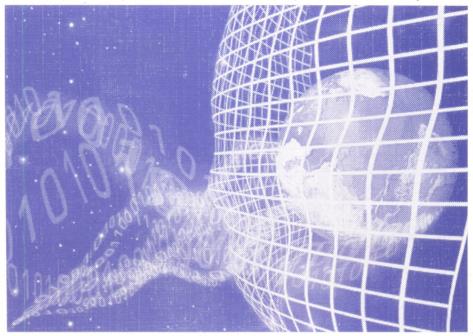
Институт кибернетики им. В. М. Глушкова НАН Украины



Международный научно-теоретический журнал

# КИБЕРНЕТИКА И СИСТЕМНЫЙ АНАЛИЗ

6 2005

#### НАЦИОНАЛЬНАЯ АКАДЕМИЯ НАУК УКРАИНЫ

#### NATIONAL ACADEMY OF SCIENCES OF UKRAINE

#### ГЛАВНЫЙ РЕДАКТОР

и.в. СЕРГИЕНКО,

академик

НАН Украины

#### РЕДАКЦИОННАЯ КОЛЛЕГИЯ

Ю.В. КАПИТОНОВА, зам. главного

редактора, профессор

н.с. фурс,

зам. главного

редактора

A.B. AHHCHMOB,

профессор акалемик

Ю.М. ЕРМОЛЬЕВ,

НАН Украины

м.з. згуровский,

академик

и.н. коваленко.

НАН Украины академик

The Robinskins

НАН Украины

в.с. королюк,

академик

НАН Украины

А.А. ЛЕТИЧЕВСКИЙ, чл.-кор.

НАН Украины академик

В.Н. РЕДЬКО,

НАН Украины

н.з. шор,

академик

НАН Украины

#### МЕЖДУНАРОДНЫЙ РЕДАКЦИОННЫЙ СОВЕТ

**А.С. АЛЕКСЕЕВ, Л. БАУМ.** 

академик РАН

Д. БАУМ, Ж. БОННИН, профессор, Германия

ж. Боннин, ал гриниани профессор, Франция

А.Д. ГВИШИАНИ,

профессор, Россия

Д. ГИЛЬБЕРТ,

профессор, Англия

В.А. ЕМЕЛИЧЕВ,

профессор,

•

Беларусь

Ю.И. ЖУРАВЛЕВ,

академик РАН акалемик РАН

А.Б. КУРЖАНСКИЙ,

академик РАН

О.Б. ЛУПАНОВ,

академик РАН

В.Л. МАКАРОВ,

академик РАН

А. ПАКШТАС,

профессор, Англия

П.М. ПАРДАЛОС,

профессор, США

Э.Х. ТЫУГУ,

акалемик

АН Эстонии

#### АДРЕС РЕДАКЦИИ:

03680, ГСП, Киев 187

Проспект академика Глушкова, 40 Институт кибернетики НАН Украины

Телефоны: 266-00-59, 266-64-61

Факс: (044) 266-74-18

E-mail: kisa@casa.pp.kiev.ua (только для писем)

http://www.kibernetika.kiev.ua

http://www.icyb.kiev.ua

Журнал публикует оригинальные и обзорные статьи, материалы проблемного и дискуссионного характера, отчеты о конференциях и совещаниях по вопросам кибернетики и системного анализа, библиографические обзоры, рецензии на монографии, информирует читателей о новейших достижениях отечественной и зарубежной кибернетики.

Основные тематические разделы:

#### КИБЕРНЕТИКА

Теоретические проблемы кибернетики Проектирование кибернетических систем Проблемы искусственного интеллекта

#### СИСТЕМНЫЙ АНАЛИЗ

Теория систем и математические вопросы системного анализа

Теория оптимальных решений

Прикладные методы системного анализа

#### ПРОГРАММНО-ТЕХНИЧЕСКИЕ КОМПЛЕКСЫ

Архитектура программно-технических комплексов

Математическое и программное обеспечение

Новые информационные технологии в медицине, биологии, лингвистике, юриспруденции и др.

#### НОВЫЕ СРЕДСТВА КИБЕРНЕТИКИ, ИНФОРМАТИКИ, ВЫЧИСЛИТЕЛЬНОЙ ТЕХНИКИ И СИСТЕМНОГО АНАЛИЗА

#### дискуссионные сообщения

ЖУРНАЛ ПЕРЕВОДИТСЯ В США НА АНГЛИЙСКИЙ ЯЗЫК ИЗДАТЕЛЬСТВОМ KLUWER ACADEMIC/PLENUM PUBLISHERS ПОД НАЗВАНИЕМ "CYBERNETICS AND SYSTEMS ANALYSIS"

## MISEPHETHUA CHAJINS

#### Том 41 № 6 НОЯБРЬ — ДЕКАБРЬ 2005

МЕЖДУНАРОДНЫЙ НАУЧНО-ТЕОРЕТИЧЕСКИЙ ЖУРНАЛ ИНСТИТУТА КИБЕРНЕТИКИ им. В.М. ГЛУШКОВА ОСНОВАН В ЯНВАРЕ 1965 ГОДА

#### СОДЕРЖАНИЕ

#### КИБЕРНЕТИКА

<b>Капитонова Ю.В., Коваленко Н.С., Павлов П.А.</b> Оптимальность систем одинаково распределенных конкурирующих процессов	-3
<b>Крывый С.Л., Чеботарев А.Н.</b> Проверка непротиворечивости формул языка $L$ , представленных в дизъюнктивной нормальной форме. $\Pi$	11
<b>Балабанов А.С.</b> К выводу структур моделей вероятностных зависимостей из статистических данных	19
Гулик Л.И., Литвин О.Н. Интерфлетация функций трех переменных на пирамиде с одной криволинейной гранью	32
Дарийчук И.В., Ясинский В.К., Никитин А.В. Анализ устойчивости стохастических динамических систем с пуассоновскими возмущениями. П. Устойчивость решений в среднем квадратичном систем линейных стохастических дифференциальных уравнений с пуассоновскими возмущениями	50
СИСТЕМНЫЙ АНАЛИЗ	
Сергиенко И.В., Дейнека В.С. Оптимальное управление эллиптической системой с несимметричным оператором состояния	67
<b>Скопецкий В.В., Марченко О.А.</b> Постановка и исследование задач для динамических систем неоднородных двухфазных сред	85
Дунаев Б.Б. Макроэкономическая модель воспроизводства	101
<b>Бабак О.В., Татаринов А.Э.</b> Об одном подходе к решению задач классификации в условиях неполноты информации.	116

© ИНСТИТУТ КИБЕРНЕТИКИ им. В.М. ГЛУШКОВА НАН УКРАИНЫ, 2005.

Свидетельство о регистрации КВ № 1331 от 22.03.95

Oliveira C.A.S., Pardalos P.M. Construction algorithms and approximation bounds for the streaming cache placement problem in multicast networks	124
Данеев А.В., Русанов В.А., Русанов М.В. От реализации Калмана—Месаровича к линейной модели нормально-гиперболического типа	137
ПРОГРАММНО-ТЕХНИЧЕСКИЕ КОМПЛЕКСЫ	
Петунин Ю.И., Клюшин Д.А., Кулик Г.И., Юрченко О.В., Тодор И.Н., Чехун В.Ф. Стратификационный анализ морфометрических показателей популяций раковых клеток с фенотипом лекарственной резистентности	158
краткие сообщения	
Стецюк П.И. О функционально избыточных ограничениях для булевых оптимизационных задач квадратичного типа .	168
Дикин И.И. Решение одной задачи геометрического программирования	172
<b>Кравцов В.М.</b> Полиномиальные алгоритмы нахождения асимптотически оптимального решения многоиндексной аксиальной проблемы выбора	176
РЕЦЕНЗИИ НА НОВЫЕ КНИГИ	182
СОДЕРЖАНИЕ ЖУРНАЛА «КИБЕРНЕТИКА И СИСТЕМНЫЙ АНАЛИЗ» ЗА 2005 ГОД	188

Научные редакторы: В.Б. Белова, Г.В. Яроцкая, Л.И. Лесько, А.Л. Кондратьев Набор и компьютерная верстка: Н.Б. Шишкина,

А.Ю. Чижевская, Е.И. Нагорный

Подписано и сдано в печать 19.12.2005. Формат 70х108/16. Бум. офестная. Офестн. печ. Уч.-изд. л. 17. Тираж 450 экз. Заказ № 242. Цена 6 грн. для Украины, 70 руб. для стран СНГ.

Редакционно-издательский отдел с полиграфическим участком Института кибернетики им. В.М. Глушкова НАН Украины. 03680, ГСП, Киев-187, проспект Академика Глушкова, 40.



Ю.В. КАПИТОНОВА, Н.С. КОВАЛЕНКО, П.А. ПАВЛОВ

УЛК 681.3.06:519

### ОПТИМАЛЬНОСТЬ СИСТЕМ ОДИНАКОВО РАСПРЕДЕЛЕННЫХ КОНКУРИРУЮЩИХ ПРОЦЕССОВ

**Ключевые слова**: система конкурирующих процессов, распределенная обработка, критерии оптимальности и эффективности.

Оптимальное распределение вычислительных ресурсов многопроцессорных систем (МС), базирующихся на принципах распараллеливания и конвейеризации, — одна из центральных проблем при создании эффективного системного и прикладного программного обеспечения [1, 2]. Важное место в ее решении занимают задачи оптимальной организации конкурирующих процессов, использующих общие программные ресурсы. От решения этих проблем зависит не только эффективность использования МС, но и предоставляемые ими возможности решения в реальное время сложных задач из различных областей знаний.

Следует отметить, что в решении проблем оптимальной организации конкурирующих процессов наибольшее развитие получили математические модели, базирующиеся на сосредоточенной обработке [2]. В настоящее время возрастет роль МС на базе распределенной обработки [3–5]. В этой связи особо актуальны задачи построения и исследования математических моделей оптимальной организации конкурирующих процессов при распределенной обработке.

Как и в [5], математическая модель распределенной обработки конкурирующих процессов включает следующие параметры:  $p, p \ge 2$ , — число процессоров многопроцессорной системы;  $n, n \ge 2$ , — число конкурирующих процессов;  $s, s \ge 2$ , — число блоков  $Q_j, j = \overline{1, s}$ , структурированного программного ресурса (ПР);  $[t_{ij}], i = \overline{1, n}, j = \overline{1, s}$ , — матрица времен выполнения блоков конкурирующими процессами. Предполагается, что все n процессов используют одну копию структурированного на блоки ПР.

Введем в рассмотрение параметр  $\varepsilon > 0$ , характеризующий время дополнительных системных расходов организации параллельного использования блоков  $\Pi P$  множеством распределенных конкурирующих процессов.

В данной работе рассматриваются необходимые условия и критерии эффективности и оптимальности систем одинаково распределенных конкурирующих процессов с учетом накладных расходов по времени их реализации.

© Ю.В. Капитонова, Н.С. Коваленко, П.А. Павлов, 2005

#### 1. ВРЕМЯ РЕАЛИЗАЦИИ РАСПРЕДЕЛЕННЫХ КОНКУРИРУЮЩИХ ПРОЦЕССОВ

Определение 1. Систему конкурирующих процессов назовем одинаково распределенной, если времена выполнения всех блоков  $Q_i$ , j=1, s, ПР каждым из i-х процессов,  $i = \overline{1, n}$ , равны между собой, т.е.

$$t_{11} = t_{12} = \dots = t_{1s} = t'_1,$$
  
 $t_{21} = t_{22} = \dots = t_{2s} = t'_2,$   
 $\dots \dots \dots \dots \dots$   
 $t_{n1} = t_{n2} = \dots = t_{ns} = t'_n,$ 

где  $(t'_1, t'_2, \ldots, t'_n)$  — времена выполнения каждого блока  $Q_j$ ,  $j = \overline{1, s}$ , всеми п процессами.

Определение 2. Одинаково распределенную систему конкурирующих процессов назовем стационарной, если  $t'_1 = t'_2 = \ldots = t'_n = t$ .

В [5] показано, что для одинаково распределенной системы конкурирующих процессов в асинхронном и втором синхронном режимах для вычисления минимального общего времени имеют место формулы

$$T_{\text{op}}^{\text{as}} = T_{\text{op}}^{2} = \begin{cases} T^{n} + (s-1)t_{\text{max}}^{n} & \text{при } s \leq p \text{ или } s > p, \text{ но } T^{n} \leq pt_{\text{max}}^{n}; \\ kT^{n} + (p-1)t_{\text{max}}^{n} & \text{при } s = kp, \ k > 1, \ T^{n} > pt_{\text{max}}^{n}; \\ (k+1)T^{n} + (r-1)t_{\text{max}}^{n} & \text{при } s = kp + r, \ k \geq 1, \ 1 \leq r < p, \ T^{n} > pt_{\text{max}}^{n}. \end{cases}$$

Здесь  $T^n = \sum_{i=1}^n t'_i$  — суммарное время выполнения каждого из блоков  $Q_j$ 

n процессами,  $t_{\max}^n = \max_{1 \le i \le n} t_i^i$ .

Для первого синхронного режима, который обеспечивает непрерывное выполнение блоков ПР внутри каждого из процессов, минимальное общее время выполнения заданных объемов вычислений в МС определяется соотношениями:

$$T_{\text{op}}^{1} = \begin{cases} T^{n} + (s-1) \left[ t'_{n} + \sum_{i=2}^{n} \max\{t'_{i-1} - t'_{i}, 0\} \right] & \text{при } s \leq p; \\ kT_{\text{op}}^{1}(p, n, p) - (k-1) \min\{\omega_{1}, \omega_{2}\} & \text{при } s = kp, \ k > 1; \\ kT_{\text{op}}^{1}(p, n, p) + T_{\text{op}}^{1}(p, n, r) - (k-1) \min\{\omega_{1}, \omega_{2}\} - \min\{\xi_{1}, \xi_{2}\}, \\ \text{при } s = kp + r, \ k \geq 1, 1 \leq r < p. \end{cases}$$

Здесь

$$T_{\text{op}}^{1}(p, n, p) = T^{n} + (p - 1) \left[ t'_{n} + \sum_{i=2}^{n} \max\{t'_{i-1} - t'_{i}, 0\} \right], \tag{1}$$

$$\omega_1 = (p-1)\min\{t'_1, t'_n\}, \quad \omega_2 = T^1_{op}(p, n, p) - p \max_{1 \le i \le n} t'_i,$$

$$\omega_{1} = (p-1)\min\{t'_{1}, t'_{n}\}, \quad \omega_{2} = T_{op}^{1}(p, n, p) - p \max_{1 \le i \le n} t'_{i},$$

$$T_{op}^{1}(p, n, r) = T^{n} + (r-1) \left[t'_{n} + \sum_{i=2}^{n} \max\{t'_{i-1} - t'_{i}, 0\}\right],$$
(2)

$$\xi_1 = (r-1)\min\{t'_1, t'_n\} + (p-r)t'_n,$$

$$\xi_2 = T_{\text{op}}^1(p, n, p) - \max_{1 \le i \le n} (T_{\text{op}}^1(p, i, p) - T_{\text{op}}^1(p, i, r) + rt_i').$$

При этом  $T^1_{\rm op}(p,i,p)$  и  $T^1_{\rm op}(p,i,r)$  находятся из (1) и (2) заменой n на i соответственно.

Для систем одинаково распределенных конкурирующих процессов минимальное общее время их выполнения с учетом накладных расходов  $\varepsilon > 0$  при  $s \leqslant p$  в асинхронном и втором синхронном режимах определяется по формуле

$$T(p, n, s, \varepsilon) = T_{\text{op}}^{\text{as}}(p, n, s, \varepsilon) = T_{\text{op}}^{2}(p, n, s, \varepsilon) = T_{\varepsilon}^{n} + (s - 1)t_{\text{max}}^{\varepsilon}, \tag{3}$$

где 
$$T_{\varepsilon}^{n} = \sum_{i=1}^{n} t_{i}^{\varepsilon}$$
,  $t_{\max}^{\varepsilon} = \max_{1 \le i \le n} t_{i}^{\varepsilon}$ ,  $t_{i}^{\varepsilon} = t_{i}' + \varepsilon$ .

В случае стационарной одинаково распределенной системы конкурирующих процессов минимальное общее время их выполнения с учетом дополнительных системных расходов  $\varepsilon$  для всех трех базовых режимов определяется по формулам

$$\overline{T}_{\varepsilon} = \begin{cases} (n+s-1)t_{\varepsilon}, & p \geq \min\{n, s\}; \\ (kn+p-1)t_{\varepsilon}, & p < \min\{n, s\}, \quad s = kp, \quad k > 1; \\ ((k+1)n+r-1)t_{\varepsilon}, & p < \min\{n, s\}, \quad s = kp+r, \quad k \geq 1, \quad 1 \leq r < p. \end{cases}$$
(4)

Здесь  $t_{\varepsilon} = T^n / n + \varepsilon$ ,  $T^n = nt$ . В (3), (4) явно учитывается параметр  $\varepsilon$ .

#### 2. ЭФФЕКТИВНОСТЬ И ОПТИМАЛЬНОСТЬ СИСТЕМ КОНКУРИРУЮЩИХ ПРОЦЕССОВ ПРИ ДОСТАТОЧНОМ ЧИСЛЕ ПРОЦЕССОРОВ

Определение 3. Одинаково распределенную систему конкурирующих процессов назовем эффективной при фиксированных  $p, s \ge 2$ , если величина  $\Delta_{\varepsilon}(n) = sT^n - T(p, n, s, \varepsilon) \ge 0$ , где  $sT^n$  — время выполнения s блоков всеми n процессами в последовательном режиме.

Определение 4. Эффективная одинаково распределенная система называется оптимальной, если величина  $\Delta_{\epsilon}(n)$  достигает наибольшего значения.

Покажем, что оптимальную одинаково распределенную систему достаточно искать среди эффективных одинаково распределенных систем.

**Теорема 1.** Для любой эффективной одинаково распределенной системы конкурирующих процессов при  $s \le p$  и  $\varepsilon > 0$  существует стационарная более эффективная одинаково распределенная система.

Доказательство. Согласно определению 3 условие эффективности одинаково распределенной системы конкурирующих процессов имеет вид

$$\Delta_{\varepsilon}(n) = (s-1)(T^n - t_{\max}^n) - (n+s-1)\varepsilon \ge 0$$
 (5)

или

$$\overline{\Delta}_{\varepsilon}(n) = (s-1)(T^n - t) - (n+s-1)\varepsilon \ge 0, \text{ rge } t = T^n / n, \tag{6}$$

в случае стационарной одинаково распределенной системы.

Покажем, что  $\overline{\Delta}_{\varepsilon}(n) > \Delta_{\varepsilon}(n)$ . Для этого рассмотрим разность  $\overline{\Delta}_{\varepsilon}(n) - \Delta_{\varepsilon}(n) = (s-1)(t_{\max}^n - t)$ . Случай, когда  $\overline{\Delta}_{\varepsilon}(n) - \Delta(n) \leq 0$ , имеет место только тогда, когда  $t_{\max}^n \leq t$ . Последнее невозможно, поскольку из того, что одинаково распределенная система нестационарна, следовало бы

 $\sum_{i=1}^n t_i' < nt = T^n$ , а по условию  $\sum_{i=1}^n t_i' = T^n$ . Получили противоречие

 $T^n < T^n$ , что и доказывает теорему.

**Теорема 2.** Для того чтобы эффективная одинаково распределенная система конкурирующих процессов при  $s \le p$  была оптимальной, необходимо и достаточно, чтобы она была стационарной.

Теорема 2 следует из теоремы 1 и определения 4.

**Теорема 3.** Одинаково распределенная система  $n \ge 3$  конкурирующих процессов в МС с  $p \ge 3$  процессорами будет эффективной при  $n = s \ne 3$ ,  $s \le p$  и  $\varepsilon \le \min_{1 \le i \le n} t_i'$  тогда и только тогда, когда выполняется условие  $sn \ge 2(n+s-1)$ .

Доказательство теоремы основывается на анализе следующих неравенств. Согласно (5) условие эффективности равносильно неравенству

$$\frac{T^n - t_{\max}^n}{\varepsilon} \geqslant \frac{n+s-1}{s-1} \cdot$$

В силу условия теоремы  $\varepsilon \leqslant \min t_i'$  имеет место неравенство  $1 \le i \le n$ 

$$\frac{T^n - t_{\max}^n}{\varepsilon} \ge n - 1.$$

Кроме того, условие теоремы  $sn \ge 2(n + s - 1)$  равносильно неравенству

$$n-1 \ge \frac{n+s-1}{s-1} \cdot$$

Сформулируем необходимые и достаточные условия (критерии) существования эффективной системы одинаково распределенных конкурирующих процессов при достаточном  $s \le p$  числе процессоров в зависимости от величины накладных расходов  $\varepsilon > 0$ .

**Теорема 4.** Для существования эффективной одинаково распределенной системы конкурирующих процессов при заданных  $p \ge 3$ ,  $T^n$ ,  $\varepsilon > 0$  при  $s \le p$  необходимо и достаточно, чтобы выполнялись следующие условия:

$$\varepsilon \leqslant \begin{cases} \varphi(1+\sqrt{s}), & \text{если } \sqrt{s} \text{ целое;} \\ \max\{\varphi(1+[\sqrt{s}\ ]),\ f(2+[\sqrt{s}\ ])\},\ \text{если } \sqrt{s} \text{ нецелое.} \end{cases}$$

Здесь  $\varphi(x) = \frac{(s-1)T^n(x-1)}{x(x+s-1)}$ , [x] — наибольшее целое, не превосходящее x.

Доказательство. Необходимость следует из определения 3 и теоремы 1. Действительно, в силу формулы (6) условие эффективности имеет вид

$$\overline{\Delta}_{\varepsilon}(n) = sT^{n} - \overline{T}_{\varepsilon} = (s-1)(T^{n} - t) - (n+s-1)\varepsilon \ge 0,$$

что равносильно следующему неравенству:

$$\varepsilon \le \frac{(s-1)T^n(n-1)}{n(n+s-1)} \,. \tag{7}$$

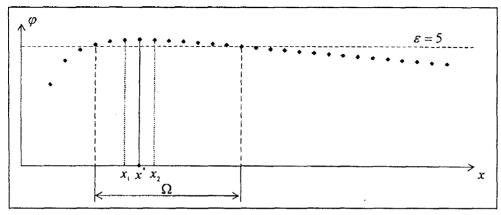
Введя функцию  $\varphi(x)=(s-1)T^n(x-1)\ /\ x(x+s-1),\ x>0,\$ легко по-казать, что она достигает максимума при  $x=1+\sqrt{s}$ .

Выбрав  $n = x = 1 + \sqrt{s}$ , если  $\sqrt{s}$  целое, или  $n = x \in \{1 + [\sqrt{s}], 2 + [\sqrt{s}]\}$ , если  $\sqrt{s}$  нецелое, получим эффективную систему одинаково распределенных процессов, что и доказывает необходимость.

Достаточность следует из (7), поскольку  $\varphi(x)$  достигает наибольшего значения при  $n=x=1+\sqrt{s}$ , если  $\sqrt{s}$  целое, или при  $n=x\in\{1+[\sqrt{s}],2+[\sqrt{s}]\}$ , если  $\sqrt{s}$  нецелое.

Замечание. При p=s=2 одинаково распределенная система конкурирующих процессов будет эффективной, если отношение  $\frac{\varepsilon}{T^n} \leq \frac{n-1}{n(n+1)}$ .

На рис. 1 изображен график функции  $y=\varphi(x), \ x>0$ , при фиксированных  $s=50, \ T^n=7, \ \varepsilon=5.$  Существование эффективной одинаково распределенной системы конкурирующих процессов определяется областью  $\Omega$ . Все целочисленные точки отрезка  $\Omega$  являются значениями n, при которых система эффективна, при этом  $x_1=1+[\sqrt{s}]=8, \ x^*=1+\sqrt{s}, \ x_2=2+[\sqrt{s}]=9.$ 



Puc. 1

Решение задачи об оптимальности одинаково распределенной системы, состоящей из n конкурирующих процессов, для достаточного числа процессоров следует из теоремы.

**Теорема 5.** Для того чтобы эффективная одинаково распределенная система конкурирующих процессов была оптимальной при  $s \le p$  и заданных  $p \ge 2$ ,  $T^n$ ,  $\varepsilon > 0$ , необходимо и достаточно, чтобы она была стационарной и число процессов n в системе равнялось тому из чисел

$$\left[\sqrt{rac{(s-1)T^n}{arepsilon}}\,\,
ight],\,\,\left[\sqrt{rac{(s-1)T^n}{arepsilon}}\,\,
ight]+1$$
, в котором функция  $\overline{\Delta}_{arepsilon}(x)$  достигает

наибольшего значения. Здесь [x] — наибольшее целое, не превосходящее x.

Доказательство. В силу теоремы 2 оптимальную одинаково распределенную систему следует искать среди класса стационарных. Тогда очевидно, что  $\overline{\Delta}_s(n) = (s-1)T^n(1-1/n) - (n+s-1)\varepsilon$ .

Необходимость. Введем функцию действительного аргумента х вида

$$\overline{\Delta}_{\varepsilon}(x) = (s-1)T^{n}(1-1/x) - (x+s-1)\varepsilon, \quad x \ge 1.$$

Согласно определению 4 одинаково распределенная система будет оптимальной в той точке x , где  $\overline{\Delta}_{\varepsilon}(x)$  достигает своего наибольшего значения.

Покажем, что это возможно в точке  $x = \sqrt{\frac{(s-1)T^n}{s}}$ . Действительно,

$$\overline{\Delta}_{\varepsilon}'(x) = \frac{(s-1)T^n}{x^2} - \varepsilon, \quad \overline{\Delta}_{\varepsilon}''(x) = -\frac{2}{s} \frac{T^n(s-1)}{s^3} < 0, \text{ tak kak } s \geqslant 2, \quad x > 0.$$

Следовательно, функция  $\overline{\Delta}_{\varepsilon}(x)$  становится максимальной в точке, где  $\overline{\Delta}'_{s}(x) = 0$ , т.е.  $x^{*} = \sqrt{\frac{(s-1)T^{n}}{s}}$ . Целочисленными точками, в которых достигается наибольшее значение функции  $\overline{\Delta}_{\varepsilon}(x)$ , будут  $n=\left[x^{*}\right]$  или  $n=[x^*]+1$ . Итак, в качестве n можно выбрать одно из чисел  $\left\lceil \sqrt{\frac{(s-1)T^n}{\varepsilon}} \right\rceil$ ,  $\left\lceil \sqrt{\frac{(s-1)T^n}{\varepsilon}} \right\rceil + 1$ , в которых функция  $\overline{\Delta}_{\varepsilon}(x)$  принимает

Достаточность следует из свойств выпуклости функции  $\overline{\Delta}_{arepsilon}(x)$  при  $s \le p$  на отрезке [2, n].

#### 3. КРИТЕРИИ ЭФФЕКТИВНОСТИ СИСТЕМ ОДИНАКОВО РАСПРЕДЕЛЕННЫХ КОНКУРИРУЮЩИХ ПРОЦЕССОВ ПРИ ОГРАНИЧЕННОМ ЧИСЛЕ ПРОЦЕССОРОВ

Сформулируем необходимые и достаточные условия (критерии) эффективности и оптимальности одинаково распределенных систем конкурирующих процессов в случае, когда число процессоров ограничено.

В разд. 1 показано, что с учетом параметра  $\varepsilon > 0$ , характеризующего время дополнительных системных расходов на организацию параллельного использования блоков множеством распределенных конкурирующих процессов, для вычисления минимального общего времени  $T(p, n, s, \varepsilon)$  в асинхронном и втором синхронном режимах для класса одинаково распределенных конкурирующих процессов имеют место формулы

$$T(p,n,s,\varepsilon) = \begin{cases} k \ T^n + (p-1)t_{\max}^n & \text{при } s = kp, \ k > 1, \ T^n > pt_{\max}^n; \\ (k+1)T^n + (r-1)t_{\max}^n & \text{при } s = kp + r, \ k \ge 1, \ 1 \le r < p, \ T^n > pt_{\max}^n, \end{cases}$$
 где  $T^n = \sum_{i=1}^n t_i'$  — суммарное время выполнения каждого из блоков  $Q_j$ 

n процессами,  $t_{\max}^n = \max_{1 \le i \le n} t_i'$ 

Имеет место теорема.

Теорема 6. Если  $p, n, s \ge 3, n = s \ne 3,$  и  $\varepsilon \le \min_{1 \le i \le n} t_i'$ , то одинаково рас-

пределенная система п конкурирующих процессов в многопроцессорной системе с p процессорами эффективна тогда и только тогда, когда выполняются следующие условия:

$$sn \geqslant \left\{ \begin{array}{ll} 2(kn+p-1), & \text{если } s=kp, \ k>1; \\ \\ 2((k+1)n+r-1), & \text{если } s=kp+r, \ k\geqslant 1, \ 1\leqslant r$$

Доказательство. 1. Для случая  $s=kp,\ k>1,\$ условие эффективности **ра**вносильно неравенству

$$\frac{(s-k)T^n - (p-1)t_{\max}^n}{\varepsilon} \ge kn + p - 1.$$

Согласно условию теоремы  $\varepsilon \leq \min t_i'$  имеет место неравенство  $1 \leq i \leq n$ 

$$\frac{(s-k)T^n - (p-1)t_{\max}^n}{s} \ge (s-k)n - p + 1.$$

Из этих неравенств следует  $sn \ge 2(kn + p - 1)$ .

2. В случае, когда s = kp + r,  $k \ge 1$ ,  $1 \le r < p$ , имеют место такие неравенства:

$$\frac{(s-k-1)T^n-(r-1)t_{\max}^n}{\varepsilon} \ge (k+1)n+r-1,$$

$$\frac{(s-k-1)T^{n}-(r-1)t_{\max}^{n}}{s} \ge (s-k-1)n-r+1,$$

откуда  $sn \ge 2((k+1)n + r - 1)$ .

Сформулируем и докажем критерии существования эффективной системы одинаково распределенных конкурирующих процессов в зависимости от величины накладных расходов  $\varepsilon > 0$  в случае, когда число процессоров ограничено.

**Теорема 7.** Для существования эффективной одинаково распределенной системы конкурирующих процессов при заданных  $p \ge 2$ ,  $T^n$ ,  $\varepsilon > 0$  необходимо и достаточно, чтобы выполнялись следующие условия.

1. При s = kp имеем k > 1,

$$\varepsilon \leqslant \left\{ \begin{aligned} \varphi_1\left(\frac{1+\sqrt{p}}{k}\right), & \text{если } \frac{1+\sqrt{p}}{k} \text{ целое;} \\ \max \left\{ \varphi_1\left(\left[\frac{1+\sqrt{p}}{k}\right]\right), \varphi_1\left(\left[\frac{1+\sqrt{p}}{k}\right]+1\right) \right\}, & \text{если } \frac{1+\sqrt{p}}{k} \text{ нецелое,} \end{aligned} \right.$$

где  $\varphi_1(x) = (p-1)T^n(kx-1) / x(kx+p-1)$ , а [x] — наибольшее целое, не превосходящее x.

2. При  $s = kp + r, k \ge 1, 1 \le r < p,$  имеем

$$\varepsilon \leqslant \begin{cases} \varphi_2(x), & \text{если } x \text{ целое;} \\ \max\{\varphi_2([x]), \ \varphi_2([x]+1)\}, & \text{если } x \text{ нецелое,} \end{cases}$$

где 
$$\varphi_2(x) = \frac{[(p-1)kx + (r-1)(x-1)]T^n}{x[(k+1)x + r-1]}$$
,  $[x]$  — наибольшее целое, не превосходящее  $x, x = \frac{r-1}{(p-1)k + r-1} \left(1 + \sqrt{1 + \frac{(p-1)k + r-1}{k+1}}\right)$ .

Доказательство. В силу (4) условие эффективности при  $s=kp,\ k>1$ , будет иметь вид  $\overline{\Delta}_{\varepsilon}(n)=(p-1)(kT^n-t)-(kn+p-1)\varepsilon\geq 0$ , что равносильно неравенству  $\varepsilon\leq \frac{(p-1)T^n(kn-1)}{n(kn+p-1)}$ .

Функция  $\varphi_1(x) = (p-1)T^n(kx-1) / x(kx+p-1), x>0$ , достигает максимума при  $x=\frac{1+\sqrt{p}}{k}$ . Следовательно, для эффективной одинаково распределенной системы при  $s=kp,\ k>1$ , число процессов должно быть  $n=x=\frac{1+\sqrt{p}}{k}$ , если  $\frac{1+\sqrt{p}}{k}$  целое, и  $n=x\in\left\{\left[\frac{1+\sqrt{p}}{k}\right],\ \left[\frac{1+\sqrt{p}}{k}\right]+1\right\}$ , если  $\frac{1+\sqrt{p}}{k}$  нецелое.

В случае  $s = kp + r, \ k \ge 1, \ 1 \le r < p,$  условие эффективности имеет вид

$$\varepsilon \leq \frac{\left[(p-1)kn + (r-1)(n-1)\right]T^n}{n\left[(k+1)n + r - 1\right]}.$$

Введя функцию  $\varphi_2(x) = [(p-1)kx + (r-1)(x-1)]T^n/x[(k+1)x + r-1],$  x > 0, можно показать, что она достигает максимума при

$$x = \frac{r-1}{(p-1)k+r-1} \left( 1 + \sqrt{1 + \frac{(p-1)k+r-1}{k+1}} \right).$$

Следовательно, одинаково распределенная система эффективна, если число процессов в ней n=x, если x целое, и  $n=x\in\{[x],\ [x]+1\}$ , если x нецелое.

Достаточность доказывается аналогично, как и в теореме 4.

Полученные критерии эффективности и оптимальности систем одинаково распределенных конкурирующих процессов могут использоваться при проектировании системного и прикладного программного обеспечения для МС и сетей при решении проблем оптимального использования вычислительных ресурсов.

#### СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

- 1. Капитонова Ю.В., Летичевский А.А. Математическая теория проектирования вычислительных систем. М.: Наука, 1988. 296 с.
- 2. Капитонова Ю.В., Кляус П.С., Коваленко Н.С. Математическая модель конвейерной организации конкурирующих процессов // Докл. АН СССР. 1987. 293, № 6. С. 1320–1324.
- 3. Воеводин В.В., Воеводин Вл.В. Параллельные вычисления. СПб.: Наука, 2002. 520 с.
- 4. Эндрюс Г.Р. Основы многопоточного, параллельного и распределенного программирования. М.: Мир, 2003. 325 с.
- Коваленко Н.С., Самаль С.А. Вычислительные методы реализации интеллектуальных моделей сложных систем. — Минск: Беларуская навука, 2004. — 166 с.

Поступила 16.03.2005