***И.А. Карачун***
*Белорусский государственный экономический университет*
*г. Минск, Республика Беларусь*

# ПОРТФЕЛЬНЫЙ МЕНЕДЖМЕНТ

На современном финансовом рынке существует множество различных финансовых инструментов, но больше всего операций совершается с ценными бумагами и их производными. Такое разнообразие ставит перед инвестором проблему выбора оптимального портфеля, то есть такого портфеля, который позволяет получить максимальную прибыль при минимальном стартовом капитале. В настоящее время наиболее отвечающие задаче выбора оптимального портфеля результаты дает портфельная теория, однако и она требуют дополнительного уточнения и развития в целях соответствия современным условиям работы на финансовых рынках. Основное развитие теория оптимальных портфелей получила в США и Западной Европе, так как там уже давно действуют финансовые рынки. А в нашей стране пока еще недостаточно теоретических разработок, касающихся торговли ценными бумагами. Это объясняется тем, что даже внутренние финансовые рынки в Республике Беларусь не являются достаточно развитыми.

Рассмотрим одну из самых актуальных задач современного финансового управления, а именно – портфельный менеджмент. Анализ этой проблемы интересен в первую очередь руководителям аналитических отделов банков и инвестиционных компаний и частным инвесторам.

Портфельный менеджмент, т.е. формирование инвестиционного портфеля ценных бумаг, берет свое начало примерно с тех времен, когда появились сами ценные бумаги, и является следствием естественного нежелания инвестора полностью связать свое финансовое благополучие с судьбой только одной компании. Методология же инвестиционного менеджмента начала складываться в двадцатые годы с появлением понятия «истинной» цены акции (fair price). Задача инвестора состояла в том, чтобы приобрести недооцененные акции, чья рыночная цена на момент покупки ниже истинной, и избавиться от переоцененных бумаг и тем самым получить в перспективе максимальную прибыль. Эта цель не менее актуальна и сейчас.

Сначала перечислим предположения, лежащие в основе анализа:

торговля активами производится в непрерывном времени;

безрисковая процентная ставка r постоянна и одинакова для всех сроков погашения, по акциям не выплачиваются дивиденды;

все активы и их производные свободно продаются и покупаются, нет возможности арбитража.

Для составления портфеля мы располагаем одним безрисковым активом $S_t^0$ с постоянной процентной ставкой $r$ (это может быть облигация или банковский вклад), n рисковыми активами $S_t^i, i=\overline{1,n}$ (акциями) и контрактом $f\left(t, S_t^1, ..., S_t^n\right)$ (европейское условное обязательство – ЕУО).

Динамика облигации описывается предсказуемой положительной стохастической последовательностью. Стоимость облигации в момент времени $t$ становится известна по получении всей информации в момент времени $t$–1. Следовательно, поведение $S_t^0$ описывается обыкновенным дифференциальным уравнением

$$dS_t^0 = rS_t^0 dt \qquad (1)$$

Обычно, для удобства вычисления берут $S_0^0 = 1$, тогда $S_1^0 = e^{rt}, t \geq 0$. Такой рынок называется нормализованным, а с помощью умножения курса акции на $e^{-rt}$ можно нормализовать любой рынок. Это означает, что мы рассматриваем цену облигации как единицу исчисления цены и вычисляем цены других активов в терминах этой единицы.

Курс $i$-й акции также описывается положительной стохастической последовательностью, однако ее стоимость в момент времени $t$ становится известна только в этот момент. Поэтому его динамика задается стохастическим дифференциальным уравнением

$$dS_t^i = S_t^i(\mu_i dt + \sum_{j=1}^n \sigma_{ij} dW_t^j), S_0^i = p_i, \qquad (2)$$

где $\mu_i, \sigma_{ij}$ – постоянные, $W_t$ – $n$-мерное стандартное броуновское движение (случайный процесс с независимыми нормально распределенными приращениями) на полном фильтрованном вероятностном пространстве $(\Omega, \{F_t\}_{0 \leq t \leq T}, P)$

Введем эквивалентную мартингальную меру $\widetilde{P}$ посредством

$$\theta = \sigma^{-1}[\mu - r1], \qquad (3)$$

$$Z(t) = \exp\{-\int_0^t \theta^* dW_s - \frac{1}{2}\int_0^t \|\theta\|^2 ds\} = eps\{-\frac{\|\theta\|^2 t}{2} - \theta^* W_t\}. \qquad (4)$$

Это ограниченный $F_t$-измеримый экспоненциальный мартингал.

Теперь определим дополнительную вероятностную меру на $(\Omega, F_T)$

$$\tilde{W}_t = W_t + \int_0^t \theta ds, t \in [0,T] \qquad (5)$$

тогда по теореме Гирсанова процесс

$$\tilde{W}_t = W_t + \int_0^t \theta ds, t \in [0,T] \qquad (6)$$

является $R^n$-значным винеровским процессом относительно $\widetilde{P}$.

Чтобы понять важность введения такой дополнительной меры, перепишем (2) с помощью (3) и (6)

$$dS_t^i = S_t^i(rdt + \sum_{j=1}^n \sigma_{ij} d\tilde{W}_t^j), i = \overline{1,n}. \qquad (7)$$

Сравнив (2) и (7) и отметив, что $\widetilde{W}$ – $\widetilde{P}$-винеровский процесс, видно, что $\widetilde{P}$ – «риск-нейтральная» мера модели рынка: она приравнивает коэффициенты вздорожания всех акций к процентной ставке по облигации. Существование такой вероятностной меры обеспечивает отсутствие арбитража в модели рынка, т.е. возможности получать деньги из ничего; с другой стороны, единственность такой меры гарантирует, что все риски, генерируемые источниками неопределенности $(W^1,...,W^n)$, можно хеджировать путем умелой торговли финансовыми активами.

Теперь рассмотрим инвестора, который инвестирует свои средства в различные ценные бумаги и чьи действия не влияют на реалии рынка. Пусть $X_t$ – капитал инвестора в момент времени *t*, $x \geq 0$ – стартовый капитал, $\pi_t^i$ – число единиц i-го актива, c(t) – ставка, по которой инвестор извлекает фонды из своего портфеля для личного потребления или расходов на транзакционные издержки, причем $\int_0^T c(t)\,dt < \infty$ . Случайный вектор $\pi_t = (\pi_t^1,...,\pi_t^n)^T$, $t \in [0,T]$ , удовлетворяющий неравенству $\int_0^T |\pi_t|^2 dt < \infty$, называется портфелем или стратегией инвестора. Условия, наложенные на эти процессы, означают, что инвестор не может заранее знать будущий курс акции, таким образом исключается инсайдерская торговля (использование конфиденциальной информации для получения прибыли от рыночных сделок, в США – совершение сделок на основе не подлежащей публикации информации, полученной от лица, располагающего ею в силу своего служебного или привилегированного положения, уголовно наказуемо).

Надо отметить, что величины $\pi_t^i$ могут быть отрицательными. Это означает короткую продажу акции (продажа акции, которой у продавца в наличии нет, осуществленная в ожидании падения цен). Следовательно, сумма денег, вложенная в облигации $X_t - \sum_{i=1}^n \pi_t^i S_t^i$ тоже может быть отрицательной; это можно интерпретировать как заём по процентной ставке *r*.

В таких предположениях капитал инвестора $X_t$ в каждый момент времени описывается стохастическим дифференциальным уравнением

$$dX_t = \sum_{i=1}^n \pi_t^i S_t^i[\mu_i dt + \sum_{j=1}^n \sigma_{ij} dW_t^j] - c(t)dt + [X_t - \sum_{i=1}^n \pi_t^i S_t^i]rdt. \qquad (8)$$

Правая часть уравнения состоит из: прибыли или убытка от инвестиций в акции, изъятия капитала для потребления, и прибыли или убытка от инвестиций в облигации.

С помощью (3) и (6) уравнение (8) можно переписать в матричной форме

$$dX_t = [rX_t - c(t)]dt + \pi_t^*[\mu - r1]dt + \pi_t^*\sigma dW_t = [rX_t - c(t)]dt + \pi_t^*\sigma d\tilde{W}_t. \qquad (9)$$

Решение уравнения (14) со стартовым капиталом $X_0 = x \geq 0$ и дисконтом (8) имеет вид

$$\tilde{X}_t = \beta_t X_t = x - \int_0^t \beta_s c(s)\,ds + \int_0^t \beta_s \pi_s^* \sigma d\tilde{W}_s, t \in [0,T]. \qquad (10)$$

Введем процесс

$$\zeta_t = e^{-rt} Z(t), \tag{11}$$

который модифицирует дисконт, чтобы учесть состояние финансового рынка. Он играет роль дефлятора в том смысле, что, умножив на $\zeta_t$ текущий капитал инвестора в момент времени $t$, мы получим сумму, эквивалентную данной в момент времени $t = 0$.

Мы будем рассматривать только те пары $(\pi,c)$, для которых вероятность получить на выходе отрицательный капитал равна 0, то есть $X_t \geq 0$, $\zeta_t X_t \geq -f(\cdot)$, $\forall t \in [0,T]$

Рассмотрим вопрос о нахождении сходной цены ЕУО в момент времени $t$=0. Если найдется хеджирующая стратегия для некоторого $x$>0, то инвестор, который собирается купить ЕУО в момент времени $t$=0, может вместо этого инвестировать свои средства в портфель $\pi$ с потреблением $c$ и получить такую же прибыль. Поэтому цена, которую он готовится заплатить за ЕУО в момент времени $t$=0, не может быть больше $x$.

Следовательно, приемлемую цену естественно определить как минимальное значение стартового капитала, которое позволяет построить хеджирующую стратегию.

Сходная цена ЕУО при $t = 0$

$$p = \tilde{E}[f(\cdot)\exp\{-\int_0^T rdu\}] = \tilde{E}[f(\cdot)e^{-rT}]. \tag{12}$$

Кроме того, найдется стратегия (π, 0), она единственна с точностью до эквивалентности, соответствующий процесс состояния которой имеет вид

$$X_t = \tilde{E}[f(\cdot)\exp\{-\int_t^T rdu \,|\, F_t\}], t \in [0,T]. \tag{13}$$

Рассмотрим условное обязательство $f(S_T)$, где $f:\mathbb{R}_+^n \to [0,\infty)$ – непрерывно дифференцируемая функция и $S_t = (S_t^1,...,S_t^n)^*$, вектор, состоящий из курсов акций, определенных уравнениями (7) .

Решение этих уравнений задано формулой

$$S_t^i = p_i \exp\{(r - \frac{1}{2}a_{ii})t + \sum_{j=1}^n \sigma_{ij}\tilde{W}_t^j\}. \tag{14}$$

$a=\{a_{ij}\}^n{}_l=\sigma\sigma^*$– матрица ковариации, невырожденная и положительно определенная.

Введем функцию $h(t,p,y):[0,\infty)\times\mathbb{R}_+^n\times\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}_+^n$ вида

$$h_i(t,p,y) = p_i \exp\{(r - \frac{1}{2}a_{ii})t + y_i\}, \ i = \overline{1,n}. \tag{15}$$

Тогда (14) можно переписать в векторной форме

$$S_t = h(t, p, s\,\widetilde{W}_t). \qquad (16)$$

Из (13) и (15) следует, что стоимость $f(S_T)$

$$X_t = \tilde{E}[e^{-r(T-t)} f(S_T) | F_t] = \tilde{E}[e^{-r(T-t)} f(h(T-t, S_t, \sigma(\tilde{W}_T - \tilde{W}_t))) | F_t]$$

$$= e^{-r(T-t)} \int_{R^n} f(h(T-t, S_t, \sigma z)) \Gamma_{T-t}(z)\, dz,$$

где

$$\Gamma_t(z) = (2\pi t)^{-n/2} \exp\{-\frac{\|z\|^2}{2t}\}, z \in R^n, t > 0$$

фундаментальное ядро Гаусса в $R^n$. Следовательно, при

$$v(t,p) = \begin{cases} e^{-r(T-t)} \int_{R^n} f(h(T-t,p,\sigma z)) \Gamma_{T-t}(z)\, dz, & 0 \leqslant t < T, \quad p \in R_+^n \\ f(p), \quad t = T, & p \in R_+^n \end{cases} \qquad (17)$$

стоимость ЕУО в момент времени $t$

$X_t = v\,(t,S)$ (18)

В этом случае можно даже найти стратегию $\pi_t$, которая позволяет получить значение процесса (18). Действительно, в приведенных выше условиях на $f$ функция $v(t,p)$ из (17) является единственным решением задачи Коши

$$\frac{\partial v}{\partial t} + \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n a_{ij} p_i p_j \frac{\partial^2 v}{\partial p_i \partial p_j} + \sum_{i=1}^n r p_i \frac{\partial v}{\partial p_i} - rv = 0$$

$$v(T,p) = f(p), p \in R_+^n$$

по теореме Феймана-Каца/ Применив формулу Ито к (18) и воспользовавшись этим уравнением и (7), получим

$$dX_t = rX_t dt + \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \sigma_{ij} S_t^i \frac{\partial}{\partial p_i} v(t,S_t)\, d\tilde{W}_t^j.$$

Приравняем его к (8)

$$\pi_t^i = S_t^i \cdot \frac{\partial}{\partial p_i} v(t,S_t), \quad t \in [0,T], \quad i = \overline{1,n}.$$

Иными словами, следует купить $\Psi_t^i = \frac{\partial}{\partial p_i} v(t,S_t)$ единиц $i$-ой акции в момент времени $t$.

В качестве примера рассмотрим колл-опцион на одну акцию, стоимость которого задается формулой Блека-Шоулза

$$f(t,p_1) = p_1 \Phi(d_1(t)) - Ke^{-r(T-t)} \Phi(d_2(t)),$$

где $\Phi(\cdot)$– функция Лапласа (стандартная функция нормального распределения), $K$ – цена исполнения, $p_t$– текущий курс акции, $\sigma$ – дисперсия доходов по акциям, $T$– время до истечения срока опциона и

$$d_1(t) = \frac{\ln(\frac{p_t}{K}) + (r + \frac{1}{2}\sigma^2)(T-t)}{\sigma\sqrt{T-t}}, \quad d_2 = d_1(t) - \sigma\sqrt{T-t}.$$

Тогда оптимальной хеджирующей стратегией для этого опциона будет

$$\Psi_t^0 = -Ke^{-rT}\Phi(d_2(t)), \quad \Psi_t^1 = \Phi(d_1(t)).$$

Для того чтобы применить эту модель, необходимо располагать соответствующими исходными данными. Легко получить информацию о ценах акций, а цена исполнения опциона и его срок известны. Кроме того, требуются следующие данные: ставка процента по безрисковым операциям в течение срока опциона (чаще всего используют ставку банковского вклада) и дисперсия нормы дохода по акциям. Ставку процента по безрисковым операциям можно оценить и обратившись к доходности векселей со сроком, близким к сроку опциона, а дисперсию нормы дохода по акциям легче всего рассчитать на основе прошлой статистики рыночных курсов акций.

В заключение следует отметить, что, к сожалению, на сегодняшний день опционы не получили в Беларуси должного распространения по причине неразвитости отечественного рынка и слабой подготовленности участников для операций с такого рода контрактами. Однако ситуация не безвыходная, и со временем, при повышении ликвидности и объема рынка, опционы без сомнения завоюют популярность в нашей стране.