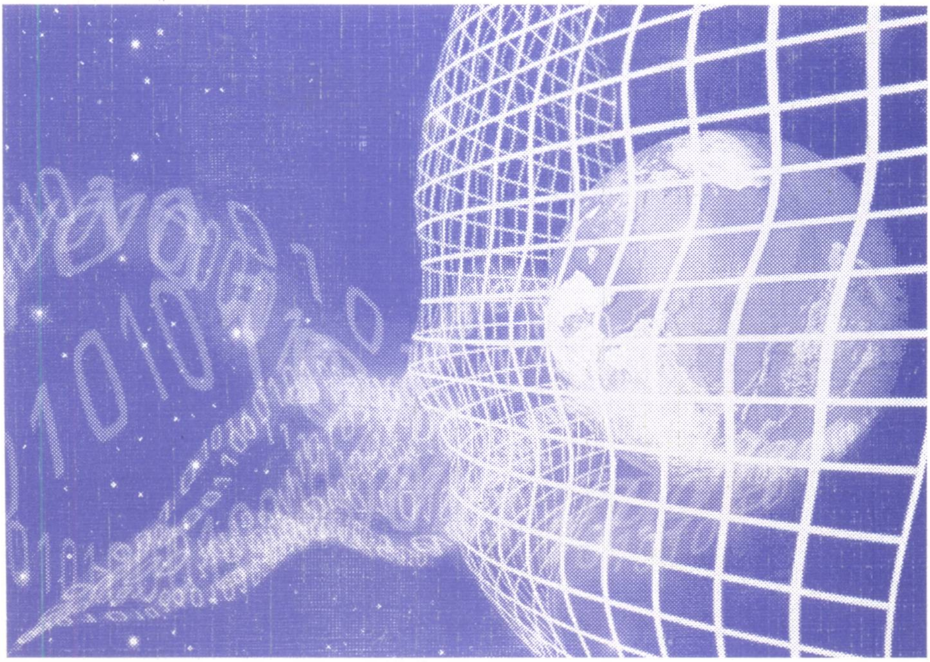
ISSN 0023-1274

Институт кибернетики им. В. М. Глушкова НАН Украины



Международный научно-теоретический журнал

Кибернетика и системный анализ

6 2005

НАЦИОНАЛЬНАЯ АКАДЕМИЯ НАУК УКРАИНЫ

NATIONAL ACADEMY OF SCIENCES OF UKRAINE

АДРЕС РЕДАКЦИИ:

03680, ГСП, Киев 187
Проспект академика Глушкова, 40
Институт кибернетики НАН Украины
Телефоны: **266-00-59, 266-64-61**
Факс: **(044) 266-74-18**
E-mail: **kisa@casa.pp.kiev.ua** (только для писем)
http://www.kibernetika.kiev.ua
http://www.icyb.kiev.ua

Журнал публикует оригинальные и обзорные статьи, материалы проблемного и дискуссионного характера, отчеты о конференциях и совещаниях по вопросам кибернетики и системного анализа, библиографические обзоры, рецензии на монографии, информирует читателей о новейших достижениях отечественной и зарубежной кибернетики.

Основные тематические разделы:

КИБЕРНЕТИКА

Теоретические проблемы кибернетики

Проектирование кибернетических систем

Проблемы искусственного интеллекта

СИСТЕМНЫЙ АНАЛИЗ

Теория систем и математические вопросы системного анализа

Теория оптимальных решений

Прикладные методы системного анализа

ПРОГРАММНО-ТЕХНИЧЕСКИЕ КОМПЛЕКСЫ

Архитектура программно-технических комплексов

Математическое и программное обеспечение

Новые информационные технологии в медицине, биологии, лингвистике, юриспруденции и др.

НОВЫЕ СРЕДСТВА КИБЕРНЕТИКИ, ИНФОРМАТИКИ, ВЫЧИСЛИТЕЛЬНОЙ ТЕХНИКИ И СИСТЕМНОГО АНАЛИЗА

ДИСКУССИОННЫЕ СООБЩЕНИЯ

ЖУРНАЛ ПЕРЕВОДИТСЯ В США НА АНГЛИЙСКИЙ ЯЗЫК ИЗДАТЕЛЬСТВОМ KLUWER ACADEMIC/PLENUM PUBLISHERS ПОД НАЗВАНИЕМ
“CYBERNETICS AND SYSTEMS ANALYSIS”

КИБЕРНЕТИКА И СИСТЕМНЫЙ АНАЛИЗ

Том 41 № 6 НОЯБРЬ — ДЕКАБРЬ 2005

МЕЖДУНАРОДНЫЙ
НАУЧНО-ТЕОРЕТИЧЕСКИЙ ЖУРНАЛ
ИНСТИТУТА КИБЕРНЕТИКИ им. В.М. ГЛУШКОВА
ОСНОВАН В ЯНВАРЕ 1965 ГОДА

СОДЕРЖАНИЕ

Свидетельство о регистрации КВ № 1331 от 22.03.95

Научные редакторы: **В.Б. Белова, Г.В. Яроцкая, Л.И. Лесько, А.Л. Кондратьев**

Набор и компьютерная верстка: **Н.Б. Шишкина, А.Ю. Чижевская, Е.И. Нагорный**

Подписано и сдано в печать 19.12.2005. Формат 70x108/16.
Бум. офсетная. Офсетн. печ.
Уч.-изд. л. 17. Тираж 450 экз. Заказ № 242.
Цена 6 грн. для Украины, 70 руб. для стран СНГ.

Редакционно-издательский отдел с полиграфическим участком Института кибернетики им. В.М. Глушкова НАН Украины.
03680, ГСП, Киев–187, проспект Академика Глушкова, 40.

КИБЕРНЕТИКА

Ю.В. КАПИТОНОВА, Н.С. КОВАЛЕНКО, П.А. ПАВЛОВ

УДК 681.3.06:519

ОПТИМАЛЬНОСТЬ СИСТЕМ ОДИНАКОВО РАСПРЕДЕЛЕННЫХ КОНКУРИРУЮЩИХ ПРОЦЕССОВ

Ключевые слова: *система конкурирующих процессов, распределенная обработка, критерии оптимальности и эффективности.*

Оптимальное распределение вычислительных ресурсов многопроцессорных систем (МС), базирующихся на принципах распараллеливания и конвейеризации, — одна из центральных проблем при создании эффективного системного и прикладного программного обеспечения [1, 2]. Важное место в ее решении занимают задачи оптимальной организации конкурирующих процессов, использующих общие программные ресурсы. От решения этих проблем зависит не только эффективность использования МС, но и предоставляемые ими возможности решения в реальное время сложных задач из различных областей знаний.

Следует отметить, что в решении проблем оптимальной организации конкурирующих процессов наибольшее развитие получили математические модели, базирующиеся на сосредоточенной обработке [2]. В настоящее время возрастет роль МС на базе распределенной обработки [3–5]. В этой связи особо актуальны задачи построения и исследования математических моделей оптимальной организации конкурирующих процессов при распределенной обработке.

Как и в [5], математическая модель распределенной обработки конкурирующих процессов включает следующие параметры: p, $p \geq 2$, — число процессоров многопроцессорной системы; n, $n \geq 2$, — число конкурирующих процессов; s, $s \geq 2$, — число блоков Q_j, $j = \overline{1, s}$, структурированного программного ресурса (ПР); $[t_{ij}]$, $i = \overline{1, n}$, $j = \overline{1, s}$, — матрица времен выполнения блоков конкурирующими процессами. Предполагается, что все n процессов используют одну копию структурированного на блоки ПР.

Введем в рассмотрение параметр $\varepsilon > 0$, характеризующий время дополнительных системных расходов организации параллельного использования блоков ПР множеством распределенных конкурирующих процессов.

В данной работе рассматриваются необходимые условия и критерии эффективности и оптимальности систем одинаково распределенных конкурирующих процессов с учетом накладных расходов по времени их реализации.

1. ВРЕМЯ РЕАЛИЗАЦИИ РАСПРЕДЕЛЕННЫХ КОНКУРИРУЮЩИХ ПРОЦЕССОВ

Определение 1. Систему конкурирующих процессов назовем одинаково распределенной, если времена выполнения всех блоков Q_j, $j = \overline{1, s}$, ПР каждым из i-х процессов, $i = \overline{1, n}$, равны между собой, т.е.

$$t_{11} = t_{12} = \ldots = t_{1s} = t'_1,$$

$$t_{21} = t_{22} = \ldots = t_{2s} = t'_2,$$

$$\ldots \quad \ldots \quad \ldots \quad \ldots$$

$$t_{n1} = t_{n2} = \ldots = t_{ns} = t'_n,$$

где $(t'_1, t'_2, \ldots, t'_n)$ — времена выполнения каждого блока Q_j, $j = \overline{1, s}$, всеми n процессами.

Определение 2. Одинаково распределенную систему конкурирующих процессов назовем стационарной, если $t'_1 = t'_2 = \ldots = t'_n = t$.

В [5] показано, что для одинаково распределенной системы конкурирующих процессов в асинхронном и втором синхронном режимах для вычисления минимального общего времени имеют место формулы

$$T_{\text{op}}^{\text{as}} = T_{\text{op}}^{2} = \begin{cases} T^n + (s-1)t_{\max}^n & \text{при } s \leqslant p \text{ или } s > p, \text{ но } T^n \leqslant p t_{\max}^n; \\ kT^n + (p-1)t_{\max}^n & \text{при } s = kp,\ k > 1,\ T^n > p t_{\max}^n; \\ (k+1)T^n + (r-1)t_{\max}^n & \text{при } s = kp + r,\ k \geqslant 1,\ 1 \leqslant r < p,\ T^n > p t_{\max}^n. \end{cases}$$

Здесь $T^n = \sum_{i=1}^{n} t'_i$ — суммарное время выполнения каждого из блоков Q_j n процессами, $t_{\max}^n = \max_{1 \le i \le n} t'_i$.

Для первого синхронного режима, который обеспечивает непрерывное выполнение блоков ПР внутри каждого из процессов, минимальное общее время выполнения заданных объемов вычислений в МС определяется соотношениями:

$$T_{\text{op}}^{1} = \begin{cases} T^n + (s-1)\left[t'_n + \sum_{i=2}^{n} \max\{t'_{i-1} - t'_i, 0\}\right] & \text{при } s \leqslant p; \\ kT_{\text{op}}^1(p, n, p) - (k-1)\min\{\omega_1, \omega_2\} & \text{при } s = kp,\ k > 1; \\ kT_{\text{op}}^1(p, n, p) + T_{\text{op}}^1(p, n, r) - (k-1)\min\{\omega_1, \omega_2\} - \min\{\xi_1, \xi_2\}, \\ \text{при } s = kp + r,\ k \geqslant 1,\ 1 \leqslant r < p. \end{cases}$$

Здесь

$$T_{\text{op}}^1(p, n, p) = T^n + (p-1)\left[t'_n + \sum_{i=2}^{n} \max\{t'_{i-1} - t'_i, 0\}\right], \tag{1}$$

$$\omega_1 = (p-1)\min\{t'_1, t'_n\}, \quad \omega_2 = T_{\text{op}}^1(p, n, p) - p \max_{1 \le i \le n} t'_i,$$

$$T_{\text{op}}^1(p, n, r) = T^n + (r-1)\left[t'_n + \sum_{i=2}^{n} \max\{t'_{i-1} - t'_i, 0\}\right], \tag{2}$$

$$\xi_1 = (r-1)\min\{t'_1, t'_n\} + (p-r)t'_n,$$

$$\xi_2 = T_{\text{op}}^1(p, n, p) - \max_{1 \le i \le n}(T_{\text{op}}^1(p, i, p) - T_{\text{op}}^1(p, i, r) + r t'_i).$$

При этом $T^1_{\text{ор}}(p, i, p)$ и $T^1_{\text{ор}}(p, i, r)$ находятся из (1) и (2) заменой n на i соответственно.

Для систем одинаково распределенных конкурирующих процессов минимальное общее время их выполнения с учетом накладных расходов $\varepsilon > 0$ при $s \leqslant p$ в асинхронном и втором синхронном режимах определяется по формуле

$$T(p, n, s, \varepsilon) = T^{\text{as}}_{\text{op}}(p, n, s, \varepsilon) = T^2_{\text{op}}(p, n, s, \varepsilon) = T^n_\varepsilon + (s-1)t^\varepsilon_{\max}, \qquad (3)$$

где $T^n_\varepsilon = \sum_{i=1}^{n} t^\varepsilon_i$, $t^\varepsilon_{\max} = \max\limits_{1 \le i \le n} t^\varepsilon_i$, $t^\varepsilon_i = t'_i + \varepsilon$.

В случае стационарной одинаково распределенной системы конкурирующих процессов минимальное общее время их выполнения с учетом дополнительных системных расходов ε для всех трех базовых режимов определяется по формулам

$$\overline{T}_\varepsilon = \begin{cases} (n+s-1)t_\varepsilon, & p \geqslant \min\{n, s\}; \\ (kn+p-1)t_\varepsilon, & p < \min\{n, s\}, \quad s = kp, \quad k > 1; \\ ((k+1)n + r - 1)t_\varepsilon, & p < \min\{n, s\}, \quad s = kp + r, \quad k \geqslant 1, \quad 1 \leqslant r < p. \end{cases} \qquad (4)$$

Здесь $t_\varepsilon = T^n / n + \varepsilon$, $T^n = nt$. В (3), (4) явно учитывается параметр ε.

2. ЭФФЕКТИВНОСТЬ И ОПТИМАЛЬНОСТЬ СИСТЕМ КОНКУРИРУЮЩИХ ПРОЦЕССОВ ПРИ ДОСТАТОЧНОМ ЧИСЛЕ ПРОЦЕССОРОВ

Определение 3. Одинаково распределенную систему конкурирующих процессов назовем эффективной при фиксированных p, $s \geqslant 2$, если величина $\Delta_\varepsilon(n) = sT^n - T(p, n, s, \varepsilon) \geqslant 0$, где sT^n — время выполнения s блоков всеми n процессами в последовательном режиме.

Определение 4. Эффективная одинаково распределенная система называется оптимальной, если величина $\Delta_\varepsilon(n)$ достигает наибольшего значения.

Покажем, что оптимальную одинаково распределенную систему достаточно искать среди эффективных одинаково распределенных систем.

Теорема 1. Для любой эффективной одинаково распределенной системы конкурирующих процессов при $s \leqslant p$ и $\varepsilon > 0$ существует стационарная более эффективная одинаково распределенная система.

Доказательство. Согласно определению 3 условие эффективности одинаково распределенной системы конкурирующих процессов имеет вид

$$\Delta_\varepsilon(n) = (s-1)(T^n - t^n_{\max}) - (n+s-1)\varepsilon \geqslant 0 \qquad (5)$$

или

$$\overline{\Delta}_\varepsilon(n) = (s-1)(T^n - t) - (n+s-1)\varepsilon \geqslant 0, \text{ где } t = T^n / n, \qquad (6)$$

в случае стационарной одинаково распределенной системы.

Покажем, что $\overline{\Delta}_\varepsilon(n) > \Delta_\varepsilon(n)$. Для этого рассмотрим разность $\overline{\Delta}_\varepsilon(n) - \Delta_\varepsilon(n) = (s-1)(t^n_{\max} - t)$. Случай, когда $\overline{\Delta}_\varepsilon(n) - \Delta(n) \leqslant 0$, имеет место только тогда, когда $t^n_{\max} \leqslant t$. Последнее невозможно, поскольку из того, что одинаково распределенная система нестационарна, следовало бы

$\sum_{i=1}^{n} t'_i < nt = T^n$, а по условию $\sum_{i=1}^{n} t'_i = T^n$. Получили противоречие $T^n < T^n$, что и доказывает теорему.

Теорема 2. Для того чтобы эффективная одинаково распределенная система конкурирующих процессов при $s \leqslant p$ была оптимальной, необходимо и достаточно, чтобы она была стационарной.

Теорема 2 следует из теоремы 1 и определения 4.

Теорема 3. Одинаково распределенная система $n \geqslant 3$ конкурирующих процессов в МС с $p \geqslant 3$ процессорами будет эффективной при $n = s \neq 3$, $s \leqslant p$ и $\varepsilon \leqslant \min\limits_{1 \le i \le n} t'_i$ тогда и только тогда, когда выполняется условие $sn \geqslant 2(n + s - 1)$.

Доказательство теоремы основывается на анализе следующих неравенств. Согласно (5) условие эффективности равносильно неравенству

$$\frac{T^n - t^n_{\max}}{\varepsilon} \geqslant \frac{n + s - 1}{s - 1}.$$

В силу условия теоремы $\varepsilon \leqslant \min\limits_{1 \le i \le n} t'_i$ имеет место неравенство

$$\frac{T^n - t^n_{\max}}{\varepsilon} \geqslant n - 1.$$

Кроме того, условие теоремы $sn \geqslant 2(n + s - 1)$ равносильно неравенству

$$n - 1 \geqslant \frac{n + s - 1}{s - 1}.$$

Сформулируем необходимые и достаточные условия (критерии) существования эффективной системы одинаково распределенных конкурирующих процессов при достаточном $s \leqslant p$ числе процессоров в зависимости от величины накладных расходов $\varepsilon > 0$.

Теорема 4. Для существования эффективной одинаково распределенной системы конкурирующих процессов при заданных $p \geqslant 3$, T^n, $\varepsilon > 0$ при $s \leqslant p$ необходимо и достаточно, чтобы выполнялись следующие условия:

$$\varepsilon \leqslant \begin{cases} \varphi(1 + \sqrt{s}), & \text{если } \sqrt{s} \text{ целое;} \\ \max\{\varphi(1 + [\sqrt{s}\,]),\ f(2 + [\sqrt{s}\,])\}, & \text{если } \sqrt{s} \text{ нецелое.} \end{cases}$$

Здесь $\varphi(x) = \dfrac{(s - 1)T^n(x - 1)}{x(x + s - 1)}$, $[x\,]$ — наибольшее целое, не превосходящее x.

Доказательство. Необходимость следует из определения 3 и теоремы 1. Действительно, в силу формулы (6) условие эффективности имеет вид

$$\overline{\Delta}_\varepsilon(n) = sT^n - \overline{T}_\varepsilon = (s - 1)(T^n - t) - (n + s - 1)\varepsilon \geqslant 0,$$

что равносильно следующему неравенству:

$$\varepsilon \leqslant \frac{(s - 1)T^n(n - 1)}{n(n + s - 1)}. \tag{7}$$

Введя функцию $\varphi(x) = (s - 1)T^n(x - 1) / x(x + s - 1)$, $x > 0$, легко показать, что она достигает максимума при $x = 1 + \sqrt{s}$.

Выбрав $n = x = 1 + \sqrt{s}$, если $\sqrt{s}$ целое, или $n = x \in \{1 + [\sqrt{s}], 2 + [\sqrt{s}]\}$, если $\sqrt{s}$ нецелое, получим эффективную систему одинаково распределенных процессов, что и доказывает необходимость.

Достаточность следует из (7), поскольку $\varphi(x)$ достигает наибольшего значения при $n = x = 1 + \sqrt{s}$, если $\sqrt{s}$ целое, или при $n = x \in \{1 + [\sqrt{s}], 2 + [\sqrt{s}]\}$, если $\sqrt{s}$ нецелое.

Замечание. При $p = s = 2$ одинаково распределенная система конкурирующих процессов будет эффективной, если отношение $\dfrac{\varepsilon}{T^n} \leq \dfrac{n-1}{n(n+1)}$.

На рис. 1 изображен график функции $y = \varphi(x)$, $x > 0$, при фиксированных $s = 50$, $T^n = 7$, $\varepsilon = 5$. Существование эффективной одинаково распределенной системы конкурирующих процессов определяется областью Ω. Все целочисленные точки отрезка Ω являются значениями n, при которых система эффективна, при этом $x_1 = 1 + [\sqrt{s}] = 8$, $x^* = 1 + \sqrt{s}$, $x_2 = 2 + [\sqrt{s}] = 9$.

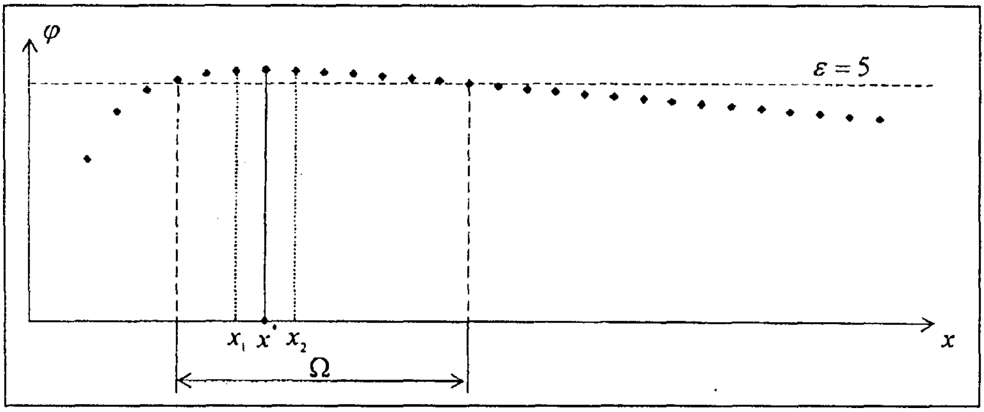


Рис. 1

Решение задачи об оптимальности одинаково распределенной системы, состоящей из n конкурирующих процессов, для достаточного числа процессоров следует из теоремы.

Теорема 5. Для того чтобы эффективная одинаково распределенная система конкурирующих процессов была оптимальной при $s \leq p$ и заданных $p \geq 2$, T^n, $\varepsilon > 0$, необходимо и достаточно, чтобы она была стационарной и число процессов n в системе равнялось тому из чисел $\left[\sqrt{\dfrac{(s-1)T^n}{\varepsilon}}\right]$, $\left[\sqrt{\dfrac{(s-1)T^n}{\varepsilon}}\right] + 1$, в котором функция $\overline{\Delta}_\varepsilon(x)$ достигает наибольшего значения. Здесь $[x]$ — наибольшее целое, не превосходящее x.

Доказательство. В силу теоремы 2 оптимальную одинаково распределенную систему следует искать среди класса стационарных. Тогда очевидно, что $\overline{\Delta}_\varepsilon(n) = (s-1)T^n(1 - 1/n) - (n + s - 1)\varepsilon$.

Необходимость. Введем функцию действительного аргумента x вида

$$\overline{\Delta}_\varepsilon(x) = (s-1)T^n(1 - 1/x) - (x + s - 1)\varepsilon, \quad x \geq 1.$$

Согласно определению 4 одинаково распределенная система будет оптимальной в той точке x, где $\overline{\Delta}_\varepsilon(x)$ достигает своего наибольшего значения. Покажем, что это возможно в точке $x = \sqrt{\frac{(s-1)T^n}{\varepsilon}}$. Действительно,

$$\overline{\Delta}'_\varepsilon(x) = \frac{(s-1)T^n}{x^2} - \varepsilon, \quad \overline{\Delta}''_\varepsilon(x) = -\frac{2T^n(s-1)}{x^3} < 0, \text{ так как } s \geq 2, \ x > 0.$$

Следовательно, функция $\overline{\Delta}_\varepsilon(x)$ становится максимальной в точке, где $\overline{\Delta}'_\varepsilon(x) = 0$, т.е. $x^* = \sqrt{\frac{(s-1)T^n}{\varepsilon}}$. Целочисленными точками, в которых достигается наибольшее значение функции $\overline{\Delta}_\varepsilon(x)$, будут $n = [x^*]$ или $n = [x^*] + 1$. Итак, в качестве n можно выбрать одно из чисел $\left[\sqrt{\frac{(s-1)T^n}{\varepsilon}}\right]$, $\left[\sqrt{\frac{(s-1)T^n}{\varepsilon}}\right] + 1$, в которых функция $\overline{\Delta}_\varepsilon(x)$ принимает наибольшее значение.

Достаточность следует из свойств выпуклости функции $\overline{\Delta}_\varepsilon(x)$ при $s \leq p$ на отрезке $[2, n]$.

3. КРИТЕРИИ ЭФФЕКТИВНОСТИ СИСТЕМ ОДИНАКОВО РАСПРЕДЕЛЕННЫХ КОНКУРИРУЮЩИХ ПРОЦЕССОВ ПРИ ОГРАНИЧЕННОМ ЧИСЛЕ ПРОЦЕССОРОВ

Сформулируем необходимые и достаточные условия (критерии) эффективности и оптимальности одинаково распределенных систем конкурирующих процессов в случае, когда число процессоров ограничено.

В разд. 1 показано, что с учетом параметра $\varepsilon > 0$, характеризующего время дополнительных системных расходов на организацию параллельного использования блоков множеством распределенных конкурирующих процессов, для вычисления минимального общего времени $T(p, n, s, \varepsilon)$ в асинхронном и втором синхронном режимах для класса одинаково распределенных конкурирующих процессов имеют место формулы

$$T(p,n,s,\varepsilon) = \begin{cases} kT^n + (p-1)t^n_{\max} & \text{при } s = kp, \ k > 1, \ T^n > pt^n_{\max}; \\ (k+1)T^n + (r-1)t^n_{\max} & \text{при } s = kp + r, \ k \geq 1, \ 1 \leq r < p, \ T^n > pt^n_{\max}, \end{cases}$$

где $T^n = \sum_{i=1}^{n} t'_i$ — суммарное время выполнения каждого из блоков Q_j n процессами, $t^n_{\max} = \max\limits_{1 \leq i \leq n} t'_i$.

Имеет место теорема.

Теорема 6. Если $p, n, s \geq 3$, $n = s \neq 3$, и $\varepsilon \leq \min\limits_{1 \leq i \leq n} t'_i$, то одинаково распределенная система n конкурирующих процессов в многопроцессорной системе с p процессорами эффективна тогда и только тогда, когда выполняются следующие условия:

$$sn \geq \begin{cases} 2(kn + p - 1), & \text{если } s = kp, \quad k > 1; \\ 2((k+1)n + r - 1), & \text{если } s = kp + r, \quad k \geq 1, \quad 1 \leq r < p. \end{cases}$$

Доказательство. 1. Для случая $s = kp$, $k > 1$, условие эффективности равносильно неравенству

$$\frac{(s-k)T^n - (p-1)t_{\max}^n}{\varepsilon} \geqslant kn + p - 1.$$

Согласно условию теоремы $\varepsilon \leqslant \min\limits_{1 \le i \le n} t_i'$ имеет место неравенство

$$\frac{(s-k)T^n - (p-1)t_{\max}^n}{\varepsilon} \geqslant (s-k)n - p + 1.$$

Из этих неравенств следует $sn \geqslant 2(kn + p - 1)$.

2. В случае, когда $s = kp + r$, $k \geqslant 1$, $1 \leqslant r < p$, имеют место такие неравенства:

$$\frac{(s-k-1)T^n - (r-1)t_{\max}^n}{\varepsilon} \geqslant (k+1)n + r - 1,$$

$$\frac{(s-k-1)T^n - (r-1)t_{\max}^n}{\varepsilon} \geqslant (s-k-1)n - r + 1,$$

откуда $sn \geqslant 2((k+1)n + r - 1)$.

Сформулируем и докажем критерии существования эффективной системы одинаково распределенных конкурирующих процессов в зависимости от величины накладных расходов $\varepsilon > 0$ в случае, когда число процессоров ограничено.

Теорема 7. Для существования эффективной одинаково распределенной системы конкурирующих процессов при заданных $p \geqslant 2$, T^n, $\varepsilon > 0$ необходимо и достаточно, чтобы выполнялись следующие условия.

1. При $s = kp$ имеем $k > 1$,

$$\varepsilon \leqslant \begin{cases} \varphi_1\left(\dfrac{1+\sqrt{p}}{k}\right), & \text{если } \dfrac{1+\sqrt{p}}{k} \text{ целое;} \\[2ex] \max\left\{\varphi_1\left(\left[\dfrac{1+\sqrt{p}}{k}\right]\right), \varphi_1\left(\left[\dfrac{1+\sqrt{p}}{k}\right]+1\right)\right\}, & \text{если } \dfrac{1+\sqrt{p}}{k} \text{ нецелое,} \end{cases}$$

где $\varphi_1(x) = (p-1)T^n(kx-1) / x(kx+p-1)$, а $[x]$ — наибольшее целое, не превосходящее x.

2. При $s = kp + r$, $k \geqslant 1$, $1 \leqslant r < p$, имеем

$$\varepsilon \leqslant \begin{cases} \varphi_2(x), & \text{если } x \text{ целое;} \\ \max\{\varphi_2([x]), \varphi_2([x]+1)\}, & \text{если } x \text{ нецелое,} \end{cases}$$

где $\varphi_2(x) = \dfrac{[(p-1)kx + (r-1)(x-1)]T^n}{x[(k+1)x + r - 1]}$, $[x]$ — наибольшее целое, не превосходящее x, $x = \dfrac{r-1}{(p-1)k + r - 1}\left(1 + \sqrt{1 + \dfrac{(p-1)k + r - 1}{k+1}}\right)$.

Доказательство. В силу (4) условие эффективности при $s = kp$, $k > 1$, будет иметь вид $\overline{\Delta}_\varepsilon(n) = (p-1)(kT^n - t) - (kn + p - 1)\varepsilon \geqslant 0$, что равносильно неравенству $\varepsilon \leqslant \dfrac{(p-1)T^n(kn-1)}{n(kn+p-1)}$.

Функция $\varphi_1(x) = (p-1)T^n(kx-1) / x(kx+p-1)$, $x > 0$, достигает максимума при $x = \dfrac{1+\sqrt{p}}{k}$. Следовательно, для эффективной одинаково распределенной системы при $s = kp$, $k > 1$, число процессов должно быть $n = x = \dfrac{1+\sqrt{p}}{k}$, если $\dfrac{1+\sqrt{p}}{k}$ целое, и $n = x \in \left\{\left[\dfrac{1+\sqrt{p}}{k}\right], \left[\dfrac{1+\sqrt{p}}{k}\right] + 1\right\}$, если $\dfrac{1+\sqrt{p}}{k}$ нецелое.

В случае $s = kp + r$, $k \geqslant 1$, $1 \leqslant r < p$, условие эффективности имеет вид

$$\varepsilon \leqslant \frac{[(p-1)kn + (r-1)(n-1)]T^n}{n[(k+1)n + r - 1]}.$$

Введя функцию $\varphi_2(x) = [(p-1)kx + (r-1)(x-1)]T^n / x[(k+1)x + r - 1]$, $x > 0$, можно показать, что она достигает максимума при

$$x = \frac{r-1}{(p-1)k + r - 1}\left(1 + \sqrt{1 + \frac{(p-1)k + r - 1}{k+1}}\right).$$

Следовательно, одинаково распределенная система эффективна, если число процессов в ней $n = x$, если x целое, и $n = x \in \{[x], [x] + 1\}$, если x нецелое.

Достаточность доказывается аналогично, как и в теореме 4.

Полученные критерии эффективности и оптимальности систем одинаково распределенных конкурирующих процессов могут использоваться при проектировании системного и прикладного программного обеспечения для МС и сетей при решении проблем оптимального использования вычислительных ресурсов.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Капитонова Ю.В., Летичевский А.А. Математическая теория проектирования вычислительных систем. — М.: Наука, 1988. — 296 с.
2. Капитонова Ю.В., Кляус П.С., Коваленко Н.С. Математическая модель конвейерной организации конкурирующих процессов // Докл. АН СССР. — 1987. — 293, № 6. — С. 1320–1324.
3. Воеводин В.В., Воеводин Вл.В. Параллельные вычисления. — СПб.: Наука, 2002. — 520 с.
4. Эндрюс Г.Р. Основы многопоточного, параллельного и распределенного программирования. — М.: Мир, 2003. — 325 с.
5. Коваленко Н.С., Самаль С.А. Вычислительные методы реализации интеллектуальных моделей сложных систем. — Минск: Беларуская навука, 2004. — 166 с.

Поступила 16.03.2005