ТРУДЫ

ИНСТИТУТА СИСТЕМНОГО ПРОГРАММИРОВАНИЯ РАН

PROCEEDINGS OF THE INSTITUTE FOR SYSTEM PROGRAMMING OF THE RAS

ISSN Print 2079-8156
Том 36 Выпуск 5

ISSN Online 2220-6426
Volume 36 Issue 5

Институт системного
программирования
им. В.П. Иванникова РАН

Москва, 2024

ИСП РАН

ISSN 2079-8156 (Print), ISSN 2220-6426 (Online)

Труды Института системного программирования РАН
Proceedings of the Institute for System Programming of the RAS

Труды ИСП РАН – это издание с двойной анонимной системой рецензирования, публикующее научные статьи, относящиеся ко всем областям системного программирования, технологий программирования и вычислительной техники. Целью издания является формирование научно-информационной среды в этих областях путем публикации высококачественных статей в открытом доступе.

Издание предназначено для исследователей, студентов и аспирантов, а также практиков. Оно охватывает широкий спектр тем, включая, в частности, следующие:

- операционные системы;
- компиляторные технологии;
- базы данных и информационные системы;
- параллельные и распределенные системы;
- автоматизированная разработка программ;
- верификация, валидация и тестирование;
- статический и динамический анализ;
- защита и обеспечение безопасности ПО;
- компьютерные алгоритмы;
- искусственный интеллект.

Журнал издается по одному тому в год, шесть выпусков в каждом томе.

Поддерживается открытый доступ к содержанию издания, обеспечивая доступность результатов исследований для общественности и поддерживая глобальный обмен знаниями.

Труды ИСП РАН реферируются и/или индексируются в:

Proceedings of ISP RAS are a double-blind peer-reviewed journal publishing scientific articles in the areas of system programming, software engineering, and computer science. The journal's goal is to develop a respected network of knowledge in the mentioned above areas by publishing high quality articles on open access.

The journal is intended for researchers, students, and practitioners. It covers a wide variety of topics including (but not limited to):

- Operating Systems.
- Compiler Technology.
- Databases and Information Systems.
- Parallel and Distributed Systems.
- Software Engineering.
- Software Modeling and Design Tools.
- Verification, Validation, and Testing.
- Static and Dynamic Analysis.
- Software Safety and Security.
- Computer Algorithms.
- Artificial Intelligence.

The journal is published one volume per year, six issues in each volume.

Open access to the journal content allows to provide public access to the research results and to support global exchange of knowledge. **Proceedings of ISP RAS** is abstracted and/or indexed in:

УДК004.45

Редколлегия

Главный редактор - Аветисян Арутюн Ишханович, академик РАН, доктор физико-математических наук, профессор, ИСП РАН (Москва, Российская Федерация)

Заместитель главного редактора – Карпов Леонид Евгеньевич, д.т.н., ИСП РАН (Москва, Российская Федерация)

Члены редколлегии
Воронков Андрей Анатольевич, доктор физико-математических наук, профессор, Университет Манчестера (Манчестер, Великобритания)
Вирбицкайте Ирина Бонавентуровна, профессор, доктор физико-математических наук, Институт систем информатики им. академика А.П. Ершова СО РАН (Новосибирск, Россия)
Коннов Игорь Владимирович, кандидат физико-математических наук, Технический университет Вены (Вена, Австрия)
Ластовецкий Алексей Леонидович, доктор физико-математических наук, профессор, Университет Дублина (Дублин, Ирландия)
Ломазова Ирина Александровна, доктор физико-математических наук, профессор, Национальный исследовательский университет «Высшая школа экономики» (Москва, Российская Федерация)
Новиков Борис Асенович, доктор физико-математических наук, профессор, Санкт-Петербургский государственный университет (Санкт-Петербург, Россия)
Петренко Александр Федорович, доктор наук, Исследовательский институт Монреаля (Монреаль, Канада)
Черных Андрей, доктор физико-математических наук, профессор, Научно-исследовательский центр CICESE (Энсенада, Баха Калифорния, Мексика)
Шустер Ассаф, доктор физико-математических наук, профессор, Технион — Израильский технологический институтTechnion (Хайфа, Израиль)

Адрес: 109004, г. Москва, ул. А. Солженицына, дом 25.
Телефон: +7(495) 912-44-25
E-mail: info-isp@ispras.ru
Сайт: http://www.ispras.ru/proceedings/

Editorial Board

Editor-in-Chief - Arutyun I. Avetisyan, Academician of RAS, Dr. Sci. (Phys.–Math.), Professor, Ivannikov Institute for System Programming of the RAS (Moscow, Russian Federation)

Deputy Editor-in-Chief – Leonid E. Karpov, Dr. Sci. (Eng.), Ivannikov Institute for System Programming of the RAS (Moscow, Russian Federation)

Editorial Members
Igor Konnov, PhD (Phys.–Math.), Vienna University of Technology (Vienna, Austria)
Alexey Lastovetsky, Dr. Sci. (Phys.–Math.), Professor, UCD School of Computer Science and Informatics (Dublin, Ireland)
Irina A. Lomazova, Dr. Sci. (Phys.–Math.), Professor, National Research University Higher School of Economics (Moscow, Russian Federation)
Boris A. Novikov, Dr. Sci. (Phys.–Math.), Professor, St. Petersburg University (St. Petersburg, Russian Federation)
Alexandre F. Petrenko, PhD, Computer Research Institute of Montreal (Montreal, Canada)
Assaf Schuster, Ph.D., Professor, Technion - Israel Institute of Technology (Haifa, Israel)
Andrei Tchernykh, Dr. Sci., Professor, CICESE Research Centre (Ensenada, Baja California, Mexico).
Irina B. Virbitskaite, Dr. Sci. (Phys.–Math.), The A.P. Ershov Institute of Informatics Systems, Siberian Branch of the RAS (Novosibirsk, Russian Federation)
Andrey Voronkov, Dr. Sci. (Phys.–Math.), Professor, University of Manchester (Manchester, United Kingdom)

Address: 25, Alexander Solzhenitsyn st., Moscow, 109004, Russia.
Tel: +7(495) 912-44-25
E-mail: info-isp@ispras.ru
Web: http://www.ispras.ru/en/proceedings

© Институт Системного Программирования им. В.П. Иванникова РАН, 2024

Содержание

Table of Contents

DOI: 10.15514/ISPRAS-2024-36(5)-5

Эффективность систем одинаково распределенных конкурирующих процессов при неограниченном и ограниченном параллелизме

П.А. Павлов, ORCID: 0009-0008-1233-7387 <pavlov.p@polessu.by>

Полесский государственный университет,
Республика Беларусь, 225710, г. Пинск, ул. Днепровской флотилии, д. 23.

Аннотация. В статье *с учетом ограниченного числа копий структурированного программного ресурса* проведен сравнительный анализ математических соотношений для вычисления общего времени выполнения множества одинаково распределенных конкурирующих процессов в асинхронном и двух синхронных режимах, в случае неограниченного и ограниченного параллелизма по числу процессоров многопроцессорной системы получено достаточное условие эффективности одинаково распределенной системы, доказано необходимое и достаточное условие существования эффективной системы одинаково распределенных конкурирующих процессов в зависимости от величины дополнительных системных расходов.

Ключевые слова: распределенный процесс; взаимодействующие процессы; программный ресурс; асинхронный (синхронный) режим; неограниченный (ограниченный) параллелизм; эффективность.

Для цитирования: Павлов П.А. Эффективность систем одинаково распределенных конкурирующих процессов при неограниченном и ограниченном параллелизме. Труды ИСП РАН, том 36, вып. 5, 2024 г., стр. 67–80. DOI: 10.15514/ISPRAS–2024–36(5)–5.

Efficiency of Systems of Identically Distributed Competing Processes with Unlimited and Limited Parallelism

P.A. Pavlov, ORCID: 0009-0008-1233-7387 <pavlov.p@polessu.by>

Polessky State University,
23, Dneprovskoy flotilii st., Pinsk, 225710, Belarus.

Abstract. In the article, taking into account the limited number of copies of a structured software resource, a comparative analysis of mathematical relationships for calculating the total execution time of a set of identically distributed competing processes in asynchronous and two synchronous modes was carried out; in the case of unlimited and limited parallelism by the number of processors of a multiprocessor system, a sufficient condition for the efficiency of an identically distributed system was obtained , a necessary and sufficient condition for the existence of an efficient system of identically distributed competing processes has been proven depending on the amount of additional system costs.

Keywords: distributed process; interacting processes; software resource; asynchronous (synchronous) mode; unlimited (limited) parallelism; efficiency.

For citation: Pavlov P.A. Efficiency of systems of identically distributed competing processes with unlimited and limited parallelism. Trudy ISP RAN/Proc. ISP RAS, vol. 36, issue 5, 2024. pp. 67-80 (in Russian). DOI: 10.15514/ISPRAS-2024-36(5)-5.

1. Введение

Быстрое развитие информационно-коммуникационных и сетевых технологий привело к интенсивному использованию географически распределенных вычислительных ресурсов и созданию на их основе динамически-масштабируемых высокопроизводительных *распределенных вычислительных систем* (РВС), одним из основных преимуществ которых является возможность параллельной обработки процессов [1-3]. При проектировании и создании РВС особую актуальность приобретают задачи построения и исследования математических моделей организации взаимодействия параллельных процессов, конкурирующих за программный ресурс (ПР). Данные задачи имеют как прямой, так и обратный характер. При постановке прямых задач условиями являются значения параметров распределенной вычислительной системы, а решением минимальное общее время реализации заданных объемов вычислений. Постановка обратных задач сводится к поиску критериев эффективности и оптимальности организации выполнения множества распределенных процессов. Случай, когда в общей памяти РВС имеется одна копия ПР, с различных точек зрения был изучен в работах [4-9]. В частности, были решены задачи нахождения минимального общего времени выполнения распределенных конкурирующих процессов, использующих структурированный на блоки ПР в различных режимах взаимодействия процессов, процессоров и блоков, проведен сравнительный анализ режимов взаимодействия процессов, процессоров и блоков, получены критерии эффективности и оптимальности структурирования программных ресурсов, решен ряд оптимизационных задач по расчету числа процессов, процессоров и др. Изучение задач, относящихся к оптимальной организации распределенных параллельных вычислений, приобретает особую актуальность в случае, когда в общей памяти РВС может быть одновременно размещено ограниченное число копий программного ресурса.

2. Математическая модель системы распределенных вычислений при ограниченном числе копий программного ресурса

Как и в работах [4-9] под *взаимодействующими процессами*, т. е. которые влияют на поведение друг друга путем обмена информацией, будем понимать выполнение последовательности наборов блоков $I_s = (1,\ 2,\ \ldots,\ s)$. Многократно выполняемую в многопроцессорной системе программу или ее часть будем называть *программным ресурсом* (ПР), а множество процессов его выполняющим – *конкурирующими.*

Математическая модель системы распределенной обработки взаимодействующих процессов, конкурирующих за использование ограниченного числа копий структурированного программного ресурса, включает в себя [10-12]: $p \geq 2$, процессоров многопроцессорной системы, которые имеют доступ к общей памяти; $n \geq 2$, распределенных взаимодействующих конкурирующих процессов; $s \geq 2$, блоков структурированного на блоки программного ресурса; матрицу $T = [t_{ij}]$, $i = \overline{1,n}$, $j = \overline{1,s}$, времен выполнения блоков программного ресурса распределенными взаимодействующими конкурирующими процессами; $2 \leq c \leq p$, число копий структурированного на блоки программного ресурса, которые могут одновременно находиться в оперативной памяти, доступной для всех p процессоров; $\theta > 0$ – параметр, характеризующий время дополнительных системных расходов, связанных с организацией конвейерного режима использования блоков структурированного программного ресурса множеством взаимодействующих конкурирующих процессов при распределенной обработке.

Будем также предполагать, что число процессов n кратно числу копий c структурированного программного ресурса, т. е. $n = mc$, где $m = n/c \geq 2$, и что взаимодействие процессов, процессоров и блоков программного ресурса подчинено следующим условиям: 1) ни один из процессоров не может обрабатывать одновременно более одного блока; 2) процессы выполняются в параллельно–конвейерном режиме группами, т. е. осуществляется одновременное (параллельное) выполнение c копий каждого блока в сочетании с конвейеризацией группы из c копий Q_j–го блока, $j = \overline{1, s}$, по процессам и процессорам; 3) обработка каждого блока программного ресурса осуществляется без прерываний; 4) в случае, когда число блоков программного ресурса $s \leq \left[\frac{p}{c}\right]$, где $[x]$ – целая часть числа, для каждого i–го процесса, где $i = c(l-1)+q$, $l = \overline{1, m}$, $q = \overline{1, c}$, распределение блоков Q_j, $j = \overline{1, s}$, программного ресурса по процессорам осуществляется по правилу: блок с номером j распределяется на процессор с номером $c(j-1)+q$.

Далее, как и в случае одной копии программного ресурса [4-9], введем базовые режимы конвейерной реализации взаимодействия процессов, процессоров и блоков ПР, но с учетом наличия c копий программного ресурса, а также определение одинаково распределенной и стационарной систем.

Асинхронной режим взаимодействия процессов, процессоров и блоков структурированного программного ресурса предполагает, что начало выполнения копий очередного Q_j–го блока, $j = \overline{1, s}$, определяется наличием c процессоров и готовностью копий блока к выполнению, при этом программный блок считается готовым к выполнению, если он не выполняется ни на одном из процессоров.

Первый синхронный режим обеспечивает линейный порядок выполнения блоков программного ресурса внутри каждого из процессов без задержек, т. е. в случае, когда $2 \leq s \leq \left[\frac{p}{c}\right]$, момент завершения выполнения Q_j–го блока, $j = \overline{1, s-1}$, процессом с номером $i = (l-1)c + q$, $l = \overline{1, m}$, $q = \overline{1, c}$, на $((j-1)c+q)$–м процессоре совпадает с моментом начала выполнения следующего Q_{j+1}–го блока на процессоре с номером $(jc+q)$.

При **втором синхронном режиме** в случае, когда $2 \leq s \leq \left[\frac{p}{c}\right]$, момент завершения выполнения i–м процессом, где $i = (l-1)c + q$, $l = \overline{1, m-1}$, $q = \overline{1, c}$, j–го блока, $j = \overline{1, s}$, на $((j-1)c+q)$–м процессоре совпадает с моментом начала выполнения j–го блока процессом с номером $(i+c)$ на этом же процессоре, т.е. обеспечивается непрерывное выполнение каждого блока всеми процессами.

Определение 1. Систему распределенных конкурирующих процессов будем называть **одинаково распределенной**, если времена выполнения всех блоков ПР каждым из процессов совпадают и равны t_i^{θ}, т. е. справедлива цепочка равенств $t_{i1}^{\theta} = t_{i2}^{\theta} = \ldots = t_{is}^{\theta} = t_i^{\theta}$, для всех $i = \overline{1, n}$.

Будем рассматривать случаи *неограниченного* по числу процессоров распределенной вычислительной системы, т. е. когда $s \le \left[\dfrac{p}{c}\right]$, и *ограниченного*, когда $s > \left[\dfrac{p}{c}\right]$, параллелизма.

3. Анализ режимов функционирования одинаково распределенных систем конкурирующих процессов

В [10-12] подробно исследованы базовые асинхронный и два синхронных конвейерных режима взаимодействия распределенных процессов в условиях конкуренции за ограниченное число копий программного ресурса. Для вычисления общего времени выполнения множества распределенных процессов в рамках очерченных режимов с учетом $2 \le c \le p$ копий ПР получены различные математические соотношения. Определенный теоретический и практический интерес представляют задачи сравнительного анализа полученных соотношений. Проведем такой анализ для класса *одинаково распределенных* систем с учетом параметра $\theta > 0$, характеризующего время дополнительных системных расходов, связанных с организацией конвейерного режима использования блоков структурированного программного ресурса множеством конкурирующих процессов при распределенной обработке.

Для проведения сравнительного анализа множество из n процессов разобьем на c подмножеств по m процессов в каждом. В каждое q-е подмножество, $q = \overline{1,c}$, будут включены процессы с номерами $i = c(l-1)+q$, $l = \overline{1,m}$, блоки которых будут выполняться на $(c(j-1)+q)$-х процессорах, $j = \overline{1,s}$. Через $T_q^{\theta} = \sum_{i=1}^{m} t_{c(i-1)+q}^{\theta}$ обозначим суммарное время выполнения q-го подмножества процессов, а $t_{\max}^{q+} = \max_{1 \le i \le m} t_{c(i-1)+q}^{\theta}$ – максимальное время выполнения блока из этого подмножества, $q = \overline{1,c}$.

Определение 2. **Характеристическим** набором одинаково распределенной системы конкурирующих процессов будем называть набор параметров вида $(t_q^{\theta},\ t_{c+q}^{\theta},\ t_{2c+q}^{\theta},\dots,\ t_{c(m-1)+q}^{\theta},\ T_q^{\theta})$, $q = \overline{1,c}$.

Пусть $\beta = \left\{ (t_q^{\theta},\ t_{c+q}^{\theta},\dots,\ t_{c(m-1)+q}^{\theta},\ T_q^{\theta}) \;\middle|\; T_q^{\theta} = \sum_{i=1}^{m} t_{c(i-1)+q}^{\theta},\ q = \overline{1,c} \right\}$ – множество всех допустимых характеристических наборов системы одинаково распределенных конкурирующих процессов. Выделим из множества β подмножество характеристических наборов вида:

$$S(\beta) = \left\{ \begin{matrix} (t_q^{\theta},\ t_{c+q}^{\theta},\ t_{2c+q}^{\theta},\dots,\ t_{c(m-1)+q}^{\theta},\ T_q^{\theta}) \in \beta,\ \textit{где} \\ t_q^{\theta} \le t_{c+q}^{\theta} \le t_{2c+q}^{\theta} \le \dots \le t_{c(k-1)+q}^{\theta} \ge t_{ck+q}^{\theta} \ge \dots \ge t_{c(m-1)+q}^{\theta},\ k = \overline{1,m},\ q = \overline{1,c} \end{matrix} \right\}.$$

Для выделенного подмножества характеристических наборов $S(\beta)$ справедлива

Теорема 1. *В случае неограниченного параллелизма по числу процессоров РВС минимальные общие времена выполнения множества одинаково распределенных конкурирующих процессов в многопроцессорной системе с параметрами* $p \ge 2$, $n \ge 2$, $s \ge 2$, $2 \le c \le p$, $\theta > 0$ *в асинхронном и двух синхронных режимах совпадают, т. е.*

$$T_{ac}^{op}(p,n,s,c,\theta) = T_{1c}^{op}(p,n,s,c,\theta) = T_{2c}^{op}(p,n,s,c,\theta).$$

Доказательство. Для любого характеристического набора одинаково распределенной системы в случае неограниченного параллелизма для асинхронного режима и второго синхронного режима, обеспечивающего непрерывное выполнение каждого блока всеми процессами, минимальное общее время выполнения n одинаково распределенных процессов, конкурирующих за использование c копий структурированного на s блоков программного ресурса в многопроцессорной системе с p процессорами с учетом параметра $\theta > 0$, в том числе и для любого характеристического набора $\mu \in S(\beta)$, вычисляется по формуле [9,10]:

$$T_{ac}^{op}(p,n,s,c,\theta) = T_{2c}^{op}(p,n,s,c,\theta) = \max_{1 \le q \le c}(T_q^{\theta} + (s-1)t_{\max}^{q+}).$$

Если же взаимодействие процессов, процессоров и блоков структурированного ПР осуществляется в первом синхронном режиме, при котором обеспечивается выполнение блоков программного ресурса внутри каждого из процессов без задержек, то для любого характеристического набора из β при $2 \le s \le \left[\frac{p}{c}\right]$ выполняется равенство [11]:

$$T_{1c}^{op}(p,n,s,c,\theta) = \max_{1 \le q \le c}\left(T_q^{\theta} + (s-1)\left[t_{c(m-1)+q}^{\theta} + \sum_{i=2}^{m}\max(t_{c(i-2)+q}^{\theta} - t_{c(i-1)+q}^{\theta}, 0)\right]\right).$$

Покажем, что $t_{c(m-1)+q}^{\theta} + \sum_{i=2}^{m}\max(t_{c(i-2)+q}^{\theta} - t_{c(i-1)+q}^{\theta}, 0) = t_{\max}^{q+}$. Так как $t_{\max}^{q+} = \max_{1 \le i \le m} t_{c(i-1)+q}^{\theta}$, $q = \overline{1,c}$, то для всех номеров $1 \le i \le k \le m$ имеем $\sum_{i=2}^{k}\max(t_{c(i-2)+q}^{\theta} - t_{c(i-1)+q}^{\theta}, 0) = 0$, а для $1 \le k \le i \le m$ имеет место равенство $\sum_{i=k+1}^{m}\max(t_{c(i-2)+q}^{\theta} - t_{c(i-1)+q}^{\theta}, 0) = t_{c(k-1)+q}^{\theta} - t_{c(m-1)+q}^{\theta}$.

Следовательно, $t_{c(m-1)+q}^{\theta} + \sum_{i=2}^{m}\max(t_{c(i-2)+q}^{\theta} - t_{c(i-1)+q}^{\theta}, 0) = t_{c(k-1)+q}^{\theta} = t_{\max}^{q+}$. Теорема доказана.

Теорема 2. *В случае неограниченного параллелизма по числу процессоров многопроцессорной системы если допустимый характеристический набор* μ *одинаково распределенной системы с параметрами* $p \ge 2$, $n \ge 2$, $s \ge 2$, $2 \le c \le p$, $\theta > 0$, *не принадлежит подмножеству* $S(\beta)$, *то*

$$T_{1c}^{op}(p,n,s,c,\theta) > T_{ac}^{op}(p,n,s,c,\theta) = T_{2c}^{op}(p,n,s,c,\theta).$$

Доказательство. Так как для асинхронного и второго синхронного режимов минимальные общие времена выполнения одинаково распределенных конкурирующих процессов с учетом ограниченного числа копий программного ресурса равны и определяются по формуле

$$T_{ac}^{op}(p,n,s,c,\theta) = T_{2c}^{op}(p,n,s,c,\theta) = \max_{1 \le q \le c}(T_q^{\theta} + (s-1)t_{\max}^{q+}),$$

а для первого синхронного режима по формуле

$$T_{1c}^{op}(p,n,s,c,\theta) = \max_{1 \le q \le c}\left(T_q^{\theta} + (s-1)\left[t_{c(m-1)+q}^{\theta} + \sum_{i=2}^{m}\max(t_{c(i-2)+q}^{\theta} - t_{c(i-1)+q}^{\theta}, 0)\right]\right),$$

то доказательство неравенства $T_{1c}^{op}(p,n,s,c,\theta) > T_{ac}^{op}(p,n,s,c,\theta)$ и будет доказательством теоремы.

Доказательство неравенства

$$t_{c(m-1)+q}^{\theta} + \sum_{i=2}^{m} \max(t_{c(i-2)+q}^{\theta} - t_{c(i-1)+q}^{\theta}, 0) - t_{\max}^{q+} > 0, \ q = \overline{1,c}, \qquad (1)$$

проведем индукцией по числу процессов $m \geq 2$.

Пусть $m = 2$. В этом случае множество всех допустимых характеристических наборов системы одинаково распределенных конкурирующих процессов $\beta = (t_q^{\theta},\ t_{c+q}^{\theta}) \in S(\beta)$, $q = \overline{1,c}$.

Пусть неравенство (1) выполняется при $m = k$, покажем, что оно справедливо и при $m = k + 1$. При $m = k + 1$ получим:

$$t_{ck+q}^{\theta} + \sum_{i=2}^{k+1} \max(t_{c(i-2)+q}^{\theta} - t_{c(i-1)+q}^{\theta}, 0) - t_{\max}^{q+} > 0, \text{ где } t_{\max}^{q+} = \max_{1 \leq i \leq k+1} t_{c(i-1)+q}^{\theta}, \ q = \overline{1,c}.$$

Последнее неравенство для всех $q = \overline{1,c}$ равносильно неравенству вида:

$$t_{ck+q}^{\theta} + \sum_{i=2}^{k} \max(t_{c(i-2)+q}^{\theta} - t_{c(i-1)+q}^{\theta}, 0) + \max(t_{c(k-1)+q}^{\theta} - t_{ck+q}^{\theta}, 0) - \max_{1 \leq i \leq k+1} t_{c(i-1)+q}^{\theta} > 0.$$

Если $\max\limits_{1 \leq i \leq k+1} t_{c(i-1)+q}^{\theta}$ достигается при $i = k+1$, т. е. $\max\limits_{1 \leq i \leq k+1} t_{c(i-1)+q}^{\theta} = t_{ck+q}^{\theta}$, то

$$t_{ck+q}^{\theta} + \sum_{i=2}^{k} \max(t_{c(i-2)+q}^{\theta} - t_{c(i-1)+q}^{\theta}, 0) + \max(t_{c(k-1)+q}^{\theta} - t_{ck+q}^{\theta}, 0) - t_{ck+q}^{\theta} =$$

$$= \sum_{i=2}^{k} \max(t_{c(i-2)+q}^{\theta} - t_{c(i-1)+q}^{\theta}, 0) + \max(t_{c(k-1)+q}^{\theta} - t_{ck+q}^{\theta}, 0) > 0.$$

Здесь первое слагаемое больше нуля, ибо в противном случае $\mu \in S(\beta)$, что противоречит условию теоремы, а второе слагаемое равно нулю, так как $t_{ck+q}^{\theta} \geq t_{c(k-1)+q}^{\theta}$.

Если значение $\max\limits_{1 \leq i \leq k+1} t_{c(i-1)+q}^{\theta}$ находится в промежутке $1 \leq i \leq k$, то имеем:

$$t_{ck+q}^{\theta} + \sum_{i=2}^{k} \max(t_{c(i-2)+q}^{\theta} - t_{c(i-1)+q}^{\theta}, 0) + \max(t_{c(k-1)+q}^{\theta} - t_{ck+q}^{\theta}, 0) - \max_{1 \leq i \leq k+1} t_{c(i-1)+q}^{\theta} =$$

$$= t_{c(k-1)+q}^{\theta} + \sum_{i=2}^{k} \max(t_{c(i-2)+q}^{\theta} - t_{c(i-1)+q}^{\theta}, 0) - \max_{1 \leq i \leq k+1} t_{c(i-1)+q}^{\theta} +$$

$$+ t_{ck+q}^{\theta} - t_{c(k-1)+q}^{\theta} + \max(t_{c(k-1)+q}^{\theta} - t_{ck+q}^{\theta}, 0).$$

Здесь $t_{c(k-1)+q}^{\theta} + \sum\limits_{i=2}^{k} \max(t_{c(i-2)+q}^{\theta} - t_{c(i-1)+q}^{\theta}, 0) - \max\limits_{1 \leq i \leq k+1} t_{c(i-1)+q}^{\theta} > 0$ по индукционному предположению и в силу того, что $\max\limits_{1 \leq i \leq k+1} t_{c(i-1)+q}^{\theta} = \max\limits_{1 \leq i \leq k} t_{c(i-1)+q}^{\theta}$.

Покажем далее, что $t_{ck+q}^{\theta} - t_{c(k-1)+q}^{\theta} + \max(t_{c(k-1)+q}^{\theta} - t_{ck+q}^{\theta}, 0) \geq 0$:

– если $t^{\theta}_{c(k-1)+q} = t^{\theta}_{ck+q}$ равенство нулю очевидно;

– если $t^{\theta}_{c(k-1)+q} > t^{\theta}_{ck+q}$ получим, что

$$t^{\theta}_{ck+q} - t^{\theta}_{c(k-1)+q} + \max(t^{\theta}_{c(k-1)+q} - t^{\theta}_{ck+q}, 0) = t^{\theta}_{ck+q} - t^{\theta}_{c(k-1)+q} + t^{\theta}_{c(k-1)+q} - t^{\theta}_{ck+q} = 0 ;$$

– если $t^{\theta}_{c(k-1)+q} < t^{\theta}_{ck+q}$, имеем, что $\max(t^{\theta}_{c(k-1)+q} - t^{\theta}_{ck+q}, 0) = 0$, тогда

$$t^{\theta}_{ck+q} - t^{\theta}_{c(k-1)+q} + \max(t^{\theta}_{c(k-1)+q} - t^{\theta}_{ck+q}, 0) = t^{\theta}_{ck+q} - t^{\theta}_{c(k-1)+q} > 0 ,$$

что и требовалось доказать.

4. Эффективность одинаково распределенных систем конкурирующих процессов при неограниченном параллелизме

В п.3 доказано, что в случае неограниченного параллелизма по числу процессоров распределенной вычислительной системы минимальные общие времена выполнения n *одинаково распределенных* процессов, конкурирующих за использование c копий структурированного на s блоков программного ресурса в многопроцессорной системе с p процессорами с учетом параметра $\theta > 0$ в асинхронном и двух синхронных режимах совпадают и вычисляются по формуле (теорема 1):

$$T^{op}(p,n,s,c,\theta) = \max_{1 \le q \le c} (T^{\theta}_q + (s-1)t^{q+}_{\max}) , \qquad (2)$$

где $T^{\theta}_q = \sum_{i=1}^{n/c} t^{\theta}_{c(i-1)+q}$ – время выполнения q –го подмножества процессов, $t^{q+}_{\max} = \max_{1 \le i \le n/c} t^{\theta}_{c(i-1)+q}$ – максимальное время выполнения блока из этого подмножества с учетом системных расходов θ, $q = \overline{1,c}$.

О п р е д е л е н и е 3. Одинаково распределенная система конкурирующих процессов называется **стационарной**, если $t^{\theta}_1 = t^{\theta}_2 = \ldots = t^{\theta}_n = t^{\theta}$.

В случае *стационарной* одинаково распределенной системы конкурирующих процессов минимальные общие времена выполнения определяются равенством [9-11]:

$$T^{cc}(p,n,s,c,\theta) = \left(\frac{n}{c} + s - 1\right) t^{\theta} , \text{ где } t^{\theta} = t + \theta .$$

О п р е д е л е н и е 4. Одинаково распределенную систему конкурирующих процессов будем называть **эффективной** при фиксированных $p \ge 2$, $s \ge 2$, $c \ge 2$, $\theta > 0$, если выполняется соотношение $\Delta_{op} = \max_{1 \le q \le c} sT_q - T^{op}(p,n,s,c,\theta) \ge 0$, где sT_q – время выполнения s блоков программного ресурса всеми процессами q -го подмножества в последовательном режиме, а $T_q = \sum_{i=1}^{n/c} t_{c(i-1)+q}$.

При наличии двух эффективных одинаково распределенных систем конкурирующих процессов будем считать, что первая не менее эффективная, чем вторая, если $\Delta^1_{op} \ge \Delta^2_{op}$.

Для введенного подмножества одинаково распределенных систем справедливо следующее утверждение.

Теорема 3. *Для любой эффективной одинаково распределенной системы конкурирующих процессов при* $s \le \left[\frac{p}{c}\right]$ *и* $\theta > 0$ *существует более эффективная стационарная одинаково распределенная система.*

Доказательство. Рассмотрим любую эффективную одинаково распределенную систему. Согласно определению 4 условие ее эффективности с учетом (2) можно записать в виде следующего неравенства:

$$\Delta_{op} = \max_{1\le q\le c} sT_q - T^{op}(p,n,s,c,\theta) = \max_{1\le q\le c}\left(sT_q - T_q^{\theta} - (s-1)t_{\max}^{q+}\right) =$$

$$= (s-1)\max_{1\le q\le c}(T_q - t_{\max}^q) - \left(\frac{n}{c}+s-1\right)\theta \ge 0 \text{, где } t_{\max}^q = \max_{1\le i\le n/c} t_{c(i-1)+q} . \quad (3)$$

Для любой *стационарной* одинаково распределенной системы условие эффективности запишется следующим образом:

$$\Delta_{cc} = sT^m - T^{cc}(p,n,s,c,\theta) = sT^m - \left(\frac{n}{c}+s-1\right)t^{\theta} =$$

$$= (s-1)(T^m - t) - \left(\frac{n}{c}+s-1\right)\theta \ge 0 \text{, где } T^m = \frac{n}{c}t . \quad (4)$$

Для доказательства теоремы достаточно доказать выполнение неравенства $\Delta_{op} \le \Delta_{cc}$.

Подставив вместо Δ_{op} и Δ_{cc} выражения из (3) и (4), получим:

$$\max_{1\le q\le c}(T_q - t_{\max}^q) \le \left(\frac{n}{c}-1\right)t .$$

Докажем справедливость последнего неравенства. Рассмотрим стационарную одинаково распределенную систему конкурирующих процессов, в которой $t = \max_{1\le i\le n} t_i = t_{\max}^q$. Пусть для определенности $t_{\max}^q = t_k$, тогда справедлива цепочка соотношений:

$$\max_{1\le q\le c}(T_q - t_{\max}^q) = \max_{1\le q\le c}\left(\sum_{i=1}^{k-1} t_{c(i-1)+q} + \sum_{i=k+1}^{n/c} t_{c(i-1)+q}\right) \le \left(\frac{n}{c}-1\right)t_{\max}^q = \left(\frac{n}{c}-1\right)t .$$

Теорема доказана.

Следующее утверждение в случае неограниченного параллелизма по числу процессоров распределенной вычислительной системы с учетом ограниченного числа копий структурированного программного ресурса определяет достаточное условие эффективности одинаково распределенной системы.

Теорема 4. *Система одинаково распределенных конкурирующих процессов с параметрами* p, n, s, c, θ, *удовлетворяющими соотношениям*

$$3 \le s \le \left[\frac{p}{c}\right],\ s = \frac{n}{c} \ne 3,\ ns \ge 2[n + c(s-1)],\ 0 < \theta \le t_{\min} = \min_{1\le i\le n} t_i ,$$

является эффективной.

Доказательство. Согласно формуле (3), условие эффективности равносильно неравенству

$$\max_{1\le q\le c}\frac{T_q - t_{\max}^q}{\theta} \ge \frac{n + c(s-1)}{c(s-1)} . \quad (5)$$

Следовательно, для доказательства теоремы достаточно убедиться в справедливости неравенства (5). В силу выбора $0<\theta\le t_{\min}$ будет выполняться неравенство $t_{\min}/\theta\ge 1$, тогда справедлива цепочка

$$\max_{1\le q\le c}\frac{T_q-t_{\max}^q}{\theta}\ge\left(\frac{n}{c}-1\right)\frac{t_{\min}}{\theta}\ge\frac{n}{c}-1\,. \tag{6}$$

Далее, из $ns\ge 2[n+c(s-1)]$ следует справедливость неравенства

$$\frac{n}{c}-1\ge\frac{n+c(s-1)}{c(s-1)}\,. \tag{7}$$

Следствием неравенств (6) и (7) является неравенство (5). Таким образом, теорема доказана.

Ниже формулируется и доказывается необходимое и достаточное условие существования эффективной системы одинаково распределенных конкурирующих процессов при неограниченном параллелизме с учетом c копий программного ресурса в зависимости от величины дополнительных системных расходов θ.

Т е о р е м а 5. *Для существования эффективной одинаково распределенной системы конкурирующих процессов с заданными параметрами* $\left[\frac{p}{c}\right]\ge 3,\ \ 2\le s\le\left[\frac{p}{c}\right],\ \ 2\le c\le p$ *и* $\theta>0$ *необходимо и достаточно выполнение следующих условий:*

$$\theta\le\begin{cases}\varphi[c(1+\sqrt{s}\,)], & \textit{если } \sqrt{s} \textit{ целое},\\ \max\{\varphi[c(1+\sqrt{s}\,)],\ \varphi[c(2+\sqrt{s}\,)]\}, & \textit{если } \sqrt{s} \textit{ нецелое},\end{cases} \tag{8}$$

где $\varphi(x)=\dfrac{c(s-1)T^m(x-c)}{x^2+xc(s-1)}$, *а* $[x]$ *– наибольшее целое, не превосходящее* x.

Д о к а з а т е л ь с т в о . Согласно (4), условие эффективности любой стационарной одинаково распределенной системы конкурирующих процессов определяется соотношением

$$\Delta_{cc}=(s-1)(T^m-t)-\left(\frac{n}{c}+s-1\right)\theta\ge 0\text{, где } T^m=\frac{n}{c}t\,,$$

которое равносильно выполнению неравенства

$$\theta\le\frac{c(s-1)T^m(n-c)}{n^2+nc(s-1)}\,. \tag{9}$$

Введем в рассмотрение функцию $\varphi(x)=\dfrac{c(s-1)T^m(x-c)}{x^2+xc(s-1)}$. В силу того, что $\varphi'(x)=\dfrac{c(s-1)T^m[-x^2+2cx+c^2(s-1)]}{[x^2+xc(s-1)]^2}$, то функция φ при $x>0$ достигает своего максимального значения в точке $x=c(1+\sqrt{s})$. Положим

$$n_э=\begin{cases}c(1+\sqrt{s}), & \textit{если } \sqrt{s} \textit{ — целое},\\ \max\{c(1+[\sqrt{s}\,]),\ c(2+[\sqrt{s}\,])\}, & \textit{если } \sqrt{s} \textit{ — нецелое}.\end{cases} \tag{10}$$

Необходимость условий (8) будет доказана, если будет установлена невозможность существования эффективной одинаково распределенной системы n конкурирующих процессов, для которой выполнялось бы неравенство вида:

$$\theta > \frac{c(s-1)T^m(n-c)}{n^2+nc(s-1)} . \tag{11}$$

Очевидно, такой системы нет при $n = n_э$, так как в силу определения функции φ, для такого n выполняется неравенство (11) и, следовательно, такая система не может быть эффективной.

Если все же предположить существование такой системы с n процессами, то должно выполняться соотношение $n \neq n_э$.

Выше установлено, что одинаково распределенная система с $n_э$ процессами эффективна, следовательно, для нее имеет место неравенство $\theta \le \frac{c(s-1)T^m(n_э-c)}{n_э^2+n_эc(s-1)}$. В то время как для гипотетической системы с n процессами в силу предположения должно выполняться неравенство $\theta > \frac{c(s-1)T^m(n-c)}{n^2+nc(s-1)}$. Очевидным следствием полученных неравенств, является неравенство $\theta > \theta$.

В случае $n < n_э$ в силу (11) должна выполняться цепочка неравенств

$$\frac{c(s-1)T^m(n_э-c)}{n_э^2+n_эc(s-1)} < \frac{c(s-1)T^m(n-c)}{n^2+nc(s-1)} < \theta ,$$

из которой в силу (9) следует неэффективность одинаково распределенной системы с $n_э$ процессами.

Наконец, если $n > n_э$, то $\frac{c(s-1)T^m(n_э-c)}{n_э^2+n_эc(s-1)} > \frac{c(s-1)T^m(n-c)}{n^2+nc(s-1)} \ge \theta$, что указывает на эффективность гипотетической одинаково распределенной системы n конкурирующих процессов. Полученные противоречия во всех возможных случаях доказывают необходимость условий (8).

Достаточность условий (8) непосредственно следует из наличия функции φ со свойством (9). Действительно, в этом случае требуемой эффективной одинаково распределенной системы является система с $n = n_э$ конкурирующими процессами, где $n_э$ определяется формулой (10). Теорема доказана.

З а м е ч а н и е. При $\left[\frac{p}{c}\right] = s = 2$ одинаково распределенная система конкурирующих процессов будет эффективной, если выполняется неравенство $\frac{\theta}{T_m} \le \frac{c(n-c)}{n(n+c)}$.

5. Эффективность одинаково распределенных систем в условиях ограниченного параллелизма

В случае ограниченного параллелизма для вычисления минимального общего времени выполнения одинаково распределенных конкурирующих процессов в асинхронном и втором синхронном режимах имеют место формулы [10-12]:

$$T_{ac}^{op}(p,n,s,c,\theta) = T_{2c}^{op}(p,n,s,c,\theta) =$$

$$= \max_{1\le q\le c}\begin{cases} kT_q^{\theta} + \left(\left[\dfrac{p}{c}\right]-1\right)t_{\max}^{q+}, \ \textit{при}\ s = k\left[\dfrac{p}{c}\right],\ k>1,\ T_q^{\theta} > \left[\dfrac{p}{c}\right]t_{\max}^{q+}, \\ (k+1)T_q^{\theta} + (r-1)t_{\max}^{q+}, \ \textit{при}\ s = k\left[\dfrac{p}{c}\right]+r,\ k\ge 1,\ 1\le r<\left[\dfrac{p}{c}\right],\ T_q^{\theta} > \left[\dfrac{p}{c}\right]t_{\max}^{q+}. \end{cases}$$

Здесь $T_q^{\theta} = \sum_{i=1}^{n/c} t_{c(i-1)+q}^{\theta}$, $t_{\max}^{q+} = \max_{1\le i\le n/c} t_{c(i-1)+q}^{\theta}$, $q = \overline{1,c}$.

Т е о р е м а 6. *Если параметры системы* $\dfrac{n}{c}\ge 3$ *одинаково распределенных конкурирующих процессов в многопроцессорной системе с* p *процессорами удовлетворяют соотношениям* $s\ge 3$, $s=\dfrac{n}{c}\ne 3$, $2\le c\le p$, $0<\theta\le t_{\min} = \min_{1\le i\le n} t_i$ *и* $T_q^{\theta} > \left[\dfrac{p}{c}\right]t_{\max}^{q+}$, *то в случае ограниченного параллелизма рассматриваемая система будет эффективной, если выполняются условия:*

$$k\frac{n}{c}\left[\frac{p}{c}\right] \ge \begin{cases} 2\left(k\dfrac{n}{c}+\left[\dfrac{p}{c}\right]-1\right), & s=k\left[\dfrac{p}{c}\right],\ k>1, \\ \dfrac{n}{c}[2(k+1)-r]+2(r-1), & s=k\left[\dfrac{p}{c}\right]+r,\ k\ge 1,\ 1\le r<\left[\dfrac{p}{c}\right]. \end{cases}$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. Для случая $s=k\left[\dfrac{p}{c}\right]$, $k>1$, условие эффективности одинаково распределенной системы конкурирующих процессов запишется в виде:

$$\Delta_{op}^{ac,2c}\left(s=k\left[\frac{p}{c}\right]\right) = \max_{1\le q\le c} k\left[\frac{p}{c}\right]T_q - T_{ac,2c}^{op}\left(p,n,k\left[\frac{p}{c}\right],c,\theta\right) =$$

$$= \left(\left[\frac{p}{c}\right]-1\right)\max_{1\le q\le c}(kT_q - t_{\max}^{q}) - \left(k\frac{n}{c}+\left[\frac{p}{c}\right]-1\right)\theta \ge 0, \text{ где } T_q = \sum_{i=1}^{n/c} t_{c(i-1)+q},\ t_{\max}^{q} = \max_{1\le i\le n/c} t_{c(i-1)+q}$$

Или

$$\left(\left[\frac{p}{c}\right]-1\right)\max_{1\le q\le c}\frac{kT_q - t_{\max}^{q}}{\theta} \ge k\frac{n}{c}+\left[\frac{p}{c}\right]-1. \tag{12}$$

В силу того, что $0<\theta\le t_{\min}$, получим:

$$\max_{1\le q\le c}\frac{kT_q - t_{\max}^{m}}{\theta} \ge \left(k\frac{n}{c}-1\right)\frac{t_{\min}}{\theta} \ge k\frac{n}{c}-1. \tag{13}$$

Из (13) и (12) следует первая формула теоремы.

В случае, когда $s=k\left[\dfrac{p}{c}\right]+r$, $k\ge 1$, $1\le r<\left[\dfrac{p}{c}\right]$, условие эффективности будет иметь вид:

$$k\left(\left[\frac{p}{c}\right]-1\right)\max_{1\le q\le c}\frac{T_q}{\theta} + (r-1)\max_{1\le q\le c}\frac{T_q - t_{\max}^{q}}{\theta} \ge (k+1)\frac{n}{c}+r-1. \tag{14}$$

Так как, $t_{\min}/\theta \ge 1$, то

$$k\left(\left[\frac{p}{c}\right]-1\right)\max_{1\le q\le c}\frac{T_q}{\theta}+(r-1)\max_{1\le q\le c}\frac{T_q-t_{\max}^q}{\theta}\ge k\frac{n}{c}\left(\left[\frac{p}{c}\right]-1\right)+\left(\frac{n}{c}-1\right)(r-1)\,. \tag{15}$$

Из (15) и (14) следует вторая формула теоремы. Теорема доказана.

Сформулируем и докажем необходимое и достаточное условие существования эффективной системы одинаково распределенных конкурирующих процессов в зависимости от величины накладных расходов θ в случае ограниченного параллелизма по числу процессоров РВС.

Теорема 7. *Для существования эффективной одинаково распределенной системы конкурирующих процессов с заданными параметрами* $\left[\frac{p}{c}\right]\ge 3$, $T^m=\frac{n}{c}t$, $2\le c\le p$, $\theta>0$ *необходимо и достаточно, чтобы выполнялись следующие условия:*

1) *при* $s=k\left[\frac{p}{c}\right]$, $k>1$,

$$\theta\le\begin{cases}\varphi_1\left[\frac{c}{k}\left(1+\sqrt{\left[\frac{p}{c}\right]}\right)\right], & \text{если } \frac{c}{k}\left(1+\sqrt{\left[\frac{p}{c}\right]}\right) - \text{целое},\\ \max\left\{\varphi_1\left(\left[\frac{c}{k}\left(1+\sqrt{\left[\frac{p}{c}\right]}\right)\right]\right),\ \varphi_1\left(\left[\frac{c}{k}\left(1+\sqrt{\left[\frac{p}{c}\right]}\right)\right]+1\right)\right\}, & \text{в противном случае,}\end{cases}$$

где $\varphi_1(x)=\dfrac{aT^m c(kx-c)}{kx^2+acx}$, $a=\left[\frac{p}{c}\right]-1$;

2) *при* $s=k\left[\frac{p}{c}\right]+r$, $k\ge 1$, $1\le r<\left[\frac{p}{c}\right]$,

$$\theta\le\begin{cases}\varphi_2(x), & \text{если } x - \text{целое},\\ \max\{\varphi_2([x]),\ \varphi_2([x]+1)\}, & \text{если } x - \text{нецелое},\end{cases}$$

где $\varphi_2(x)=\dfrac{cT^m[akx+b(x-c)]}{(k+1)x^2+bcx}$, $x=\dfrac{bc}{ak+b}\left(1+\sqrt{1+\dfrac{ak+b}{k+1}}\right)$, $b=r-1$.

Доказательство. В случае *стационарной* одинаково распределенной системы конкурирующих процессов во всех трех режимах минимальное общее время с учетом параметра $\theta>0$ определяется по формулам:

$$T^{cc}(p,n,s,c,\theta)=$$

$$=\begin{cases}\left(k\frac{n}{c}+\left[\frac{p}{c}\right]-1\right)t^{\theta}, & \text{если } \min(m,s)>\left[\frac{p}{c}\right] \text{ и } s=k\left[\frac{p}{c}\right],\ k>1,\\ \left((k+1)\frac{n}{c}+r-1\right)t^{\theta} & \text{если } \min(m,s)>\left[\frac{p}{c}\right] \text{ и } s=k\left[\frac{p}{c}\right]+r,\ k\ge 1,\ 1\le r<\left[\frac{p}{c}\right].\end{cases}$$

Условие эффективности стационарной одинаково распределенной системы конкурирующих процессов в случае $s=k\left[\frac{p}{c}\right]$, $k>1$, определяется соотношением

$$\Delta_{cc}\left(s=k\left[\frac{p}{c}\right]\right)=k\left[\frac{p}{c}\right]T^m-T^{cc}\left(p,n,k\left[\frac{p}{c}\right],c,\theta\right)=$$

$$=\left(\left[\frac{p}{c}\right]-1\right)(kT^m-t)-\left(k\frac{n}{c}+\left[\frac{p}{c}\right]-1\right)\theta\geq 0,$$

которое равносильно выполнению неравенства $\theta\leq\dfrac{aT^m c(kn-c)}{kn^2+acn}$, где $a=\left[\dfrac{p}{c}\right]-1$.

Введем в рассмотрение функцию $\varphi_1(x)=\dfrac{aT^m c(kx-c)}{kx^2+acx}$, которая при $x>0$ достигает своего максимума в точке $x=\dfrac{c}{k}\left(1+\sqrt{\left[\dfrac{p}{c}\right]}\right)$.

В случае $s=k\left[\dfrac{p}{c}\right]+r$, $k\geq 1$, $1\leq r<\left[\dfrac{p}{c}\right]$, условие эффективности стационарной одинаково распределенной системы конкурирующих процессов определяется неравенством:

$$\Delta_{cc}\left(s=k\left[\frac{p}{c}\right]+r\right)=akT^m+b(T^m-t)-\left((k+1)\frac{n}{c}+b\right)\theta\geq 0, \text{ где } b=r-1.$$

С учетом того, что $t=\dfrac{c}{n}T^m$, это равносильно $\theta\leq\dfrac{cT^m[akn+b(n-c)]}{(k+1)n^2+bcn}$.

Рассмотрим функцию $\varphi_2(x)=\dfrac{cT^m[akx+b(x-c)]}{(k+1)x^2+bcx}$. В силу того, что $\varphi_2'(x)=\dfrac{cT^m[(-ak-b)(k+1)x^2+2bc(k+1)x+b^2c^2]}{[(k+1)x^2+bcx]^2}=0$, функция $\varphi_2(x)$ при $x>0$ достигает своего максимума в точке $x=\dfrac{bc}{ak+b}\left(1+\sqrt{1+\dfrac{ak+b}{k+1}}\right)$. Теорема доказана.

6. Заключение

В данной работе для класса *одинаково распределенных систем конкурирующих процессов с учетом ограниченного числа копий программного ресурса* проведен сравнительный анализ математических соотношений времен выполнения множества процессов в асинхронном и двух синхронных режимах, в случаях неограниченного и ограниченного параллелизма по числу процессоров РВС получены достаточные условия эффективности одинаково распределенных систем, доказываются необходимые и достаточные условия существования эффективных систем одинаково распределенных конкурирующих процессов в зависимости от величины дополнительных системных расходов. Полученные условия эффективности имеют многочисленные области применения, в частности, они могут быть использованы при проектировании системного и прикладного программного обеспечения, ориентированного на многопроцессорные вычислительные системы и комплексы, а также при решении проблем *оптимального* использования вычислительных ресурсов.

Список литературы / References

[1]. Andrew S. Tanenbaum, Maarten Van Steen. Distributed Systems. Amazon Digital Services LLC, 2023. 684 p.

[2]. Robey R., Zamora Y. Parallel and High Performance Computing. Manning, 2021. 800 p.

[3]. Бабичев С.Л., Коньков К.А. Распределенные системы. М.: Юрайт, 2019. 507 с. / Babichev S., Konkov K. Distributed Systems. Moscow, Juright, 2019, 507 p. (in Russian).

[4]. Павлов П.А. Оптимальность систем одинаково распределенных конкурирующих процессов. Вестник БГУ. Серия 1: Физика. Математика. Информатика. 2009, №3. С. 114-118. / Pavlov P. Optimality of systems of identically distributed competing processes. BSU Bulletin. Series 1: Physics. Mathematics. Computer Science. 2009, №3. pp. 114-118 (in Russian).

[5]. Павлов П.А., Коваленко Н.С. Математическое моделирование паралллельных процессов. Germany: Lambert Academic Publishing, 2011. 246 с. / Pavlov P., Kovalenko N. Mathematical modeling of parallel processes. Germany, Lambert Academic Publishing, 2011, 246 p. (in Russian).

[6]. Павлов П.А. Оптимальность структурирования программных ресурсов при конвейерной распределенной обработке. Программные продукты и системы. 2010, №3. С. 79-85. / Pavlov P. Optimal structuring of software resources during pipeline distributed processing. Software products and systems. 2010, №3. pp. 79-85 (in Russian).

[7]. Павлов П.А. Задача оптимизации числа процессоров при распределенной обработке. Вестник государственного Самарского аэрокосмического университета имени академика С.П. Королева. 2011, №4. С. 230-240. / Pavlov P. The problem of optimizing the number of processors in distributed processing. Bulletin of the State Samara Aerospace University named after Academician S.P. Koroleva. 2011, №4. pp. 230-240 (in Russian).

[8]. Pavlov P.A. The optimality of software resources structuring through the pipeline distributed processing of competitive cooperative processes. International Journal of Multimedia Technology (IJMT). 2012, Vol.2, №1. pp. 5–10.

[9]. Kovalenko N.S., Pavlov P.A. Optimal Grouping Algorithm of Identically Distributed Systems. Programming and Computer Software. 2012, №3. pp. 143-150.

[10]. Павлов П.А., Коваленко Н.С. Распределенные вычисления при ограниченном числе копий программного ресурса. Программные продукты и системы. 2011, №4. С. 155-163. / Pavlov P., Kovalenko N. Distributed computing with a limited number of copies of a software resource. Software products and systems. 2011, №4. pp. 155-163 (in Russian).

[11]. Kovalenko N.S., Pavlov P.A., Ovseec M.I. Asynchronous distributed computations with a limited number of copies of a structured program resource. Cybernetics and systems analysis. 2012, №1. pp. 86-98.

[12]. Павлов П.А., Коваленко Н.С. Синхронный режим распределенных вычислений при непрерывном выполнении блоков ограниченного числа копий программного ресурса. Программные продукты и системы. 2024, №1. С. 43-53. / Pavlov P., Kovalenko N. Synchronous mode of distributed computing with continuous execution of blocks of a limited number of copies of a software resource. Software products and systems. 2024, №1. pp. 43-53 (in Russian).

Информация об авторах / Information about authors

Павел Александрович ПАВЛОВ – кандидат физико-математических наук, доцент, доцент кафедры информационных технологий и интеллектуальных систем Полесского государственного университета. Сфера научных интересов: математическое моделирование распределенных вычислительных систем конкурирующих процессов, исследование операций, математическое программирование.

Pavel Alexsandrovich PAVLOV – Cand. Sci. (Phys.-Math.), Associate Professor of the department of information technologies and intelligent systems (Polessky State University). Research interests: mathematical modeling of distributed computing systems of competing processes, operations research, mathematical programming.