{c}] + j}^\theta > \max_{1 \leq j \leq [p/c]} t_{(\varphi-1)[\frac{p}{c}] + j}^\theta$ , минимум

достигается при  $i = 1$ . Если же  $\max_{1 \leq j \leq [p/c]} t_{\varphi[\frac{p}{c}] + j}^\theta = \max_{1 \leq j \leq [p/c]} t_{(\varphi-1)[\frac{p}{c}] + j}^\theta$ , то при любых значениях  $i$ ,

$i = \overline{1, m}$ , выражение будет принимать одно и то же значение. Учитывая это, получим:

$$\omega_\varphi'' = \min \left[ (m-1) \max_{1 \leq j \leq [p/c]} t_{(\varphi-1)[\frac{p}{c}] + j}^\theta, (m-1) \max_{1 \leq j \leq [p/c]} t_{\varphi[\frac{p}{c}] + j}^\theta \right] =$$

$$= (m-1) \min \left[ \max_{1 \leq j \leq [p/c]} t_{(\varphi-1)[\frac{p}{c}] + j}^\theta, \max_{1 \leq j \leq [p/c]} t_{\varphi[\frac{p}{c}] + j}^\theta \right], \varphi = \overline{1, k-1}.$$

В случае, когда  $s = k \left[ \frac{p}{c} \right] + r, k \geq 1, 1 \leq r < \left[ \frac{p}{c} \right]$  (рис. 9), минимальное общее время выполнения  $n$  однородных распределенных конкурирующих процессов, использующих  $c$  копий структурированного программного ресурса, с учетом дополнительных системных расходов определяется по формуле:

$$T_{1c}^o(p, n, s, c, \theta) = T_{1c}^o \left( \left[ \frac{p}{c} \right], m, k \left[ \frac{p}{c} \right] + r, 1, \theta \right) = \sum_{\varphi=1}^k T_\varphi^\theta + T_{k+1}^\theta - \sum_{\varphi=1}^{k-1} \omega_\varphi - \omega_k,$$

где  $T_{k+1}^\theta$  – время выполнения  $(k+1)$ -й группы из  $r$  блоков всеми  $m$  процессами, а  $\omega_k$  – величина максимально допустимого совмещения по оси времени  $k$ -й и  $(k+1)$ -й диаграмм.

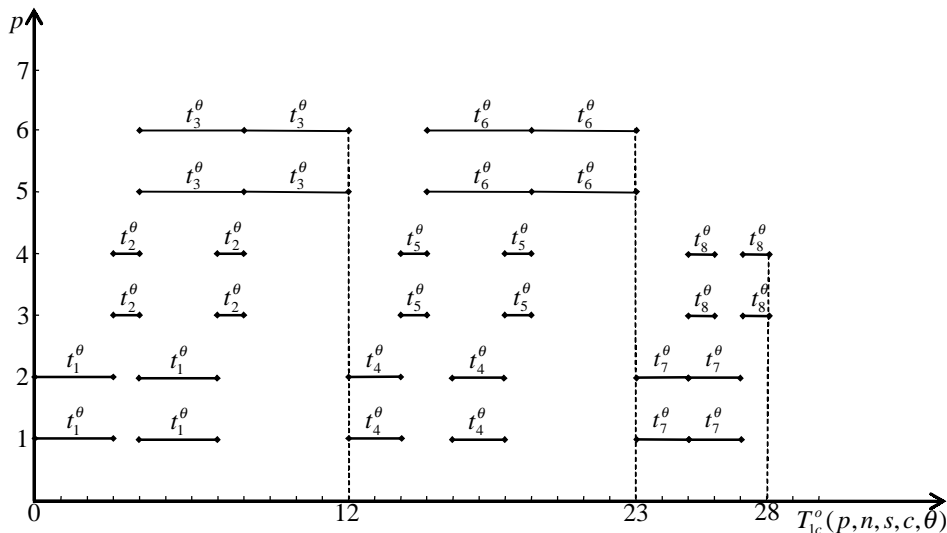


Рис. 9. Несовмещенные диаграммы Ганта однородных процессов при  $s = k \left[ \frac{p}{c} \right] + r, k \geq 1, 1 \leq r < \left[ \frac{p}{c} \right]$

Источник: авторская разработка.



Значения  $T_{k+1}^\theta$  и  $\omega_k$  определяются по следующим формулам:

$$T_{k+1}^\theta = (m-1) \max_{1 \leq j \leq r} t_{k \lfloor \frac{p}{c} \rfloor + j}^\theta + \sum_{j=1}^r t_{k \lfloor \frac{p}{c} \rfloor + j}^\theta; \quad \omega_k = \min(\omega_k', \omega_k'').$$

Здесь

$$\omega_k' = \min_{1 \leq j \leq r} \left[ \sum_{w=j+1}^{\lfloor p/c \rfloor} t_{(k-1) \lfloor \frac{p}{c} \rfloor + w}^\theta + \sum_{w=1}^{j-1} t_{k \lfloor \frac{p}{c} \rfloor + w}^\theta \right], \quad \omega_k'' = (m-1) \min \left[ \max_{1 \leq j \leq \lfloor p/c \rfloor} t_{(k-1) \lfloor \frac{p}{c} \rfloor + j}^\theta, \max_{1 \leq j \leq r} t_{k \lfloor \frac{p}{c} \rfloor + j}^\theta \right].$$

Тогда  $\omega_2 = \min(\omega_2', \omega_2'') = 2$  и  $T_{1c}^\theta(7, 4, 8, 2, \theta) = T_{1c}^\theta(3, 2, 8, 1, \theta) = 23$  (рис. 10).

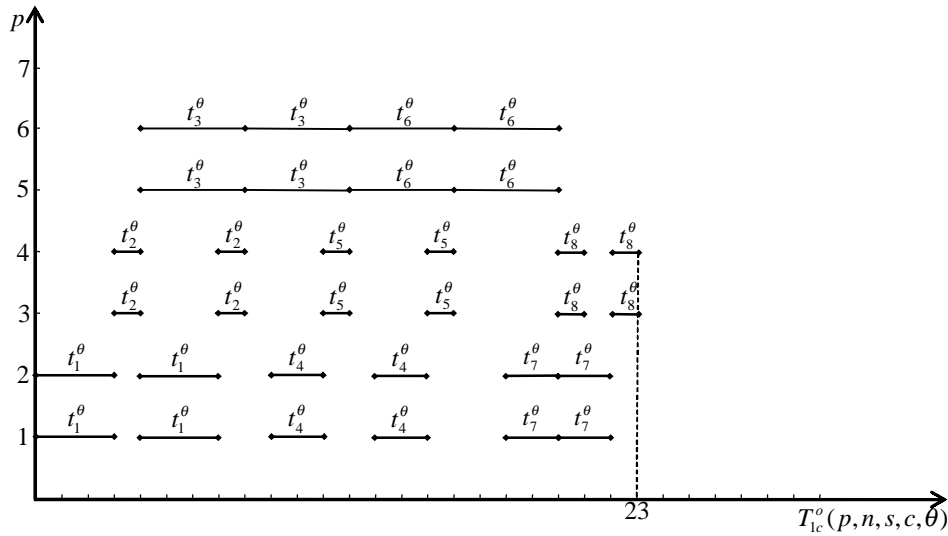


Рис. 10. Совмещенные диаграммы Ганта однородных процессов при  $s = k \lfloor \frac{p}{c} \rfloor + r$ ,  $k \geq 1$ ,  $1 \leq r < \lfloor \frac{p}{c} \rfloor$

Источник: авторская разработка.

**О п р е д е л е н и е 4.** Однородное структурирование программного ресурса называется **равномерным**, если  $t_1^\theta = t_2^\theta = \dots = t_s^\theta = t^\theta$ .

Имеет место

**Теорема.** Если взаимодействие процессов, процессоров и блоков структурированного программного ресурса подчинено условиям первого синхронного режима, то в случае равномерного структурирования для вычисления минимального общего времени выполнения распределенных конкурирующих процессов при ограниченном числе копий программного ресурса имеют место формулы:

$$T_{1c}^{pc}(p, n, s, c, \theta) = \begin{cases} (m+s-1)t^\theta, & \left\lfloor \frac{p}{c} \right\rfloor \geq \min(m, s), \\ \left( km + \left\lfloor \frac{p}{c} \right\rfloor - 1 \right) t^\theta, & \left\lfloor \frac{p}{c} \right\rfloor < \min(m, s), \quad s = k \left\lfloor \frac{p}{c} \right\rfloor, \quad k > 1, \\ ((k+1)m + r - 1)t^\theta, & \left\lfloor \frac{p}{c} \right\rfloor < \min(m, s), \quad s = k \left\lfloor \frac{p}{c} \right\rfloor + r, \quad k \geq 1, \quad 1 \leq r < \left\lfloor \frac{p}{c} \right\rfloor. \end{cases}$$

Доказательство. Рассмотрим случай, когда  $\left\lceil \frac{p}{c} \right\rceil \geq \min(m, s)$  (рис. 11).

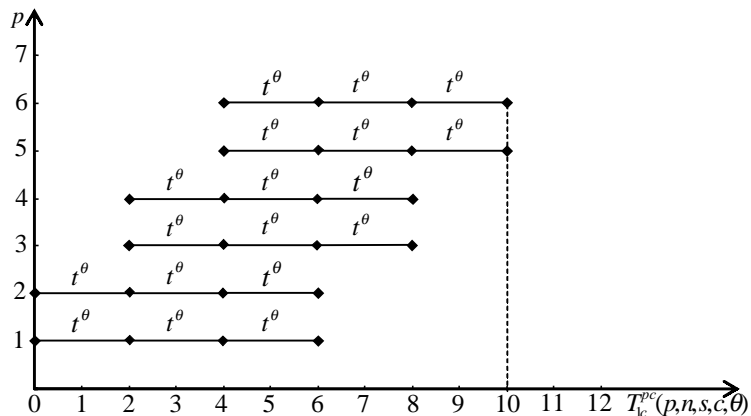


Рис. 11. Первый синхронный режим при равномерном структурировании PR

Источник: авторская разработка.

Для доказательства первой формулы теоремы воспользуемся первой формулой (1):

$$T_{lc}^{pc}(p, n, s, c, \theta) = (m-1) \max_{1 \leq j \leq s} t^\theta + \sum_{j=1}^s t^\theta = (m-1)t^\theta + st^\theta = (m+s-1)t^\theta.$$

Рассмотрим случай, когда  $s > \left\lceil \frac{p}{c} \right\rceil$ ,  $s = k \left\lceil \frac{p}{c} \right\rceil$ ,  $k > 1$  и  $\left\lceil \frac{p}{c} \right\rceil < \min(m, s)$  (рис. 12).

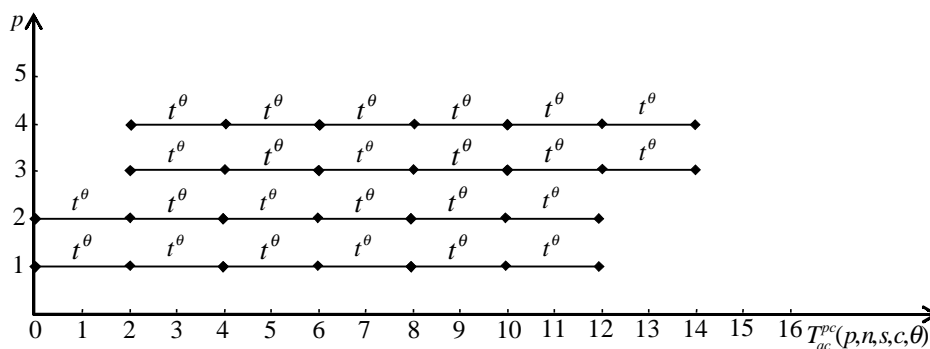


Рис. 12. Равномерное структурирование при  $s > \left\lceil \frac{p}{c} \right\rceil$ ,  $s = k \left\lceil \frac{p}{c} \right\rceil$ ,  $k > 1$ ,  $\left\lceil \frac{p}{c} \right\rceil < \min(m, s)$

Источник: авторская разработка.

Как показано на рис. 12, вычисление  $T_{1c}^{pc}(p, n, s, c, \theta)$  сводится к нахождению времени выполнения  $km$ -процессов на  $\left\lceil \frac{p}{c} \right\rceil$  процессорах, конкурирующих за использование одной копии структурированного на  $\left\lceil \frac{p}{c} \right\rceil$  блока(ов) программного ресурса:

$$T_{1c}^{pc}(p, n, s, c, \theta) = T_{1c}^{pc}\left(\left\lceil \frac{p}{c} \right\rceil, km, \left\lceil \frac{p}{c} \right\rceil, 1, \theta\right) = \sum_{i=1}^{km-1} \max_{1 \leq u \leq \lceil p/c \rceil} \left[ \sum_{j=1}^u t^\theta - \sum_{j=1}^{u-1} t^\theta \right] + \sum_{j=1}^{\lceil p/c \rceil} t^\theta = \left( km + \left\lceil \frac{p}{c} \right\rceil - 1 \right) t^\theta .$$

Рассмотрим далее случай, когда  $s = k \left\lceil \frac{p}{c} \right\rceil + r$ ,  $k \geq 1$ ,  $1 \leq r < \left\lceil \frac{p}{c} \right\rceil$  и  $\left\lceil \frac{p}{c} \right\rceil < \min(m, s)$  (рис. 13).

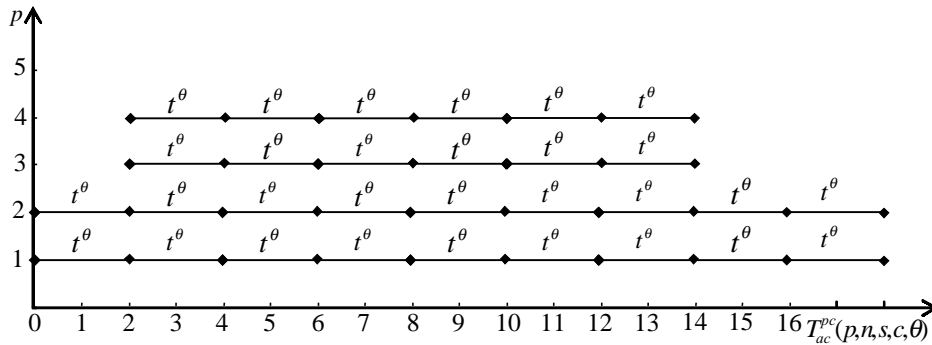


Рис. 13. Равномерное структурирование при  $s = k \left\lceil \frac{p}{c} \right\rceil + r$ ,  $k \geq 1$ ,  $1 \leq r < \left\lceil \frac{p}{c} \right\rceil$ ,  $\left\lceil \frac{p}{c} \right\rceil < \min(m, s)$

Источник: авторская разработка.

Вычисление  $T_{1c}^{pc}(p, n, s, c, \theta)$  сведется к нахождению времени выполнения  $(k+1)m$ -го процесса на  $cr$  процессорах, конкурирующих за использование одной копии структурированного на  $r$  блока(ов) программного ресурса:

$$T_{1c}^{pc}(p, n, s, c, \theta) = T_{1c}^{pc}(cr, (k+1)m, r, 1, \theta) = \sum_{i=1}^{(k+1)m-1} \max_{1 \leq u \leq r} \left[ \sum_{j=1}^u t^\theta - \sum_{j=1}^{u-1} t^\theta \right] + \sum_{j=1}^r t^\theta = ((k+1)m + r - 1) t^\theta .$$

. ⊗ .

**Заключение.** Представленные в данной статье результаты можно использовать при исследовании асинхронного и второго синхронного режимов взаимодействия процессов, процессоров и блоков структурированного программного ресурса при сравнительном анализе различных режимов распределенных вычислений, при математическом исследовании эффективности и оптимальности мультиконвейерной организации вычислений, при решении задач построения оптимальной компоновки блоков программного ресурса и нахождения оптимального числа процессоров, обеспечивающих директивное время выполнения заданных объемов вычислений и др.

Л и т е р а т у р а

- Бабичев С.Л., Коньков К.А.** 2019. *Распределенные системы*. Москва: Юрайт. 507 с.
- Емеличев В.А., Ковалев М.М., Кравцов М.К.** 1981. *Многогранники. Графы. Оптимизация*. Москва: Наука. 344 с.
- Капун В.В., Павлов П.А., Штепа В.Н.** 2019. Ресурсно-процессная модель энергоменеджмента локального объекта с несколькими источниками энергии. *Вестник Брестского государственного технического университета*. № 4. С. 86–91.
- Коваленко Н.С., Павлов П.А.** 2023. Математическая модель непрерывного обеспечения электрической энергией конечных потребителей. *Экономика, моделирование, прогнозирование*. Сборник научных трудов. Минск: НИЭИ Министерства экономики Республики Беларусь. Выпуск 17. С. 132–140.
- Коваленко Н.С., Павлов П.А., Овсец М.И.** 2012. Задачи оптимизации числа процессоров и построения оптимальной компоновки распределенных систем. *Вестник БГУ*. Серия 1: Физика. Математика. Информатика. № 1. С. 119–126.
- Косяков М.С.** 2014. *Введение в распределенные вычисления*. Санкт-Петербург: НИУ ИТМО. 155 с.
- Лазарев А.А.** 2019. *Теория расписаний. Методы и алгоритмы*. Москва: ИПУ РАН. 408 с.
- Павлов П.А.** 2014. Время реализации асинхронных параллельных процессов при макроконвейерной сосредоточенной обработке. *Проблемы информатики*. № 3. С. 37–52.
- Павлов П.А., Коваленко Н.С.** 2011. *Математическое моделирование параллельных процессов*. Germany: Lambert Academic Publishing. 246 с.
- Павлов П.А., Коваленко Н.С.** 2023. Ресурсно-процессная модель распределенных вычислений при ограниченном числе копий программного ресурса. *Развитие информатизации и государственной системы научно-технической информации (РИНТИ-2023)*. Доклады XXII Международной научно-технической конференции. Минск, 16 ноября 2023 г. ОИПИ НАН Беларуси. С. 205–210.
- Роби Р., Замора Дж.** 2022. *Параллельные и высокопроизводительные вычисления*. Пер. с англ. А.В. Логунова. Москва: ДМК Пресс. 704 с.
- Стин ван М., Таненбаум Э.С.** 2021. *Распределенные системы*. Пер. с англ. В.А. Яроцкого. Москва: ДМК Пресс. 584 с.
- Танаев В.С., Сотсков Ю.Н., Струсевич В.А.** 1989. *Теория расписаний. Многостадийные системы*. Москва: Наука. 327 с.
- Топорков В.В., Емельянов Д.М.** 2018. Модели, методы и алгоритмы планирования в грид и облачных вычислениях. *Вестник Московского энергетического института*. № 6. С. 75–86.
- Kovalenko N.S., Pavlov P.A.** 2012. Optimal grouping algorithm of identically distributed systems. *Programming and Computer Software*. Vol. 38. No 3. P. 143–150.
- Kovalenko N.S., Pavlov P.A., Ovseec M.I.** 2012. Asynchronous distributed computations with a limited number of copies of a structured program resource. *Cybernetics and systems analysis*. Vol. 48. No 1. P. 86–98.
- Pavlov P.A.** 2012. The optimality of software resources structuring through the pipeline distributed processing of competitive cooperative processes. *International Journal of Multimedia Technology (IJMT)*. Vol. 2. No 1. P. 5–10.
- Pavlov P.A.** 2023a. Asynchronous mode of distributed computing with a limited number of copies of a program resource. *Theoretical and practical perspectives of modern science*. Proceedings of the IV international scientific and practical conference. September 19–20, 2023, Stockholm, Sweden. P. 10–20.
- Pavlov P.A.** 2023b. Resource-process model of distributed computing with a limited number of software resource copies. *Challenger and problems of modern science*. Proceedings of the IX international scientific conference. September 7–8, 2023, London, Great Britain. P. 13–21.
- Zaiets N., Shtepa V., Pavlov P., Elperin I., Hachkovska M.** 2019. Development of a resource-process approach to increasing the efficiency of electrical equipment for food production. *Eastern-European Journal of Enterprise Technologies*. Vol. 5. No 8. P. 59–65.

Статья поступила 01.02.2024 г.



## СОДЕРЖАНИЕ

<b>ЭКОНОМИКА</b> .....	3
<b>Давыденко Е.Л., Сисаури Д.И.</b> Экономическое влияние процесса расширения интеграционного объединения на страны-участницы .....	3
<b>Давыденко Л.Н.</b> Методологические аспекты сотрудничества Беларуси и Китая в программе «Один пояс – один путь» .....	12
<b>Чан Х., Карачун И.А., Чжай Я.</b> Цифровая экономика: гетерогенность и эволюция в странах инициативы «Один пояс, один путь» и ЕАЭС .....	18
<b>Белоусов А.В.</b> Участие Беларуси в международных цепочках создания стоимости: анализ на основе данных ОЭСР .....	30
<b>Привалова Н.Н., Журавлева О.В.</b> Особенности регулирования рынка труда России в условиях пандемии и санкций .....	41
<b>Попова И.Г.</b> Разработка и совершенствование норм труда: отечественный и зарубежный опыт .....	48
<b>Давыденко Е.Л., Алисейко М.А.</b> Совершенствование оценки формирования экономики замкнутого цикла в Республике Беларусь в контексте мирового устойчивого развития .....	56
<b>Догиль Л.Ф.</b> Международные вызовы перехода на современные технологии менеджмента качества в бизнесе .....	65
<b>Бурачевский А.А., Жук И.Н.</b> Интеграция союзного государства в сфере АПК: результаты, проблемы и перспективы развития .....	72
<b>Годес Н.В.</b> Экономическая и финансовая безопасность регионального интеграционного объединения: методологический аспект .....	84
<b>Баранов А.М.</b> Методологические аспекты оценки влияния показателей развития научно-исследовательского сектора на патентную активность в Республике Беларусь .....	97
<b>Заливако С.Г., Филиппова А.В.</b> Перспективы либерализации сектора бытовых услуг в ЕАЭС .....	105
<b>Шаграй П.С.</b> Сравнительный анализ структурной динамики сектора деловых услуг в Беларуси и в отдельных странах .....	114
<b>МОДЕЛИРОВАНИЕ</b> .....	123
<b>Егорова Н.Г., Сотсков Ю.Н., Шендерова Ю.А.</b> Распределенные задачи календарного планирования производства: обзор литературы и алгоритмы оптимизации работ на заводе .....	123
<b>Поддубная О.Н.</b> Подходы к моделированию технологических трансформаций социально-экономических систем .....	138
<b>Демиденко В.М.</b> Кратчайшие транспортно-логистические сети и их построение .....	150
<b>Проневич А.Ф., Хацкевич Г.А.</b> Полная нейтральность научно-технического прогресса по Хиксу и динамические многофакторные производственные функции .....	161
<b>Альсевич В.В., Харкевич Н.П.</b> Условия существования решения в задаче анализа способов производственной деятельности .....	172

<b>Матвейчук Н.М., Сотсков Ю.Н.</b> Цифровая трансформация агропромышленного комплекса и подготовка инженеров-аграриев по новым специальностям .....	182
<b>Павлов П.А.</b> О времени реализации распределенных вычислений при ограниченном числе копий программного ресурса .....	188
<b>Бельзецкий А.И.</b> Анализ взаимодействия рынка и внешней среды .....	206
<b>ПРОГНОЗИРОВАНИЕ</b> .....	217
<b>Кравцов М.К., Гладкая А.А., Дехтярь Т.А.</b> Методика формирования регионально-отраслевой матрицы социальных счетов Республики Беларусь .....	217
<b>Кравцов М.К., Дехтярь Т.А., Гладкая А.А.</b> Методические основы декомпозиции мультипликаторов регионально-отраслевой матрицы социальных счетов Республики Беларусь .....	231
<b>Пархименко В.А., Аксень Э.М., Быков А.А.</b> Импорт как фактор экономического роста: моделирование на основе таблиц «затраты – выпуск» .....	245
<b>Малюгин В.И., Штоль Е.Ю.</b> Краткосрочное прогнозирование объема промышленного производства на основе моделей коррекции ошибок в условиях шоковых воздействий .....	260
<b>Литвинович А.А., Еременко М.М., Аксень Э.М.</b> Моделирование оптимального распределения ресурсов в сфере жилищной политики в непрерывном времени с учетом запаздывания .....	271
<b>Липский В.А.</b> Моделирование потенциального ВВП Республики Беларусь .....	284
<b>Беть М.А., Чичина А.С.</b> Прогнозирование дефлятора ВВП: отечественный и зарубежный опыт .....	290
<b>Резюме</b> .....	299
<b>Summary</b> .....	306

## COTENTS

<b>ECONOMY</b> .....	3
<b>E.Davydenko, D.Sisauri.</b> Economic impact of the integration structure expansion on the participating countries .....	3
<b>L.Davydenko.</b> Methodological aspects of cooperation between Belarus and China in the «One Belt – One Road» Initiative .....	12
<b>H.Chang, I.Karachun, Y.Zhai.</b> Digital economy: heterogeneity and evolution in the Belt and Road Initiative countries and the EAEU .....	18
<b>A.Belavusau.</b> Belarus' participation in International Value Chains: analysis based on OECD data .....	30
<b>N.Privalova, O.Zhuravleva.</b> The features of the Russian labor market regulation in the pandemic and sanctions context .....	41
<b>I.Popova.</b> Labor standards development and improvement: domestic and foreign experience .....	48
<b>E.Davydzenka, M.Aliseiko.</b> Prospects for the circular economy development in the Republic of Belarus in the context of global sustainable development .....	56
<b>L.Dogil.</b> International challenges of quality management transition to modern technologies in business .....	65
<b>A.Burachevskiy, I.Zhuk.</b> The results of the Union State integration in the agro-industrial complex: challengers and development prospects .....	72
<b>N.Hodzes.</b> Economic and financial security of a regional integration association: methodological aspect .....	84
<b>A.Baranov.</b> Methodological aspects of assessing the development indicators impact in the research sector on patent activity in the Republic of Belarus .....	97
<b>S.Zalivaka, A.Filipava.</b> Prospects for the consumer services sector liberalization in the EAEU .....	105
<b>P.Shahrai.</b> Comparative analysis of the business services sector structural dynamics in Belarus and some other countries .....	114
<b>MODELING</b> .....	123
<b>N.Egorova, Y.Sotskov, Y.Shenderova.</b> Distributed production scheduling tasks: literature review and algorithms for optimizing work at a plant .....	123
<b>O.Poddubnaia.</b> Approaches to modeling technological transformations of socio-economic systems .....	138
<b>V.Demidenko.</b> The shortest transport and logistics networks and their construction .....	150
<b>A.Pranevich, G.Khatskevich.</b> Complete Hicks neutrality of technological progress and dynamic multifactor production functions .....	161
<b>V.Alsevich, M.Kharkevich.</b> Conditions for the problem solution existence of analyzing production activity methods .....	172
<b>N.Matsveichuk, Y.Sotskov.</b> Digital transformation of the agro-industrial complex and agricultural engineers training in new specialties .....	182

<b>P.Pavlov.</b> On the implementation time of distributed computing with a limited number of a software resource copies .....	188
<b>A.Belzetsky.</b> Interaction analysis of the market and the external environment .....	206
<b>FORECASTING</b> .....	217
<b>M.Kravtsov, A.Gladkaya, T.Dekhtyar.</b> Methodology of a regional-industry matrix of social accounts in the Republic of Belarus .....	217
<b>M.Kravtsov, T.Dekhtyar, A.Gladkaya.</b> Methodological basis for multipliers decomposition of social accounts regional-industry matrix in the Republic of Belarus .....	231
<b>U.Parkhimenka, E.Aksen, A.Bykau.</b> Import as a factor of economic growth: the modeling based on input-output tables .....	245
<b>V.Malugin, K.Shtol.</b> Short-term forecasting of industrial production volume based on error correction models under shock impacts .....	260
<b>A.Litvinovich, M.Yeremenko, E.Aksen.</b> Continuous-time modeling of the resource allocation in the field of housing with the allowance for the delay .....	271
<b>V.Lipkiy.</b> Potential GDP modeling for Belarus .....	284
<b>M.Bet, A.Chichina.</b> Forecasting the GDP deflator: domestic and foreign experience .....	290
<b>Summary in Russian</b> .....	299
<b>Summary in English</b> .....	306



*Научное издание*

## **Экономика, моделирование, прогнозирование**

Сборник научных трудов

*Основан в 2007 году*

**Выпуск 18**

*Редактирование и корректура – А.М. Стронгина  
Верстка – Е.Э. Дробышевская*

Подписано в печать 9. 08. 2024 г. Формат 60x84 <sup>1</sup>/<sub>8</sub>. Бумага офсетная. Гарнитура Таймс.  
Печать офсетная. Усл.печ.л. 36,73. Уч.-изд.л. 27,21.  
Тираж 100 экз. Заказ № 332.

Издатель и полиграфическое исполнение  
ГНУ «НИЭИ Министерства экономики Республики Беларусь»:

Свидетельство о государственной регистрации издателя, изготовителя,  
распространителя печатных изданий № 1/258 от 2 апреля 2014 г.

ЛП № 38200000015421, действующая с 30.04.2004 г.

220086, г. Минск, ул. Славинского, 1, корп. 1. Тел./факс (017) 271-02-78  
gnu-niei@neci.by