Электронный учебно-методический комплекс

УЧРЕЖДЕНИЕ ОБРАЗОВАНИЯ
«ПОЛЕССКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ»

Т.П. Маркович

Математика

для специальности 6-05-0718-01 Инженерная экономика

Пояснительная записка
Теоретический раздел
Практический раздел
Раздел контроля знаний
Вспомогательный раздел

Пинск
ПолесГУ
2025

РЕЦЕНЗЕНТЫ:
А.Ф. Хлебус, директор Центра банковских услуг № 121 ОАО «АСБ Беларусбанк»;

А.В. Шах, руководитель секции информационных систем и технологий, магистр технических наук.

Рассмотрено и утверждено на заседании научно–методического совета учреждения образования «Полесский государственный университет» 25.06.2025, протокол № 11.

СОГЛАСОВАНО	СОГЛАСОВАНО
Заведующий кафедрой информационных технологий и интеллектуальных систем	Декан Инженерного факультета
____________ Л.П.Володько	____________ А.В.Астренков
24.06.2025	24.06.2025

Зарегистрировано в Центре цифрового развития
Регистрационное свидетельство №____________ от ____________ 2025 г.

ПОЯСНИТЕЛЬНАЯ ЗАПИСКА

Электронный учебно-методический комплекс «Математика» предназначен для студентов дневной формы обучения. Он является нормативным документом, которым определяется содержание обучения и устанавливаются требования к объёму и уровню подготовки студентов по специальности 6-05-0718-01 Инженерная экономика.

Целью учебной дисциплины «Математика» является ознакомление студентов с математическими понятиями, методами и навыками их использования для решения типовых прикладных задач, а также развитие их логического мышления.

Перед преподавателями ставятся следующие **задачи**:

• рассматривая математическую культуру как часть общечеловеческой культуры, способствовать формированию высоконравственной гражданской позиции студентов, становлению целостной высокоинтеллектуальной личности, способной решать сложные актуальные задачи;

• дать представление о месте математики в системе естественных и экономических наук; о неразрывном единстве прикладной и фундаментальной математики; о преимуществах математического моделирования и его экономической эффективности;

• ознакомить студентов с основными понятиями и методами современной математики и научить студентов применять математические знания при исследовании реальных экономических процессов;

• развить у студентов способности к логическому мышлению;

• воспитать у студентов мотивацию к глубокому изучению математики как языка общения экономистов, без которого невозможно овладеть специальными дисциплинами, необходимыми им в их будущей профессиональной деятельности.

В результате изучения учебной дисциплины студент должен

знать:

– методы матричной алгебры и аналитической геометрии, математический аппарат функций одной и многих переменных, основы дифференциальных уравнений, числовые и степенные ряды;

– основные понятия и теоремы теории вероятностей, законы распределения случайных величин, методы обработки и анализа статистических данных;

– методы решения задач на экстремум;

уметь:

– решать задачи матричной алгебры, аналитической геометрии и математического анализа, анализировать задачи с экономическим содержанием;

– применять вероятностные и статистические методы для решения экономических задач;

– исследовать оптимизационные задачи методами математического программирования с использованием компьютерных технологий;

владеть:

– методикой применения методов матричной алгебры, аналитической геометрии, дифференциального и интегрального исчисления, теории вероятностей и математической статистики при решении математических и экономических задач.

Курс математики предполагает изучение основных тем учебной программы:

– основы теории множеств и математической символики;

– векторная алгебра и матричное исчисление;

– аналитическая геометрия;

– функции одной и нескольких переменных; дифференцирование функций;

– интегральное исчисление функций одной и нескольких переменных;

– дифференциальные уравнения;

– числовые и функциональные ряды;

– теория вероятностей;

– математическая статистика;

– математическое программирование.

ЭУМК **включает разделы**: теоретический, практический, контроля знаний и вспомогательный.

Теоретический раздел содержит конспект лекций в объёме, установленном типовым учебным планом по специальности 6-05-0718-01 Инженерная экономика.

Практический раздел содержит материалы для проведения практических занятий в соответствии с типовым учебным планом по специальности 6-05-0718-01 Инженерная экономика и с учебным планом учреждения образования «Полесский государственный университет» по этой специальности.

Раздел контроля знаний содержит материалы текущей и итоговой аттестации, позволяющие определить соответствие результатов учебной деятельности студентов требованиям образовательных стандартов высшего образования и учебно-программной документации.

Вспомогательный раздел содержит элементы учебно-программной документации образовательной программы высшего образования, программно-планирующей документации воспитания, учебно-методической документации, перечень учебных изданий и информационно-аналитических материалов, рекомендуемых для изучения учебной дисциплины Математика.

ТЕОРЕТИЧЕСКИЙ РАЗДЕЛ

ТЕМА 1. ОСНОВЫ ТЕОРИИ МНОЖЕСТВ И МАТЕМАТИЧЕСКОЙ СИМВОЛИКИ

1.1. Элементы теории множеств и математической логики

1.2. Комплексные числа и действия над ними

ТЕМА 2. ВЕКТОРНАЯ АЛГЕБРА И МАТРИЧНОЕ ИСЧИСЛЕНИЕ

2.1. Понятие вектора на плоскости и в трехмерном пространстве

2.2. Понятие матрицы и линейные операции над ними.

2.3. Системы линейных алгебраических уравнений

ТЕМА 3. АНАЛИТИЧЕСКАЯ ГЕОМЕТРИЯ

3.1 Аналитическая геометрия на плоскости.

3.2. Элементы аналитической геометрии в пространстве

ТЕМА 4. ФУНКЦИИ ОДНОЙ И НЕСКОЛЬКИХ ПЕРЕМЕННЫХ. ДИФЕРЕНЦИРОВАНИЕ ФУНКЦИЙ.

4.1. Числовая последовательность и ее предел

4.2. Функции одной вещественной переменной

4.3. Дифференциальное исчисление функций одной вещественной переменной

4.4. Функции многих переменных

ТЕМА 5. ИНТЕГРАЛЬНОЕ ИСЧИСЛЕНИЕ ФУНКЦИЙ ОДНОЙ И НЕСКОЛЬКИХ ПЕРЕМЕННЫХ

5.1. Первообразная и неопределенный интеграл

5.2. Определенный интеграл

5.3. Двойные интегралы

ТЕМА 6. ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ

6.1. Обыкновенные дифференциальные уравнения.

ТЕМА 7. ЧИСЛОВЫЕ И ФУНКЦИОНАЛЬНЫЕ РЯДЫ

7.1. Числовые ряды.

7.2. Функциональные и степенные ряды.

ТЕМА 8. ТЕОРИЯ ВЕРОЯТНОСТЕЙ

8.1. Основные понятия и теоремы теории вероятностей

8.2. Схема повторных независимых испытаний

8.3. Случайные величины и их основные законы распределения

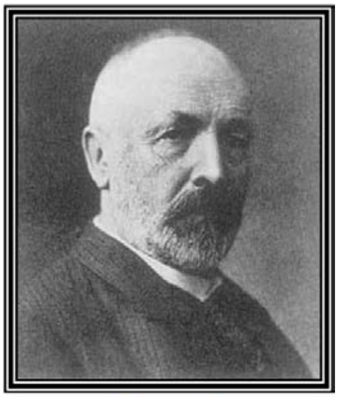
ТЕМА 9. МАТЕМАТИЧЕСКАЯ СТАТИСТИКА

9.1. Основы математической статистики

ТЕМА 1. ОСНОВЫ ТЕОРИИ МНОЖЕСТВ И МАТЕМАТИЧЕСКОЙ СИМВОЛИКИ

1.1. Элементы теории множеств и математической логики

Элементы теории множеств



Георг Кантор (1845 – 1918 гг.)

Множество – основное математическое понятие. В обычной жизни его смысл заложен в словах: «совокупность», «класс», «стая», «табун», «стадо» и т.п. Теория множеств как математическая дисциплина создана немецким математиком Г. Кантором, которая получила признание в качестве самостоятельного раздела математики к 1890 году, когда были получены ее приложения в анализе и геометрии. Главная заслуга Георга Кантора заключается в установлении того факта, что понятие бесконечность является не абстракцией, придуманной философами, а реальностью; бесконечные совокупности предметов существуют наравне с конечными.

Множество относится к математическим объектам, для которых нет строго определения. Мы можем лишь в какой-то мере дать описание основных его свойств.

Кантор описывает множество следующим образом:

Множество S есть любое собрание определенных и различимых между собой объектов нашей интуиции и интеллекта, мыслимое как единое целое.

Множество – набор (совокупность) определенных, различимых между собой объектов, рассматриваемых как единое целое, и обладающий некоторым общим свойством.

$\boxed{A, B, C \text{ и т.п.}}$

Объекты, составляющие данное множество, называют его **элементами**.

$\boxed{x, a, b \text{ и т.п.}}$

Для того, чтобы указать, что x – элемент множества A, записывают $x \in A$ и читают «x принадлежит A». Чтобы указать, что x не является элементом множества A, записывают $x \notin A$ и читают «x не принадлежит множеству A».

Для ряда числовых множеств в математике приняты стандартные обозначения:

Обозначения числовых множеств:
1) $\mathbb{N}$ – множество натуральных чисел.
2) $\mathbb{Z}$ – множество целых чисел.
3) $\mathbb{Q}$ – множество рациональных чисел (обыкновенные дроби).
4) $\mathbb{R}$ – множество действительных чисел
5) $\mathbb{C}$ – множество комплексных чисел

Существует два способа задания множества:

Рисунок 1.1.1. Способы задания множеств

Множества можно разделить на конечные и бесконечные.

Конечным множеством называется множество, состоящее из конечного числа элементов. Множество называется **бесконечным**, если оно состоит из бесконечного числа элементов.

Пример 1.1. Конечные множества: множество букв алфавита, множество студентов 1 курса Полесского государственного университета и т.д.

Бесконечные множества: множество натуральных чисел, множество точек прямой и т.д.

К конечным множествам относится и множество, не содержащее элементов вообще. Такое множество называют **пустым** и обозначают Ø.

Пример 1.2. $\{x|\, x \in R$ и $x^2 + 1 = 0\}$=Ø поскольку среди действительных чисел нет решения данного уравнения.

Если каждый элемент множества В является также и элементом множества А, то говорят, что множество В называется **подмножеством** множества А.

$$\boxed{B \subset A}$$

(B включено в A).

Пример 1.3. Множество $B = \{2, 3\}$, $A = \{2, 3, 4, 5\}$, тогда $\{2, 3\} \subset \{2, 3, 4, 5\}$, т.е. $B \subset A$.

<u>Основные свойства включений</u>:

1) Каждое множество есть подмножество самого себя: $A \subset A$.
2) Если $A \subset B$, $B \subset C$, то $A \subset C$.
3) Пустое множество есть подмножество любого множества: Ø $\subset A$.
4) Каждое не пустое множество $A \neq$ Ø имеет по крайней мере два различных подмножества: само A и пустое множество Ø.
5) Каждый элемент множества A определяет некоторое подмножество множества A: если $a \in A$, то $\{a\} \subset A$.

Множества A и B называются ***равными*** (или ***совпадающими***), если они состоят из одних и тех же элементов, т.е. $A \subset B$ и $B \subset A$.

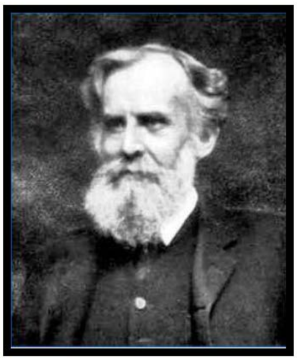
$$A = B.$$

Если множества не равны, то пишут $A \neq B$.

Пример 1.4. Множества $X = \{2, 3\}$ и $Y = \{y \mid y^2 - 5y + 6 = 0\}$, где $y = 2$ и $y = 3$ удовлетворяют уравнению $y^2 - 5y + 6 = 0$, т.е. $Y = \{2, 3\}$, значит $X = Y$.

Множество U называется ***универсальным*** для системы множеств A, B, C, …, если каждое множество системы является подмножеством U, т.е. $A \subset U$, $B \subset U$, $C \subset U$, … .

Операции над множествами



Джон Венн
(1843–1923)
английский логик

Леонард Эйлер
(1707 – 1783 гг.)
немецкий математик

Если имеются два (или более) множества, то на основе их можно получить новые множества при помощи операций (отношений) над ними.

Геометрически, для наглядного представления, данные отношения можно представить при помощи кругов, которые один из первых использовал для решения задач Г.Лейбниц, затем развил их применение Леонард Эйлер и особенного расцвета достигшие в сочинениях английского логика Джона Венна, поэтому такие схемы иногда называют Диаграммы Эйлера-Венна.

Диаграммы используются в математике, логике, менеджменте, особое применение они нашли в современной логико-математической теории «формальных нейронных сетей».

На Диаграммах Эйлера-Венна универсальное множество U изображается в виде прямоугольника, его подмножества – в виде кругов (реже прямоугольников), а элементы принадлежащие данным подмножествам в виде точек (см. рисунок 1.1.2).

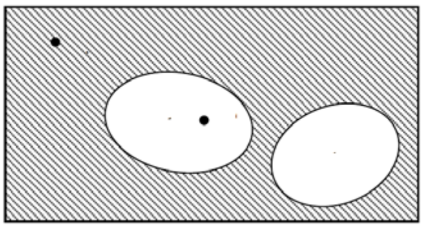


Рисунок 1.1.2. Пример диаграммы Эйлера-Венна

Рассмотрим операции над множествами, некоторые из которых (объединение и пересечение) аналогичны операциям сложения и умножения целых чисел.

Операции пересечение и объединение множеств выполняются для любой пары множеств. Операция дополнение имеет смысл для тех множеств, когда второе является подмножеством первого.

Следует провести аналогию между логическими операциями и операциями над множествами.

Высказывание	*Множество*
$\wedge$ (конъюнкция)	Пересечение $\cap$
$\vee$ (дизъюнкция)	Объединение $\cup$
$\Rightarrow$ (импликация)	Разность $\setminus$
___ (отрицание)	___ (дополнение)
Тавтология	U (универсальное множество)
Противоречие	Ø (пустое множество)

Множества вместе с определенными на них операциями образуют алгебру множеств. Последовательность выполнения операций задается с помощью формулы алгебры множеств. Например, $A \cup B$, $(A \cup B) \setminus C$ – формулы алгебры множеств.

Пример 1.5. Из 16 студентов группы, изучающих английский или китайский язык, 11 – изучают китайский.

Сколько студентов изучают оба языка, если английский язык изучают 9 из них?

Решение. Что дано? Даны два множества:

К – студенты, изучающие китайский язык, которых $N(K) = 11$.

А – студенты, изучающие английский язык, которых $N(A) = 9$.

Всего студентов 16, т.е. $N(K \cup A) = 16$.

Что нужно сделать? Узнать сколько студентов изучают оба языка одновременно (и китайский, и английский), т.е. $N(K \cap A)$ (см. рисунок 1.1.3).

Значит, количество студентов в группе изучающих оба языка можно вычислить по формуле включений и исключений:

$N(K \cup A) = N(K) + N(A) - N(K \cap A)$,

т.е. $N(K \cap A) = N(K) + N(A) - N(K \cup A)$

$N(K \cap A) = 11 + 9 - 16 = 4$**.**

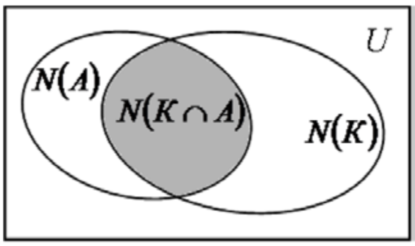
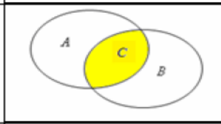
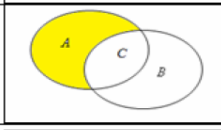
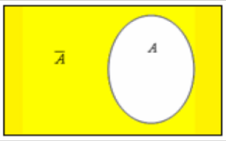
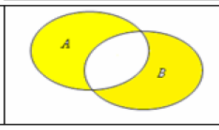


Рисунок 1.1.3. Решение задачи

Ответ: 4 человека изучают оба языка: китайский и английский язык.

Основные законы операций над множествами приведены в таблице:

№ п/п	*Определение*	*Запись*	*Изображение на диаграммах Эйлера – Венна*	*Пример*
1	***Объединением множеств*** A и B называется множество C, состоящее из тех и только тех элементов, которые принадлежат хотя бы одному из множеств A или B, т.е. принадлежат A, или принадлежат B, или принадлежат и A и B. $C = A \cup B = \{c \mid c \in A \text{ или } c \in B\}$	$C = A \cup B$		$A = \{а, б, в, г, д\}$ $B = \{г, д, е, ж\}$ $A \cup B = \{а, б, в, г, д, е, ж\}$
2	***Пересечение множеств*** A и B называется множество C, состоящее из элементов, которые принадлежат как множеству A, так и множеству B одновременно. $C = A \cap B = \{c \mid c \in A \text{ и } c \in B\}$	$C = A \cap B$		$A = \{а, б, в, г, д\}$ $B = \{г, д, е, ж\}$ $A \cap B = \{г, д\}$
3	***Разностью множеств*** A и B называется множество C, состоящее из элементов, которые принадлежат множеству A, но не входят в множество B. $C = A \setminus B = \{c \mid c \in A \text{ и } c \notin B\}$	$C = A \setminus B$ *или* $C = A - B$		$A = \{а, б, в, г, д\}$ $B = \{г, д, е, ж\}$ $A \setminus B = \{а, б, в\}$
4	***Дополнением*** к множеству A называется множество элементов, которые не содержатся в множестве A. $\overline{A} = \Omega \setminus A = \{c \mid c \notin A\}$	$\overline{A} = \Omega \setminus A$		
5	***Симметрической разностью*** множеств A и B называется множество C, состоящее из элементов, которые принадлежат какому-то одному из множеств A или B. $C = A \Delta B = (A \setminus B) \cup (B \setminus A)$	$C = A \Delta B$		$A = \{а, б, в, г, д\}$ $B = \{г, д, е, ж\}$ $A \Delta B = \{а, б, в, е, ж\}$

Законы:

1) Закон *идемпотентности*:

   а) $A \cup A = A$

   б) $A \cap A = A$

2) Закон *коммутативности*:

   а) $A \cup B = B \cup A$

   б) $A \cap B = B \cap A$

3) Закон *ассоциативности*:

   а) $A \cup (B \cup C) = (A \cup B) \cup C$

   б) $A \cap (B \cap C) = (A \cap B) \cap C$

4) Закон *дистрибутивности*:

   а) $A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$

   б) $A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$

5) Закон *поглощения*:

   а) $A \cup (A \cap B) = A$

   б) $A \cap (A \cup B) = A$

6) Закон *де Моргана*:

а) $\overline{A \cup B} = \overline{A} \cap \overline{B}$

б) $\overline{A \cap B} = \overline{A} \cup \overline{B}$

7) Закон *двойного отрицания*:

$\overline{\overline{A}} = A$

8) $\overline{U} = \varnothing$

9) Законы для объединения, пересечения и дополнения:

а) $A \cup U = U$; б) $A \cap U = A$; в) $A \cup \varnothing = A$; г) $A \cap \varnothing = \varnothing$;

д) $A \cup \overline{A} = U$; е) $A \cap \overline{A} = \varnothing$

10) $A \setminus B = A \cap \overline{B}$

11) Законы для разностей:

а) $U \setminus A = \overline{A}$; б) $A \setminus U = \varnothing$; в) $A \setminus \varnothing = A$; г) $\varnothing \setminus A = \varnothing$;

д) $A \setminus A = \varnothing$

Числовые множества. Ограниченные и неограниченные множества. Окрестность точки.

Множества, элементами которых являются числа, называются **числовым.** Примерами числовых множеств являются:

$\mathbb{N} = \{1; 2; 3; ...; n; ...\}$ – множество натуральных чисел;

$\mathbb{Z}_0 = \{0; 1; 2; ...; n; ...\}$ – множество целых неотрицательных чисел

$\mathbb{Z} = \{0; \pm 1; \pm 2; ...; \pm n; ...\}$ – множество целых чисел;

$\mathbb{Q} = \{\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{n}}; m \in Z, n \in N\}$ – множество рациональных чисел.

$\mathbb{R}$ – множество действительных чисел.

Между этими множествами существует соотношение:

$$\mathbb{N} \subset \mathbb{Z}_0 \subset \mathbb{Z} \subset \mathbb{Q} \subset \mathbb{R}.$$

Множество $\mathbb{R}$ содержит рациональные и иррациональные числа. Всякое рациональное число выражается или конечной десятичной дробью, или бесконечной периодической дробью. Так, $\frac{1}{2} = 0{,}5$ (= 0,500 ...), $\frac{1}{3} = 0{,}333$ ... – рациональные числа.

Действительные числа, не являющиеся рациональными, называются иррациональными.

Пусть, a и b – действительные числа, причем, $a < b$.

Числовыми промежутками (интервалами) называют подмножества всех действительных чисел, имеющих следующий вид:

$[a;\ b] = \{x\colon a \le x \le b\}$ – отрезок (сегмент, замкнутый промежуток);

$(a;\ b) = \{x\colon a < x < b\}$ – интервал (открытый промежуток);

$[a;\ b) = \{x\colon a \le x < b\}$;

$(a;\ b] = \{x\colon a < x \le b\}$ – полуоткрытые интервалы (или полуоткрытые отрезки);

$(-\infty;\ b] = \{x\colon x \le b\}$;

$(-\infty;\ b) = \{x\colon x < b\}$;

$[a;\ +\infty) = \{x\colon x \ge a\}$;

$(a;\ +\infty) = \{x\colon x > a\}$;

$(-\infty;\ \infty) = \{x\colon -\infty < x < +\infty\} = R$ – бесконечные интервалы (промежутки).

Числа, a и b называются соответственно левым и правым концами этих промежутков. Символы $-\infty$ и $+\infty$ не числа, это символическое обозначение процесса неограниченного удаления точек числовой оси от начала O влево и вправо.

Пусть x_0 – любое действительное число (точка на числовой прямой). Окрестностью точки x_0 называется любой интервал $(a;\ b)$, содержащий точку x_0. В частности, интервал $(x_0 - \varepsilon,\ x_0 + \varepsilon)$, где $\varepsilon > 0$, называется ε-окрестностью точки x_0. Число x_0 называется центром, а число ε-радиусом.

Если $x \in (x_0 - \varepsilon;\ x_0 + \varepsilon)$, то выполняется неравенство $x_0 - \varepsilon < x < x_0 + \varepsilon$, или, что то же, $|x - x_0| < \varepsilon$. Выполнение последнего неравенства означает попадание точки x в ε-окрестность точки x_0.

1.2. Комплексные числа и действия над ними

Необходимость в этих числах нового типа появилась при решении квадратных уравнений для случая D < 0 (здесь D – дискриминант квадратного уравнения). Долгое время эти числа не находили физического применения, поэтому их и назвали «мнимыми» числами. Однако сейчас они очень широко применяются в различных областях физики и техники: электротехнике, гидро- и аэродинамике, теории упругости и др.

Комплексными числами называются числа вида: a+bi, где a и b – действительные числа, а i – **мнимая единица**, т.е. $i^2 = -1$. Число a называется действительной частью, а b – мнимой частью комплексного числа a+bi. Два комплексных числа a+bi и a–bi называются **сопряжёнными** комплексными числами.

Замечания:

1. Действительное число a может быть также записано в форме комплексного числа: a + 0i или a – 0i. Например, записи 5 + 0i и 5 – 0i означают одно и то же число 5.

2. Комплексное число 0 + bi называется **чисто мнимым числом**. Запись bi означает то же самое, что и 0 + bi.

3. Два комплексных числа a + bi и c + di считаются равными, если a = c и b = d. В противном случае комплексные числа не равны.

Суммой комплексных чисел a + bi и c + di называется комплексное число (a + c) + (b + d) i.

Таким образом, при сложении комплексных чисел отдельно складываются их абсциссы и ординаты.

Это определение соответствует правилам действий с обычными многочленами.

Разностью двух комплексных чисел a+bi (уменьшаемое) и c+di (вычитаемое) называется комплексное число (a – c) + (b – d)i.

Таким образом, при вычитании двух комплексных чисел отдельно вычитаются их абсциссы и ординаты.

Произведением комплексных чисел a + bi и c + di называется комплексное число: (ac – bd) + (ad + bc)i.

Это определение вытекает из двух требований:

1) числа a + bi и c + di должны перемножаться, как алгебраические двучлены,

2) число i обладает основным свойством: $i^2 = –1$.

Пример 1.4. $(a + bi)(a – bi) = a^2 + b^2$.

Следовательно, произведение двух сопряжённых комплексных чисел равно действительному положительному числу.

Решение: Разделить комплексное число a + bi (делимое) на другое c+di (делитель) – значит найти третье число e + f i (частное), которое будучи умноженным на делитель c+di, даёт в результате делимое a + bi.

Если делитель не равен нулю, деление всегда возможно.

Пример 1.5. Найти (8 + i): (2 – 3i).

Решение: Перепишем это отношение в виде дроби:

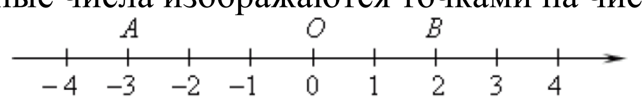
$$\frac{8+i}{2-3i}$$

Умножив её числитель и знаменатель на $2 + 3i$, выполнив все преобразования, получим:

$$\frac{(8+i)(2+3i)}{(2-3i)(2+3i)} = \frac{13+26i}{13} = 1+2i.$$

<u>Геометрическое представление комплексных чисел</u>

Действительные числа изображаются точками на числовой прямой:



Здесь точка А означает число –3, точка В – число 2, и 0 – ноль. В отличие от этого комплексные числа изображаются точками на координатной плоскости. Выберем для этого прямоугольные (декартовы) координаты с одинаковыми масштабами на обеих осях. Тогда комплексное число a+ bi будет представлено точкой P с абсциссой a и ординатой b (Рис. 1.2.1). Эта система координат называется **комплексной плоскостью**.

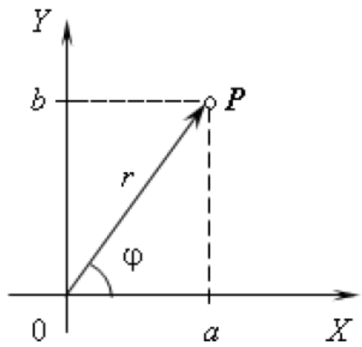


Рисунок 1.2.1. Геометрическое представление комплексных чисел

Модулем комплексного числа называется длина вектора 0P, изображающего комплексное число на координатной (комплексной) плоскости.

Модуль комплексного числа a + bi обозначается |a+bi| или буквой r и равен: $r = |a + bi| = \sqrt{a^2 + b^2}$.

Сопряжённые комплексные числа имеют одинаковый модуль.

Аргумент комплексного числа – это угол φ между осью Ox и вектором OP, изображающим это комплексное число.

Отсюда, tg φ = b / a.

<u>Тригонометрическая форма комплексного числа</u>

Абсциссу a и ординату b комплексного числа a + bi можно выразить через его модуль r и аргумент φ:

Тогда

$$a = r\ cos\varphi, b = r\ sin\varphi;$$

$$a + bi = r(cos\varphi + i\ sin\varphi).$$

Операции с комплексными числами, представленными в тригонометрической форме:

$$1.\ z_1 \cdot z_2 = [r_1(cos\varphi_1 + i\,sin\,\varphi_1)][r_2(cos\varphi_2 + i\,sin\,\varphi_2)] \\ = r_1 \cdot r_2[cos(\varphi_1 + \varphi_1) + i\,sin(\varphi_1 + \varphi_2)].$$

$$2. z_1/z_2 = [r_1(cos\varphi_1 + i\,sin\,\varphi_1)]/[r_2(cos\varphi_2 + i\,sin\,\varphi_2)] \\ = r_1/r_2[cos(\varphi_1 - \varphi_1) + i\,sin(\varphi_1 - \varphi_2)].$$

$$3. z^n = [r(cos\varphi + i\ sin\varphi)]^n = r^n(\cos n\varphi + i\ sin\ n\,\varphi).$$

Это знаменитая **формула Муавра**.

$$4. \sqrt{z} = \sqrt{r(cos\varphi + i\ sin\varphi)} = \sqrt{r}\left\{\cos\left[\frac{\varphi + 2\pi k}{n}\right] + i\ sin\left[\frac{\varphi + 2\pi k}{n}\right]\right\}.$$

Здесь k – целое число. Чтобы получить n различных значений корня n–ой степени из z необходимо задать n последовательных значений для k (например, $k = 0, 1, 2, \ldots, n - 1$).

Если положить $e^{i\varphi} = \cos\varphi + i\sin\varphi$ (это соотношение называют формулой Эйлера), то приходим к показательной форме записи комплексного числа $z = re^{i\varphi}$.

Пример. При $n \in Z$ найти z^{1000} , где z = (1+i). Несложно заметить, что $|z| = \frac{\sqrt{2}}{2}$, arg(z)=$\frac{\pi}{4}$.

Тогда по формуле Муавра:

$$(1 + i)^{1000} = (\frac{\sqrt{2}}{2}\left(cos\frac{\pi}{4} + isin\frac{\pi}{4}\right))^{1000} =$$

$$= 2^{-500}(cos250\pi + isin250\pi) = 2^{-500}$$

ТЕМА 2. ВЕКТОРНАЯ АЛГЕБРА И МАТРИЧНОЕ ИСЧИСЛЕНИЕ

2.1. Понятие вектора на плоскости и в трехмерном пространстве

Многие величины, например, сила и скорость, определяются не только своим числовым значением, но и направлением. Такие величины называются векторными.

Вектором называется направленный отрезок. Если начало вектора находится в точке A, а конец – в точке B, то вектор обозначается $\overrightarrow{AB}$. Если же начало и конец вектора не указываются, то его обозначают строчной буквой латинского алфавита $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}\ \ldots$ Через $\overrightarrow{BA}$ обозначают вектор, направленный противоположно вектору $\overrightarrow{AB}$.

Нулевым вектором называется вектор, у которого начало и конец совпадают и обозначается $\vec{0}$. Его направление называют неопределенным.

Длиной или модулем вектора называется расстояние между его началом и концом. Записи $|\overrightarrow{AB}|$ и $|\vec{a}|$ обозначают модули векторов $\overrightarrow{AB}$ и $\vec{a}$.

Свободным вектором или параллельным переносом называется совокупность равных между собой векторов.

У свободного вектора нет определенной начальной и конечной точек, поэтому для его обозначения применяются строчные буквы латинского алфавита, например, $\vec{a}$.

Векторы называются **коллинеарными**, если они параллельны одной прямой, и компланарными, если они параллельны одной плоскости.

Если коллинеарные векторы направлены в одинаковом направлении, то такие векторы называются **сонаправленными**, а если – в разные стороны, то векторы будут **противоположно направлены**.

Обозначения: коллинеарность векторов записывают привычным значком параллельности: $\vec{a} \parallel \vec{b}$ при этом возможна детализация $\vec{a} \upuparrows \vec{b}$ (векторы сонаправлены) или $\vec{a} \uparrow\downarrow \vec{b}$ (векторы направлены противоположно).

Два вектора называются равными, если они сонаправлены и равны по длине.

К **линейным операциям** над векторами относятся:

1) умножение вектора на число;
2) сложение векторов.

Теперь рассмотрим эти операции подробнее.

Произведением вектора $\vec{a}$ на число k называется вектор $\vec{b} = k\vec{a}$, длина которого $|\vec{b}| = |k||\vec{a}|$ и направление совпадает с направлением вектора $\vec{a}$ при $k > 0$, и противоположно ему при $k < 0$.

Пусть $\vec{a}$ и $\vec{b}$ – любые два вектора. Поместим начало вектора $\vec{b}$ в конец вектора $\vec{a}$. Вектор, соединяющий начало вектора $\vec{a}$ с концом вектора $\vec{b}$, назовем **суммой векторов $\vec{a}$ и $\vec{b}$** и будем обозначать $\vec{a} + \vec{b}$. Это правило сложения векторов называют правилом треугольников (Рис. 2.1.1).

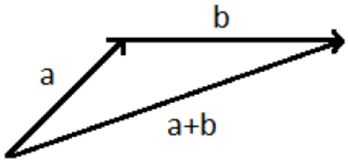


Рисунок 2.1.1. Правило треугольника

Сумму двух векторов можно построить также по правилу параллелограмма. Сложить несколько векторов можно по правилам треугольника.

Набор векторов $\overrightarrow{a_1}, \overrightarrow{a_2}, \ldots, \overrightarrow{a_k}$ называется системой векторов.

Система из k векторов $\overrightarrow{a_1}, \overrightarrow{a_2}, \ldots, \overrightarrow{a_k}$ называется **линейно зависимой**, если существуют такие числа, $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_k$, не все равные нулю одновременно и такие, что $\lambda_1 \cdot \overrightarrow{a_1} + \lambda_2 \cdot \overrightarrow{a_2} + \ldots + \lambda_k \cdot \overrightarrow{a_k} = \vec{o}$.

Система из k векторов $\overrightarrow{a_1}, \overrightarrow{a_2}, \ldots, \overrightarrow{a_k}$ называется **линейно независимой**, если равенство возможно только при $\lambda_1 = \lambda_2 = \ldots = \lambda_k = 0$, т.е. когда линейная комбинация в левой части равенства тривиальная.

Например, любые коллинеарные векторы, три компланарных вектора, четыре и более векторов в трехмерном пространстве всегда линейно зависимы.

Свойства линейно зависимых и линейно независимых векторов:

1. Если в систему векторов входит нулевой вектор, то она линейно зависима.

2. Если в системе векторов имеется два равных вектора, то она линейно зависима.

3. Если в системе векторов имеется два пропорциональных вектора $\overrightarrow{a_i} = \lambda \overrightarrow{a_j}$, то она линейно зависима.

4. Система из $k > 1$ векторов линейно зависима тогда и только тогда, когда хотя бы один из векторов есть линейная комбинация остальных.

5. Любые векторы, входящие в линейно независимую систему, образуют линейно независимую подсистему.

6. Система векторов, содержащая линейно зависимую подсистему, линейно зависима.

7. Если система векторов $\overrightarrow{a_1}, \overrightarrow{a_2}, \ldots, \overrightarrow{a_k}$ линейно независима, а после присоединения к ней вектора $\vec{a}$ оказывается линейно зависимой, то вектор $\vec{a}$ можно разложить по векторам $\overrightarrow{a_1}, \overrightarrow{a_2}, \ldots, \overrightarrow{a_k}$ и притом единственным образом, т.е. коэффициенты разложения находятся однозначно.

Линейной комбинацией векторов $\overrightarrow{a_1}, \overrightarrow{a_2}, \ldots, \overrightarrow{a_n}$ называется вектор $\vec{a}$, определяемый по формуле:

$$\vec{a} = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i \overrightarrow{a_i}$$

где λ_i – некоторые числа.

Три упорядоченных линейно независимых вектора $\overrightarrow{e_1}$, $\overrightarrow{e_2}$, $\overrightarrow{e_3}$ в трехмером пространстве называются **базисом**. Упорядоченная тройка некомпланарных векторов всегда образует базис в трехмером пространстве.

Любой вектор $\vec{a}$ в пространстве можно разложить по базису $\overrightarrow{e_1}$, $\overrightarrow{e_2}$, $\overrightarrow{e_3}$, т. е. представить $\vec{a}$ в виде линейной комбинации базисных векторов:

$$\overrightarrow{a} = x\overrightarrow{e_1} + y\overrightarrow{e_2} + z\overrightarrow{e_3},$$

где *x, y, z* являются координатами вектора $\vec{a}$ в базисе $\overrightarrow{e_1}$, $\overrightarrow{e_2}$, $\overrightarrow{e_3}$.

Базис называется **ортонормированным**, если его векторы взаимно перпендикулярны и имеют единичную длину. Примером такого базиса служит базис — $\vec{\imath}$, $\vec{\jmath}$, $\vec{k}$, т. е. $\vec{\imath} = (1, 0, 0)$, $\vec{\jmath} = (0, 1, 0)$, $\vec{k} = (0, 0, 1)$.

Осью называется прямая, на которой:

1) выбрана начальная точка ("начало" – точка О);

2) указано (стрелкой) положительное направление отсчета;

3) выбран масштаб.

Декартовой прямоугольной системой координат на плоскости (в пространстве) называют две (три) взаимно перпендикулярные оси с общим началом О. Первая ось *Ox* называется осью абсцисс, вторая ось *Oy* – осью ординат (третья ось *Oz* – осью аппликат).

Каждой точке плоскости (пространства) ставится в соответствие упорядоченная пара (тройка) действительных чисел – **координаты данной точки**.

Пример.

а) Проверить, коллинеарны ли векторы $\vec{a} = (-2; 4)$, $\overrightarrow{b} = (1; -2)$.

б) Образуют ли базис векторы $\vec{k} = (3; 7)$, $\overrightarrow{m} = (-6; 14)$?

Решение:

а) Выясним, существует ли для векторов $\vec{a} = (-2;\ 4)$, $\vec{b} = (1; -2)$ коэффициент пропорциональности λ, такой, чтобы выполнялись равенства $\begin{cases} a_1 = \lambda b_1 \\ a_2 = \lambda b_2 \end{cases}$

Подставляем:

$\begin{cases} -2 = \lambda \cdot 1 \\ 4 = \lambda \cdot (-2) \end{cases} \Longrightarrow \lambda = -2$, значит, данные векторы коллинеарны.

Составим пропорцию из отношений соответствующих координат векторов:

$$\frac{-2}{1} = \frac{4}{-2}$$

Сокращаем:

$-2 = -2$, таким образом, соответствующие координаты пропорциональны, следовательно, $\vec{a} \parallel \vec{b}$

б) Два вектора плоскости образуют базис, если они не коллинеарны (линейно независимы). Исследуем на коллинеарность векторы $\vec{k} = (3; 7)$, $\overrightarrow{m} = (-6; 14)$. Составим систему:

$$\begin{cases} k_1 = \lambda m_1 \\ k_2 = \lambda m_2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 3 = \lambda \cdot (-6) \\ 7 = \lambda \cdot 14 \end{cases}$$

Из первого уравнения следует, что $\lambda = -\frac{1}{2}$, из второго уравнения следует, что $\lambda = \frac{1}{2}$, значит, система несовместна (решений нет). Таким образом, соответствующие координаты векторов не пропорциональны.

Вывод: векторы линейно независимы и, следовательно, образуют базис.

Проекция вектора на ось

Теперь переходим к определению проекции вектора на ось. Для этого не помешает повторить определение проекции точки на прямую.

Пусть на плоскости или в трехмерном пространстве нам задана ось L и ненулевой вектор $\overrightarrow{AB}$. Обозначим проекции точек A и B на прямую L соответственно, как A_1 и B_1 и построим вектор $\overrightarrow{A_1B_1}$. Забегая вперед скажем, что вектор $\overrightarrow{A_1B_1}$ – это проекция вектора $\overrightarrow{AB}$ на ось L.

Проекция вектора на ось – это вектор, началом и концом которого являются соответственно проекции начала и конца заданного вектора.

Следствие. Проекция вектора на ось положительна (отрицательна), если вектор образует с осью острый (тупой) угол, и равна нулю, если этот угол – прямой.

Проекцией вектора $\vec{a}$ на направление вектора $\vec{b}$ называется число, равное величине проекции вектора $\vec{a}$ на ось, проходящую через вектор $\vec{b}$.

Для вычисления проекции вектора $\vec{a}$ на направление вектора $\vec{b}$ из определения скалярного произведения получена формула:

$$\text{пр}\ \vec{b}_a = \frac{\vec{b} \cdot \vec{a}}{|\vec{b}|}$$

Пример. Найти проекцию вектора $\vec{a} = \{1; 2\}$ на вектор $\vec{b} = \{3; 4\}$.

Решение:

Найдем скалярное произведение этих векторов:

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = 1 \cdot 3 + 2 \cdot 4 = 3 + 8 = 11.$$

Найдем модуль вектора $\vec{b}$:

$$|\vec{b}| = \sqrt{32} + 42 = \sqrt{9} + 16 = \sqrt{25} = 5.$$

Найдем проекцию вектора $\vec{a}$ на вектор $\vec{b}$:

$$\text{пр}\ \vec{b}_a = \frac{\vec{b} \cdot \vec{a}}{|\vec{b}|} = \frac{11}{5} = 2{,}2.$$

Ответ: 2,2.

Расстояние между двумя точками на плоскости

Даны две точки на плоскости с координатами $A(x_1;\ y_1)$ и $B(x_2;\ y_2)$.

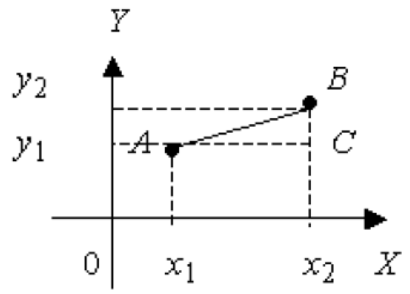


Рисунок 2.1.2. Расстояние между точками на плоскости

Из треугольника ABC:

$$d = AB = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}.$$

Пример. Найти расстояние между точками $A(-1;\ 3)$ и $B(6;\ 2)$.
*Решение***:**

$$AB = \sqrt{(x_b - x_a)^2 + (y_b - y_a)^2} = \sqrt{\left(6 - (-1)\right)^2 + (2 - 3)^2} =$$
$$= \sqrt{7^2 + 1^2} = \sqrt{50} = 5\sqrt{2}.$$

Ответ: $AB = 5\sqrt{2}$.

Деление отрезка в данном отношении

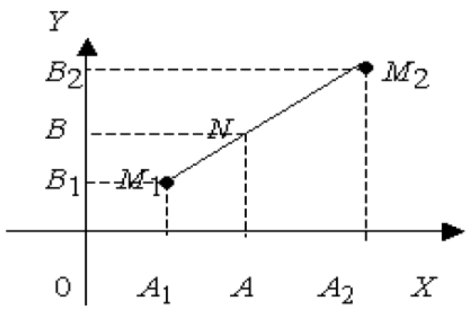


Рисунок 2.1.3. Деление отрезка в данном отношении

Пусть даны две точки $M_1\ (x_1;\ y_1)$ и $M_2\ (x_2;\ y_2)$. Найдем на отрезке M_1M_2 точку N, которая делила бы данный отрезок в отношении λ:

$$\frac{M_1N}{NM_2} = \lambda$$

$$x = \frac{x_1+\lambda x_2}{1+\lambda}\quad y = \frac{y_1+\lambda y_2}{1+\lambda}.$$

Координаты точки, делящей отрезок в данном отношении, находятся по этим формулам.

Если $\lambda = 1$, то деление отрезка производится пополам, тогда

$$x = \frac{x_1 + x_2}{2}, y = \frac{y_1 + y_2}{2}$$

– формулы для нахождения координат середины отрезка.

Пример. Найти координаты точки M, делящей отрезок AB в отношении $1:3$, если известны точки $A(5;3), B(-3;-1)$.

Решение: В данной задаче $\lambda = \frac{AM}{BM} = \frac{1}{3}$

По формулам деления отрезка в данном отношении, найдём ку $M(x_M; y_M)$:

$$x_M = \frac{x_A + \lambda \cdot x_B}{1 + \lambda} = \frac{5 + \frac{1}{3} \cdot (-3)}{1 + \frac{1}{3}} = \frac{5 - 1}{\frac{4}{3}} = 4 \cdot \frac{3}{4} = 3,$$

$$y_M = \frac{y_A + \lambda \cdot x_B}{1 + \lambda} = \frac{3 + \frac{1}{3} \cdot (-1)}{1 + \frac{1}{3}} = \frac{3 - \frac{1}{3}}{\frac{4}{3}} = \frac{\frac{8}{3}}{\frac{4}{3}} = \frac{8}{3} \cdot \frac{3}{4} = 2.$$

Ответ: $M(3;2)$.

Полярная система координат на плоскости – это совокупность точки O, называемой полюсом, и полупрямой Ox, называемой полярной осью. Кроме того, задается масштабный отрезок для измерения расстояний от точек плоскости до полюса. Как правило, на полярной оси выбирается вектор $\vec{i}$, приложенный к точке O, длина которого принимается за величину масштабного отрезка, а направление вектора задает положительное направление на полярной оси.

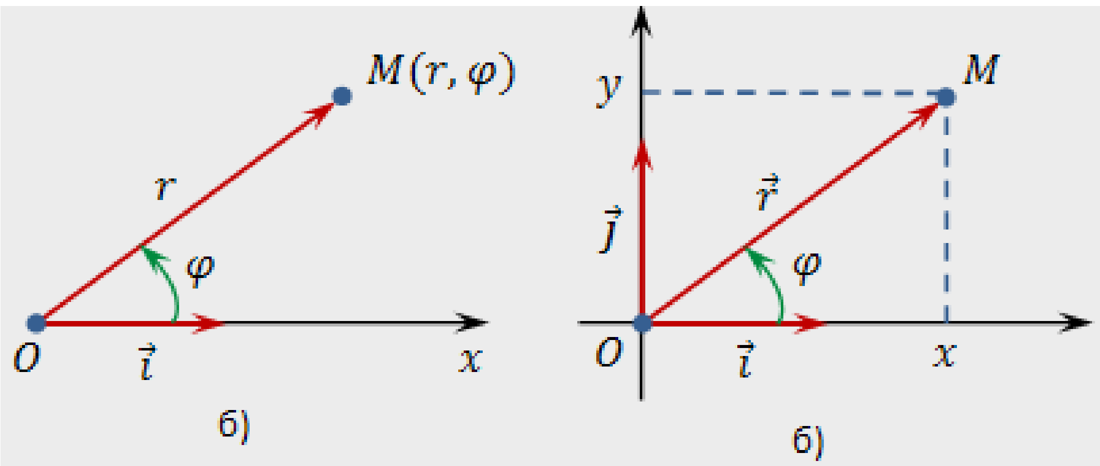


Рисунок 2.1.4. Полярная система координат

Положение точки M в полярной системе координат определяется расстоянием r (полярным радиусом) от точки M до полюса (т.е. $r = |\overrightarrow{OM}|$) и углом φ (полярным углом) между полярной осью и вектором $\overrightarrow{OM}$. Полярный радиус и полярный угол составляют полярные координаты точки M, что записывается в виде $M\ (r,\ \varphi)$. Полярный угол измеряется в радианах и отсчитывается от полярной оси:

– в положительном направлении (против направления движения часовой стрелки), если значение угла положительное;

– в отрицательном направлении (по направлению движения часовой стрелки), если значение угла отрицательное.

Выведем формулы, связывающие между собой прямоугольные координаты $x,\ y$ точки M, отличной от точки O, и ее полярные координаты $r,\ \varphi$, получим:

$$\begin{cases} x = r \cdot cos\varphi, \\ y = r \cdot sin\varphi. \end{cases}$$

Скалярное произведение вектора, его свойства и механический смысл. Условие ортогональности двух векторов. Скалярное произведение в координатной форме

Скалярным произведением векторов $\vec{a}$ и $\vec{b}$ называется число, обозначаемое $(\vec{a}, \vec{b})$ или $\vec{a} \cdot \vec{b}$, и равное произведению их модулей и косинуса угла φ между ними, т.е.

$$(\vec{a}, \vec{b}) = |\vec{a}\,|\,|\vec{b}|\cos\varphi$$

Свойства скалярного произведения векторов

Для любых векторов $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ и любого числа α:

1. $\overline{a^2} = |\vec{a}\,|^2$ – скалярный квадрат.
2. $\vec{a} \cdot \vec{b} = \vec{b} \cdot \vec{a}$
3. $\vec{a} \cdot (\vec{b} + \vec{c}) = \vec{a} \cdot \vec{b} + \vec{b} \cdot \vec{c}$
4. $(\alpha \cdot \vec{a}) \cdot \vec{b} = \alpha \cdot (\vec{a} \cdot \vec{b})$.

Из определения скалярного произведения следует, что угол между ненулевыми векторами $\vec{a}$ и $\vec{b}$ определяется формулой

$$\cos\varphi = \frac{\vec{a}, \vec{b}}{|\vec{a}||\vec{b}|},$$

где φ – угол между векторами $\vec{a}$ и $\vec{b}$, если хотя бы один из векторов нулевой, то угол φ не определен.

Из формулы следует условие ортогональности векторов:

- два вектора ортогональны тогда и только тогда, когда их скалярное произведение равно нулю, т.е.

$$\vec{a} \perp \vec{b} \Leftrightarrow (\vec{a}, \vec{b}) = 0$$

(нулевой вектор можно считать ортогональным любому вектору).

Пример. Найти скалярное произведение векторо $\vec{a}$ и $\vec{b}$, если

$$|\vec{a}| = 2, |\vec{b}| = 5, \angle(\vec{a}, \vec{b}) = \frac{\pi}{6}$$

Решение: Используем формулу $\vec{a}\vec{b} = |\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \cdot cos\angle(\vec{a}; \vec{b})$. В данном случае:

$$\vec{a}\vec{b} = |\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \cdot cos\angle(\vec{a}; \vec{b}) = 2 \cdot 5 \cdot cos\frac{\pi}{6} = 10 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = 5\sqrt{3}$$

Ответ: $\vec{a}\vec{b} = 5\sqrt{3}$

Механический смысл скалярного произведения

Работа А постоянной силы $\vec{F}$, действующей на материальную точку, при ее перемещении из точки A в точку B определяется формулой:

$$\text{А} = (\vec{F}, \overrightarrow{AB})$$

Определители второго и третьего порядка и их свойства. Алгебраически дополнения и миноры

Определителем второго порядка называется число, полученное с помощью элементов квадратной матрицы 2-го порядка следующим образом:

$$\Delta = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}.$$

При этом из произведения элементов, стоящих на так называемой главной диагонали матрицы (идущей из левого верхнего в правый нижний угол) вычитается произведение элементов, находящихся на второй, или побочной, диагонали.

Определителем третьего порядка называется число, определяемое с помощью элементов квадратной матрицы 3-го порядка следующим образом:

$$\Delta = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22}a_{33} + a_{13}a_{21}a_{32} + a_{12}a_{23}a_{31} - a_{13}a_{22}a_{31} - $$
$$- a_{12}a_{21}a_{33} - a_{11}a_{23}a_{32}$$

Замечание. Для того чтобы легче запомнить эту формулу, можно использовать так называемое правило треугольников. Оно заключается в следующем: элементы, произведения которых входят в определитель со знаком «+», располагаются так:

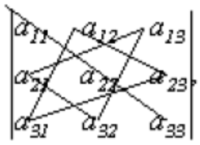


Рис.2.4

образуя два треугольника, симметричных относительно главной диагонали. Элементы, произведения которых входят в определитель со знаком «–», располагаются аналогичным образом относительно побочной диагонали.

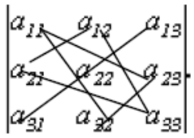


Рис.2.5

Основные свойства определителей.

Сформулируем и докажем основные свойства определителей 2-го и 3-го порядка:

Свойство 1. Определитель не изменяется при транспонировании, т.е.

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{21} & a_{31} \\ a_{12} & a_{22} & a_{32} \\ a_{13} & a_{23} & a_{33} \end{vmatrix}$$

Свойство 2. При умножении элементов строки определителя на некоторое число весь определитель умножается на это число, т.е.

$$\begin{vmatrix} ka_{11} & ka_{12} & ka_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = k\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$$

Свойство 3. Определитель, имеющий нулевую строку, равен 0.

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ 0 & 0 & 0 \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = 0.$$

Свойство 4. Определитель, имеющий две равные строки, равен 0.

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = 0.$$

Свойство 5. Определитель, две строки которого пропорциональны, равен 0.

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ ka_{11} & ka_{12} & ka_{13} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = 0.$$

Свойство 6. При перестановке двух паралельных рядов определитель меняет знак.

$$\begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = -\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}.$$

Свойство 7.

$$\begin{vmatrix} b_1+c_1 & b_2+c_2 & b_3+c_3 \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} b_1 & b_2 & b_3 \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} c_1 & c_2 & c_3 \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$$

Свойство 8. Величина определителя не изменится, если к элементам одной строки прибавить соответствующие элементы другой строки, умноженные на одно и то же число.

$$\begin{vmatrix} a_{11}+ka_{21} & a_{12}+ka_{22} & a_{13}+ka_{23} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}.$$

Пример. Вычислить определитель $\Delta=\begin{vmatrix} 1 & -1 & 4 \\ 2 & 3 & 5 \\ -2 & 0 & -3 \end{vmatrix}$

Решение: По правилу треугольников

$$\Delta = 1\cdot 3\cdot(-3) + (-2)\cdot(-1)\cdot 5 + 2\cdot 4\cdot 0 -$$
$$-(-2\cdot 3\cdot 4 + 2\cdot(-1)\cdot(-3) + 1\cdot 0\cdot 5) =$$
$$= -9 + 10 + 0 - (-12 + 6 + 0) = 7.$$

Ответ: 7.

Разложение определителя по строке

Минором элемента a_{ij} определителя называется определитель, полученный из данного путем вычеркивания i-й строки и j-го столбца, в которых стоит выбранный элемент a_{ij}.

Минор элемента a_{ij} обозначается M_{ij} .

Алгебраическим дополнением A_{ij} элемента a_{ij} определителя называется его минор, если сумма индексов данного элемента $i+j$ есть число четное, или число, противоположное минору, если $i+j$ нечетно, т.е.

$$A_{ij} = (-1)^{i+j} M_{ij}$$

Пример. Найти минор M_{23} и алгебраическое дополнение A_{23} для определителя третьего порядка

$$A = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}.$$

Вычисляется по формулам:

$$M_{23} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix}, A_{23} = (-1)^{2+3} M_{23} = -M_{23}.$$

Рассмотрим еще один способ вычисления определителей третьего порядка – так называемое разложение по строке или столбцу. Для этого рассмотрим следующую теорему:

Теорема (Лапласа). Определитель равен сумме произведений элементов любого ряда на их алгебраические дополнения.

Итак, для вычисления определителя его можно раскладывать по элементам не только первой строки, но и любой другой строки или столбца. Результат всегда будет одинаковым.

Пример. Найти определитель $\Delta = \begin{vmatrix} 1 & -2 & 0 \\ 3 & 4 & 2 \\ -1 & 3 & 1 \end{vmatrix}$.

Решение: Находим определитель

$$\Delta = \begin{vmatrix} 1 & -2 & 0 \\ 3 & 4 & 2 \\ -1 & 3 & 1 \end{vmatrix} = 1 \begin{vmatrix} 4 & 2 \\ 3 & 1 \end{vmatrix} - (-2) \begin{vmatrix} 3 & 2 \\ -1 & 1 \end{vmatrix} + 0 \begin{vmatrix} 3 & 4 \\ -1 & 3 \end{vmatrix} = 8$$

Ответ: 8.

Ориентация тройки векторов в пространстве. Векторное произведение векторов, его свойства, геометрический и физический смысл. Векторное произведение в координатной форме. Условие коллинеарности векторов

Для дальнейшего изучения пространственных свойств необходимо ввести определение ориентации пространства. Строгая теория, касающаяся этого понятия не очень сложна, но достаточно суха. В связи с этим ограничимся лишь некоторыми “качественными” пояснениями.

Итак, все упорядоченные некомпланарные тройки векторов могут быть разбиты на два непересекающихся класса: правые тройки и левые тройки.

Упорядоченная тройка некомпланарных векторов $\overrightarrow{a_1}, \overrightarrow{a_2}, \overrightarrow{a_3}$ называется правой, если наблюдателю, находящемуся внутри телесного угла, образованного этими векторами, кратчайшие повороты от $\overrightarrow{a_1}$ к $\overrightarrow{a_2}$ и от $\overrightarrow{a_1}$ к $\overrightarrow{a_3}$ кажутся происходящими против часовой стрелки. Если повороты происходят по часовой стрелке, то тройка – левая.

Есть и ещё один способ разделить эти два класса:

Правило правой руки: Совместите начала всех векторов тройки в одной точке. Представьте, что в этой точке находится ладонь Вашей правой руки. Совместите большой палец с первым вектором базиса, а указательный – со вторым. Если теперь вы сможете совместить средний палец с третьим вектором, то рассматриваемая тройка векторов – правая. Если нет – левая.

Выбрав один из двух классов и назвав все входящие в него базисы “положительными” мы зададим ориентацию пространства.

Векторным произведением упорядоченной пары векторов $\vec{a}$ и $\vec{b}$ называется вектор $[\vec{a},\vec{b}]$, такой что$\left|[\vec{a},\vec{b}]\right| = S_{a,b}$, где $S_{a,b}$ – площадь параллелограмма, построенного на векторах $\overrightarrow{a_1}$ и $\overrightarrow{a_2}$ (если $\vec{a} \,||\, \vec{b}$, то $S_{a,b}$= 0). Кроме того, $\vec{a}\perp[\vec{a},\vec{b}]\perp\vec{b}$ и $\vec{a}, \vec{b}, [\vec{a},\vec{b}]$ – правая тройка.

Свойства векторного произведения:

1. $[\vec{\boldsymbol{a}},\vec{\boldsymbol{b}}] = -[\vec{\boldsymbol{b}},\vec{\boldsymbol{a}}]$
2. $[\vec{a},\vec{b}] = \theta \Leftrightarrow \vec{a} \,||\, \vec{b}$
3. $[\overrightarrow{a_1}+\overrightarrow{a_2},\vec{b}] = [\overrightarrow{a_1},\vec{b}] + [\overrightarrow{a_2},\vec{b}]$
4. $\lambda\cdot[\vec{a},\vec{b}] = [\lambda\cdot\vec{a},\vec{b}] = [\vec{a},\lambda\cdot\vec{b}]$, $\forall\ \lambda\epsilon$R.

Векторное произведение в координатной форме

Теорема. Пусть $\vec{a} = (x_1, y_1, z_1), \vec{b} = (x_2, y_2, z_2), \vec{c} = (x_3, y_3, z_3)$
Тогда:

$$[\vec{a},\vec{b}] = \begin{vmatrix} y_1 & z_1 \\ y_2 & z_2 \end{vmatrix} \cdot \vec{\imath} - \begin{vmatrix} x_1 & z_1 \\ x_2 & z_2 \end{vmatrix} \cdot \vec{\jmath} + \begin{vmatrix} x_1 & y_1 \\ x_2 & y_2 \end{vmatrix} \cdot \vec{k}$$

Вектора, параллельные одной прямой или лежащие на одной прямой называют коллинеарными векторами:

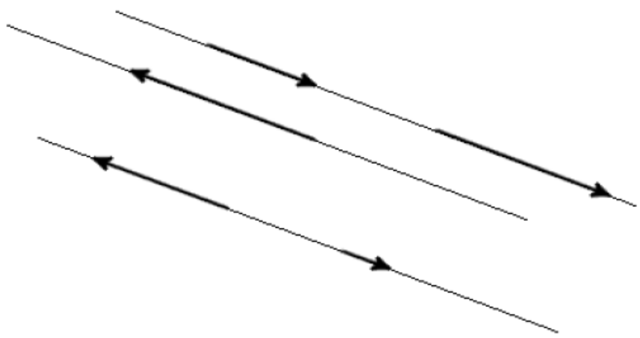


Рисунок 2.1.7. Коллинеарные вектора

Пример. Найти векторное произведение векторов $\vec{a} = (-1; 2; -3), \overrightarrow{b} = (0; -4;\ 1)$

Решение: Задача состоит из двух частей: во-первых, необходимо найти само векторное произведение (вектор), а во-вторых – его длину.

1) Найдём векторное произведение:

$$\vec{n} = [\vec{a} \times \vec{b}] = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ -1 & 2 & -3 \\ 0 & -4 & 1 \end{vmatrix} =$$

$$= \begin{vmatrix} 2 & -3 \\ -4 & 1 \end{vmatrix} \cdot \vec{i} - \begin{vmatrix} -1 & -3 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} \cdot \vec{j} + \begin{vmatrix} -1 & 2 \\ 0 & -4 \end{vmatrix} \cdot \vec{k} =$$

$$= (2 - 12) \cdot \vec{i} - (-1 - 0) \cdot \vec{j} + (4 - 0) \cdot \vec{k} = -10\vec{i} + \vec{j} + 4\vec{k}$$

В результате получен вектор $\vec{n} = -10\vec{i} + \vec{j} + 4\overrightarrow{k}$, или, ещё можно записать $\vec{n} = (-10; 1; 4)$.

Ответ: $\vec{n} = (-10;\ 1; 4)$

Условия коллинеарности векторов

Два вектора будут коллинеарны при выполнении любого из этих условий:

Условие 1. Два вектора $\vec{a}$ и $\vec{b}$ коллинеарны, если существует число λ такое, что $\vec{a} = \lambda\, \overrightarrow{b}$;

Условие 2. Два вектора коллинеарны, если отношения их координат равны;

Замечание. Условие 2 неприменимо, если один из компонентов вектора равен нулю.

Условие 3. Два вектора коллинеарны, если их векторное произведение равно нулевому вектору.

<u>**Смешанное произведение векторов. Его геометрический смысл. Условие коллинеарности трёх векторов**</u>

Смешанным произведением трех векторов $\vec{a}, \vec{b}$ и $\vec{c}$ называется число, равное скалярному произведению вектора $[\vec{a}, \overrightarrow{b}]$ на вектор $\vec{c}$:

$$(\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}) = ([\vec{a}, \overrightarrow{b}], \vec{c}).$$

Геометрический смысл смешанного произведения

Геометрический смысл смешанного произведения: если тройка векторов $\{\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}\}$ правая, то их смешанное произведение равно объему параллелепипеда, построенного на этих векторах : $(\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}) = V$. В случае левой тройки $\{\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}\}$ смешанное произведение указанных векторов равно объему параллелепипеда со знаком минус: $(\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}) = -V$.

Если $\vec{a}, \vec{b}$ и $\vec{c}$ компланарны, то их смешанное произведение равно нулю.

Итак, из выше сказанного можно сделать вывод, что объем параллелепипеда, построенного на векторах $\vec{a}$, $\vec{b}$ и $\vec{c}$ равен модулю смешанного произведения этих векторов:

$$V_{\text{парал}} = \left|(\vec{a}, \vec{b}, \vec{c})\right|$$

Объем пирамиды, построенной на этой тройке векторов равен:

$$V_{\text{пир}} = \frac{1}{6}\left|(\vec{a}, \vec{b}, \vec{c})\right|$$

Свойства смешанного произведения:

1. $(\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}) = (\vec{a}, [b, c])$;
2. $(\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}) = (\vec{b}, \vec{c}, \vec{a}) = (\vec{c}, \vec{a}, \vec{b}) = -(\vec{b}, \vec{a}, \vec{c}) = -(\vec{c}, \vec{b}, \vec{a}) = -(\vec{a}, \vec{c}, \vec{b})$;
3. Три вектора компланарны тогда и только тогда, когда $(\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}) = 0$;
4. Тройка векторов является правой тогда и только тогда, когда $(\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}) > 0$. Если же $(\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}) < 0$, то векторы $\vec{a}, \vec{b}$ и $\vec{c}$ образуют левую тройку векторов.
5. $(\lambda\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}) = (\vec{a}, \lambda\vec{b}, \vec{c}) = (\vec{a}, \vec{b}, \lambda\vec{c}) = \lambda(\vec{a}, \vec{b}, \vec{c})$;
6. $(\vec{a_1} + \vec{a_2}, \vec{b}, \vec{c}) = (\vec{a_1}, \vec{b}, \vec{c}) + (\vec{a_2}, \vec{b}, \vec{c})$;
7. $(\vec{a}, \vec{b_1} + \vec{b_2}, \vec{c}) = (\vec{a}, \vec{b_1}, \vec{c}) + (\vec{a}, \vec{b_2}, \vec{c})$;
8. $(\vec{a}, \vec{b}, \vec{c_1} + \vec{c_2}) = (\vec{a}, \vec{b}, \vec{c_1}) + (\vec{a}, \vec{b}, \vec{c_2})$;
9. $([\vec{a}, \vec{b}], \vec{c}) = \vec{b}(\vec{a}, \vec{c}) - \vec{a}(\vec{b}, \vec{c})$; $(\vec{a}, [\vec{b}, \vec{c}]) = \vec{b}(\vec{a}, \vec{c}) - \vec{c}(\vec{a}, \vec{b})$.
10. Тождество Якоби:

$$(\vec{a}, [\vec{b}, \vec{c}]) + (\vec{b}, [\vec{c}, \vec{a}]) + (\vec{c}, [\vec{a}, \vec{b}]) = 0.$$

Если векторы $\vec{a} = (a_1;\ a_2;\ a_3), \vec{b} = (b_1, b_2, b_3), \vec{c} = (c_1, c_2, c_3)$ заданы своими координатами, то их смешанное произведение вычисляется по формуле

$$(\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}) = \begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix}$$

Пример. Даны векторы $\vec{a}(1; -1; 2), \vec{b}(0; 4; 3), \vec{c}(3; 2; -6)$, вычислить смешанное произведение векторов.

Решение. По формуле смешанного произведения:

$$\left(\vec{a}\cdot\vec{b}\cdot\vec{c}\right)=\begin{vmatrix}1 & -1 & 2\\ 0 & 4 & 3\\ 3 & 2 & -6\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}4 & 3\\ 2 & -6\end{vmatrix}+3\cdot\begin{vmatrix}-1 & 2\\ 4 & 3\end{vmatrix}=$$

$$=(-24-6)+3\cdot(-3-8)=-30-33=-63$$

Ответ: -63.

2.2. Понятие матрицы и линейные операции над ними

Матрицей называется прямоугольная таблица чисел, содержащая m строк одинаковой длины (или n столбцов одинаковой длины). Матрица записывается в виде:

$$A=\begin{pmatrix}a_{11} & a_{12} & \dots & a_{13}\\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{23}\\ \dots & \dots & \dots & \dots\\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn}\end{pmatrix}$$

или, сокращенно, $A = (a_{ij})$, где i = (т. е. i = 1, 2, 3, ..., m) – номер строки, j = (т. е. j= 1, 2, 3, ..., n) – номер столбца.

Матрицу A называют матрицей *размера* $m \times n$ и пишут $A_{m\times n}$. Числа a_{ij}, составляющие матрицу, называются ее **элементами**. Элементы, стоящие на диагонали, идущей из верхнего угла, образуют **главную диагональ**.

Матрицы **равны между собой**, если равны все соответствующие элементы этих матриц, т. е. $A = B$, если $a_{ij} = b_{ij}$, где $i=\overrightarrow{1,m}$, $j=\overrightarrow{1,n}$.

Матрица, у которой число строк равно числу столбцов, называется **квадратной.** Квадратную матрицу размера $n\times n$ называют матрицей ***n*-го порядка**.

Квадратная матрица, у которой все элементы, кроме элементов главной диагонали, равны нулю, называется ***диагональной.***

Диагональная матрица, у которой каждый элемент главной диагонали равен единице, называется ***единичной.*** Обозначается буквой Е.

Пример.

$$\mathrm{E}_{3\times3}=\begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}$$

– единичная матрица 3-го порядка.

$$\mathrm{E}_{n\times n}=\begin{pmatrix}1 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0 & 0\\ \dots & \dots & \dots & \dots\\ 0 & 0 & 0 & 1\end{pmatrix}$$

– единичная матрица n-го порядка.

Квадратная матрица называется ***треугольной***, если все элементы, расположенные по одну сторону от главной диагонали, равны нулю.

Матрица, все элементы которой равны нулю, называется ***нулевой***. Обозначается буквой O. Имеет вид

$$\mathbf{0} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & 0 \end{pmatrix}$$

В матричном исчислении матрицы O и E играют роль чисел *0* и *1* в арифметике.

Матрица, содержащая один столбец или одну строку, называется ***вектором***, (или вектор-столбец, или вектор-строка соответственно). Их вид:

$$A = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \dots \\ a_m \end{pmatrix}, \mathrm{B} = (b_1, b_2 \dots, b_n).$$

Матрица размера 1×1, состоящая из одного числа, отождествляется с этим числом, т. е. $(5)_{1\times 1}$ есть 5.

Матрица, полученная из данной заменой каждой ее строки столбцом с тем же номером, называется матрицей, **транспонированной** к данной. Обозначается A^{T}.

Так, если $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$, то $A^{\mathrm{T}} = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}$, если $A = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$, то $A^{\mathrm{T}} = (1,0)$.

Транспонированная матрица обладает следующим свойством: $(A^T)^T = A$.

Операция умножения двух матриц вводится только для случая, когда число столбцов первой матрицы равно числу строк второй матрицы.

Произведением матрицы $A_{m\times n} = (a_{ij})$ на матрицу $B_{n\times p} = (b_{jk})$ называется матрица $C_{m\times p} = (c_{ik})$ такая, что

$$c_{ik} = a_{i1} \cdot b_{1k} + a_{i2} \cdot b_{2k} + \dots + a_{in} b_{nk}$$

где $i = 1, 2, \dots, m$, $k = 1, 2, \dots, p$, т. е. элемент i-й строки и k-го столбца матрицы произведения C равен сумме произведений элементов i-й строки матрицы A на соответствующие элементы k-го столбца матрицы B. Получение элемента c_{ik} схематично изображается так:

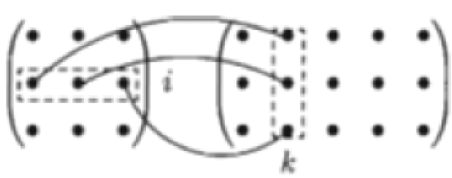


Рисунок 2.2.1. Произведение матриц

Если матрицы A и B квадратные одного размера, то произведения AB и BA всегда существуют. Легко показать, что $A \cdot E = E \cdot A = A$, где A – квадратная матрица, E – единичная матрица того же размера.

Определители n-порядка и их свойства. Определитель произведения двух квадратных матриц одинакового порядка

Пусть A – произвольная квадратная матрица порядка n, $n > 1$:

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix}$$

Минором некоторого элемента a_{ij} матрицы n-го порядка называется определитель $(n\text{-}1)$-го порядка, полученный из исходного путем вычеркивания i-й строки и j-го столбца, на пересечении которых находится выбранный элемент. Обозначается M_{ij}.

Так, если

$$\Delta = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}, \text{то } M_{11} = \begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}, M_{32} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{13} \\ a_{21} & a_{23} \end{vmatrix}.$$

Алгебраическим дополнением элемента a_{ij} определителя называется его минор, взятый со знаком «плюс», если сумма $i + j$ – четное число, и со знаком «минус», если эта сумма нечетная. Обозначается A_{ij}.

Таким образом, $A_{ij} = (-1)^{i+j} \cdot M_{ij}$.

Так, $A_{32} = -M_{32}$.

Определителем n-го порядка (определителем квадратной матрицы n-го порядка n), $n>1$, называется число, равное

$$detA = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{21} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n1} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix} = \sum_{j=1}^{n} (-1)^{1+j} a_{1j} \cdot M_{1j},$$

где M_{1j} – определитель квадратной матрицы, полученной из матрицы A вычеркиванием первой строки и j-го столбца.

Квадратной матрице A порядка n можно сопоставить число $\det A$ (или $|A|$, или Δ), называемое ее определителем, следующим образом:

1.) $n = 1$. $A = (a_1)$; $\det A = a_1$.

2.) $n = 2$, $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$; $\det A = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{12} \cdot a_{22} - a_{12} \cdot a_{21}$,

3.) $n = 3$, $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}$; $\det A = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} =$

$a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{21}a_{32}a_{13} - a_{31}a_{22}a_{13} - a_{21}a_{12}a_{33} - a_{32}a_{23}a_{11}$.

Свойства определителей

Сформулируем основные свойства определителей, присущие определителям всех порядков. Некоторые из этих свойств поясним на определителях 3-го порядка.

Свойство 1. («Равноправность строк и столбцов»). Определитель не изменится, если его строки заменить столбцами, и наоборот. Иными словами,

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{21} \\ a_{12} & a_{22} \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{21} & a_{31} \\ a_{12} & a_{22} & a_{32} \\ a_{13} & a_{23} & a_{33} \end{vmatrix}.$$

В дальнейшем строки и столбцы будем просто называть рядами определителя.

Свойство 2. При перестановке двух параллельных рядов определитель меняет знак.

Свойство 3. Определитель, имеющий два одинаковых ряда, равен нулю.

Свойство 4. Общий множитель элементов какого-либо ряда определителя можно вынести за знак определителя.

Из свойств 3 и 4 следует, что если *все элементы некоторого ряда пропорциональны соответствующим элементам параллельного ряда, то такой определитель равен нулю.*

Свойство 5. Если элементы какого-либо ряда определителя представляют собой суммы двух слагаемых, то определитель может быть разложен на сумму двух соответствующих определителей.

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13}+b \\ a_{21} & a_{22} & a_{23}+c \\ a_{31} & a_{32} & a_{33}+d \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_{11} & a_{21} & b \\ a_{12} & a_{22} & c \\ a_{13} & a_{23} & d \end{vmatrix}.$$

Свойство 6. («Элементарные преобразования определителя»). Определитель не изменится, если к элементам одного ряда прибавить соответствующие элементы параллельного ряда, умноженные на любое число.

Свойство 7. («Разложение определителя по элементам некоторого ряда»). Определитель равен сумме произведений элементов некоторого строки (столбца) на соответствующие им алгебраические дополнения.

Проиллюстрируем и одновременно докажем свойство 7 на примере определителя 3-го порядка. В этом случае свойство 7 означает, что

$$\Delta = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{11} \cdot A_{11} + a_{12} \cdot A_{12} + a_{13} \cdot A_{13}$$

В самом деле, имеем

$$a_{11} \cdot A_{11} + a_{12} \cdot A_{12} + a_{13} \cdot A_{13} =$$
$$= a_{11} \cdot \begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} + a_{12} \cdot \left(- \begin{vmatrix} a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix} \right) + a_{13} \cdot \begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix} =$$
$$= a_{11}(a_{22}a_{33} - a_{32}a_{23}) - (a_{21}a_{33} - a_{23}a_{31}) + a_{13}(a_{21}a_{32} - a_{22}a_{31}) =$$
$$= a_{11}a_{22}a_{33} - a_{32}\, a_{11}a_{23}a_{32} - a_{12}a_{21}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} +$$
$$+ a_{13}a_{21}a_{32} - a_{13}a_{22}a_{31} = \Delta$$

Замечание. Свойство 7 содержит в себе способ вычисления определителей высоких порядков.

Свойство 8. Сумма произведений элементов какого-либо ряда определителя на алгебраические дополнения соответствующих элементов параллельного ряда равна нулю.

Так, например $a_{11}A_{21} + a_{12}A_{22} + a_{13}A_{23} = 0$.

Обратная матрица и её построение методом присоединённой матрицы и методом Гаусса

Пусть A – квадратная матрица n-го порядка

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & .. & a_{nn} \end{pmatrix}$$

Квадратная матрица A называется невырожденной, если определитель $\Delta = \det A$ не равен нулю: $\Delta = \det A \neq 0$. В противном случае ($\Delta = 0$) матрица A называется вырожденной.

Матрица A^{-1}называется обратной матрице A, если выполняется условие:

$$A \cdot A^{-1} = A^{-1} \cdot A = E, \qquad (2.2.1)$$

где E – единичная матрица того же порядка, что и матрица A. Матрица A^{-1} имеет те же размеры, что и матрица A.

Теорема. Всякая невырожденная матрица имеет обратную.

Проведём доказательства для случая матрицы 3-го порядка. Пусть

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}, \text{причем } \det A \neq 0.$$

Составим союзную матрицу

$$A^* = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}$$

и найдём произведение матриц A и A^*

$$A \cdot A^* = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} A_{11} & A_{21} & A_{31} \\ A_{12} & A_{22} & A_{32} \\ A_{13} & A_{23} & A_{33} \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} a_{11}A_{11} + a_{12}A_{12} + a_{13}A_{13} & \dots & a_{11}A_{31} + a_{12}A_{32} + a_{13}A_{33} \\ a_{21}A_{11} + a_{22}A_{12} + a_{23}A_{13} & \dots & a_{21}A_{31} + a_{22}A_{32} + a_{23}A_{33} \\ a_{31}A_{11} + a_{32}A_{12} + a_{33}A_{13} & \dots & a_{31}A_{31} + a_{32}A_{32} + a_{33}A_{33} \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} \det A & 0 & 0 \\ 0 & \det A & 0 \\ 0 & 0 & \det A \end{pmatrix} = \det A \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \det A \cdot E,$$

т. е.

$$A \cdot A^* = \det A \cdot E. \qquad (2.2.2)$$

Здесь мы использовали свойства определителей.
Аналогично убеждаемся, что

$$A_{*} \cdot A = detA \cdot E. \qquad (2.2.3)$$

Равенства (2.2.2) и (2.2.3) перепишем в виде

$$A \cdot \frac{A^*}{detA} = E \text{ и } \frac{A^*}{detA} \cdot A = E.$$

Сравнивая полученные результаты с определением, получаем

$$A^{-1} = \frac{A^*}{detA}, \text{т. е. } A^{-1} = \frac{1}{detA} \cdot \begin{pmatrix} A_{11} & A_{21} & A_{31} \\ A_{12} & A_{22} & A_{32} \\ A_{13} & A_{23} & A_{33} \end{pmatrix}$$

Отметим свойства обратной матрицы:

1. $\det A^{-1} = \frac{1}{\det A}$
2. $(A \cdot B)^{-1} = B^{-1} \cdot A^{-1}$
3. $(A^{-1})^T = (A^T)^{-1}$

2.3. Системы линейных алгебраических уравнений

Систем линейных алгебраических уравнений, содержащей m уравнений и n неизвестных, называется система вид:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n = b_m \end{cases},$$

где числа $a_{ij,i} = 1,2,\ldots, m, j = 1, 2,\ldots, n$ называются коэффициентами системы, числа b_i – свободными членами. Подлежат нахождению числа x_n.

Такую систему удобно записывать в компактной **матричной форме:**

$$A \cdot X = B$$

Здесь A – матрица коэффициентов системы, называемая основной матрицей:

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{23} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

$X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \dots \\ x_n \end{pmatrix}$ – вектор – столбец из неизвестных x_j,

$B = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \dots \\ b_m \end{pmatrix}$ – вектор – столбец из свободных членов b_i.

Произведение матриц $A\cdot X$ определено, так как в матрице A столбцов столько же, сколько строк в матрице X (n штук).

Расширенной матрицей системы называется матрица A системы, дополненная столбцом свободных членов

$$\overline{A} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} & b_2 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & .. & a_{mn} & b_m \end{pmatrix}.$$

Решением системы называется n значений неизвестных,

$$x_1 = c_1\,, x_2 = c_2, \dots, x_n = c_n\,,$$

при подстановке которых все уравнения системы обращаются в тождественные равенства.

Всякое решение системы можно записать в виде матрицы-столбца:

$$C = \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \\ . \\ . \\ . \\ c_n \end{pmatrix}$$

Система уравнений называется **совместной**, если она имеет хотя бы одно решение, и **несовместной**, если она не имеет ни одного решения.

Совместная система называется **определенной**, если она имеет единственное решение, и **неопределённой**, если она имеет более одного решения. В последнем случае каждое ее решение называется частным решением системы. Совокупность всех **частным решением** называется общим решением.

Решить систему – это значит выяснить, совместна она или не совместна, а если система совместна, то найти ее общее решение.

Две системы называются **эквивалентными** (равносильными), если они имеют одно и то же общее решение. Другими словами, системы эквивалентны, если каждое решение одной из них является решением другой, и наоборот.

Эквивалентные системы получаются, в частности, при **элементарных преобразованиях** системы при условии, что преобразования выполняются лишь над строками матрицы.

Система линейных уравнений называется **однородной**, если все свободные члены равны нулю:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n = 0 \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots, \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \dots + a_{mn}x_n = 0 \end{cases}$$

Однородная система всегда совместна, так как $x_1 = x_2 = \dots = x_n = 0$ является решением системы. Это решение называется **нулевым** или тривиальным.

Пусть дана система n линейных уравнений с n неизвестными:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \cdots + a_{nn}x_n = b_n \end{cases},$$

или в матричной форме $A \cdot X = B$.

Основная матрица A такой системы квадратная. Определитель этой матрицы:

$$\Delta = \begin{vmatrix} a_{11} \dots a_{1n} \\ \dots \ \dots \ \dots \\ a_{n1} \dots a_{nn} \end{vmatrix}$$

называется **определителем системы**. Если определитель системы отличен от нуля, то система называется **невырожденной**.

Найдем решение данной системы уравнений в случае $\Delta \neq 0$ умножив обе части уравнения $A \cdot X = B$ слева на матрицу A^{-1}, получим

$A^{-1} \cdot A \cdot X = A^{-1} \cdot B$.

Поскольку $A^{-1} \cdot \mathrm{A} = \mathrm{E}$ и $E \cdot X = X$, то

$$X = A^{-1} \cdot B \qquad (2.3.1)$$

Отыскание решения системы по формуле (2.3.1) называют матричным способом, решения системы.

Матричное равенство (2.3.1) запишем в виде:

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \dots \\ x_n \end{pmatrix} = \frac{1}{\Delta} \begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} & \dots & A_{1n} \\ A_{21} & A_{22} & \dots & A_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ A_{1n} & A_{2n} & .. & A_{nn} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \dots \\ b_n \end{pmatrix},$$

то есть

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \dots \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \dfrac{A_{11}b_1 + A_{21}b_2 + \dots + A_{n1}b_n}{\Delta} \\ \dfrac{A_{12}b_1 + A_{22}b_2 + \dots + A_{n2}b_n}{\Delta} \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ \dfrac{A_{1n}b_1 + A_{2n}b_2 + \dots + A_{nn}b_n}{\Delta} \end{pmatrix}$$

Линейные пространства. Подпространство. Линейная зависимость и линейная независимость векторов, базис и размерность линейного пространства. Координаты вектора

Дадим определение линейного пространства:

Пусть V – непустое множество (его элементы будем называть векторами и обозначать, $\vec{x}, \vec{y}, \vec{z}$, в котором установлены правила:

1) любым двум элементам $\vec{x}, \vec{y} \in$ V соответствует третий элемент $\vec{x} + \vec{y} \in$ V называемый суммой элементов $\vec{x}, \vec{y}$ (внутренняя операция);

2) каждому $\vec{x} \in$ V и каждому $a \in R$ отвечает определенный элемент $a\bar{x}$(внешняя операция).

Пример. Рассмотрим множество всевозможных наборов из n вещественных чисел $[\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n]$ (n – фиксированное натуральное число) и определим операции сложения и умножения на число следующим образом: $\forall x = [\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n]$ и $\forall y = [\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_n]$ и $\forall \alpha \in R$: $x + y =$
$= [\alpha_1 + \beta_1, \alpha_2 + \beta_2, \dots, \alpha_n + \beta_n]$ и $\alpha \cdot x = [\alpha \cdot \alpha_1, \alpha \cdot \alpha_2, \dots, \cdot\ \alpha_n]$.

Докажем, что R^n – линейное пространство.

Введенные операции сложения и умножения на число являются замкнутыми в R^n, так как сумма и произведение на число также являются наборами из n вещественных чисел, т.е. $x + y \in R^n$ и $\alpha \cdot x \in R^n$. Нулевой элемент $\theta = [0, 0, \dots, 0]$ и противоположный элемент $-x = [-\alpha_1, -\alpha_2, \dots, -\alpha_n]$ также принадлежат R^n. Выполнение аксиом 1–8 следует из правил сложения и умножения вещественных чисел. Таким образом, координатное пространство R^n является линейным пространством.

Множество V называется **действительным линейным (векторным) пространством**, если выполняются аксиомы:

I. $\vec{x} + \vec{y} = \vec{y} + \vec{x}, \quad \forall \vec{x}, \vec{y} \in V$.

II. $(\vec{x} + \vec{y}) + \vec{z} = \vec{x} + (\vec{y} + \vec{z}), \quad \forall \vec{x}, \vec{y}, \vec{z} \in$ V.

III. $\exists\ \vec{0} \in$ V (нулевой элемент, такой, что $\vec{x} + \vec{0} = \vec{x}, \forall \vec{x} \in$ V).

IV. $\forall \vec{x} \epsilon$ V $\exists\ (-\vec{x}) \in$ V (элемент, противоположный элементу $\vec{x}$), такой, что $\vec{x} + (-\vec{x}) = 0$.

V. $1 \cdot \vec{x} = \vec{x}, \forall \vec{x} \in$ V.

VI. $\alpha(\beta\vec{x}) = (\alpha\beta)\vec{x}, \forall \vec{x} \in V, \forall \alpha, \beta \in K$

VII. $\alpha(\vec{x} + \vec{y}) = \alpha\vec{x} + \alpha\vec{y}, \forall \vec{x}, \vec{y} \in V, \forall \alpha \in R$.

VIII. $(\alpha + \beta)\vec{x} = \alpha\vec{x} + \beta\,\vec{x}, \forall \vec{x} \in V, \forall \alpha, \beta \in R$.

Множество V$'$ $\subset$ V называется **подпространством** линейного пространства V, если:

1) $\forall \vec{x}, \vec{y} \in$ V$'$ $\Rightarrow \vec{x} + \vec{y} \in$ V$'$;

2) $\forall x \in$ V$'$, $\forall \alpha \in R(C) \Rightarrow \alpha\vec{x} \in$ V$'$.

Линейная зависимость и независимость векторов

Система $\overrightarrow{x_1}, \overrightarrow{x_2}, \dots, \overrightarrow{x_r} \in V$ **линейно зависима** $\Leftrightarrow$

$\exists a_1, a_2, \dots, a_r \epsilon\, R(C), \sum_{i=1}^{r} a_i^2 > 0$, что $a_1\overrightarrow{x_1} + a_2\overrightarrow{x_2} + \cdots + a_r\overrightarrow{x_r} = \sum_{k=1}^{k} a_k\,\overrightarrow{x_k} = 0$

Система $\overrightarrow{x_1}, , \overrightarrow{x_2}, \dots, \overrightarrow{x_r} \in V$ **линейно независима**

$\Leftrightarrow \left(\sum_{k=1}^{r} a_k \bar{x}_k = 0 \Rightarrow \alpha_1 = \alpha_2 = \ldots = a_r = 0\right)$.

Критерий линейной зависимости векторов

Для того чтобы векторы $\overrightarrow{x_1}, \overrightarrow{x_2}, \dots, \overrightarrow{x_r}$ ($r > 1$) были линейно зависимы, необходимо и достаточно, чтобы хотя бы один из этих векторов являлся линейной комбинацией остальных.

Пример. Исследуйте систему векторов $\vec{a} = (1; -1;\ 2;\ 0), \vec{b} =$
$= (1;\ 5;\ -2;\ \sqrt{2}), \vec{c} = (3;\ -3;\ 6;\ 0)$ на линейную зависимость.

Решение:

Не сложно заметить, что координаты вектора $\vec{c}$ равны соответствующим координатам вектора $\vec{a}$ умноженным на *3*, то есть,
$\vec{a} = 3 \cdot \vec{c}$. Поэтому, исходная система векторов линейно зависима.

Ответ: Система векторов линейно зависима.

Размерность линейного пространства

Линейное пространство V называется ***n*-мерным** (имеет размерность *n*), если в нем:

1) существует *n* линейно независимых векторов;
2) любая система *n + 1* векторов линейно зависима.

Обозначения: $n = \dim V$; V_n.

Базис пространства V_n. Координаты вектора

Базис – любая упорядоченная система, $\overrightarrow{e_2}, \dots, \overrightarrow{e_n}$ из *n* линейно независимых векторов пространства V_n.

Обозначение: $\overrightarrow{(e)} = (\overrightarrow{e_1}, \overrightarrow{e_2}, \dots, \overrightarrow{e_n})$

Для каждого вектора $\overrightarrow{x} \in V_n$ существуют числа $x_1, x_2, \dots, x_n \in R(C)$ такие, что

$$\overrightarrow{x} = x_1\overrightarrow{e_1} + x_2\overrightarrow{e_2} + \ldots + x_n\overrightarrow{e_n} = \textstyle\sum_{k=1}^{n} x_k\overrightarrow{e_k} = (\overrightarrow{e_1}, \overrightarrow{e_2}, \dots, \overrightarrow{e_n})\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \dots \\ x_n \end{pmatrix} =$$

$(\overrightarrow{e})(\overrightarrow{x})$.

Числа $x_1, x_2, \dots, x_n$ называются **координатами вектора** $\vec{x}$ в базисе $(\vec{e_1}, \vec{e_2}, \dots, \vec{e_n})$ (определяются однозначно), $X = (x)$ – координатный столбец вектора $\vec{x}$ в этом базисе. Употребляется запись: $\vec{x} = (x_1, x_2, \dots, x_n)$.

Справедливы формулы:

$$\vec{x} = \sum_{k=1}^{n} x_k \bar{e}_k, \vec{y} = \sum_{k=1}^{n} y_k \vec{e_k}, \Rightarrow \vec{x} + \vec{y} = \sum_{k=1}^{n} (x_k + y_k)\, \vec{e_k}, \vec{x} = \bar{y} \Leftrightarrow x_k = y_k, k = 1, 2, \dots, n, \vec{x} = \sum_{k=1}^{n} x_k \vec{e_k} \Rightarrow \lambda\vec{x} = \sum_{k=1}^{n} (\lambda x_k)\vec{e_k}.$$

Ранг матрицы и его вычисление. Условие равенства нулю определителя. Теорема о базисном миноре

Рангом матрицы A называется наивысший порядок отличных от нуля миноров. Его обозначают через r или $rang\ (A)$.

Свойства ранга матрицы:

1. Ранг матрицы равен нулю только для нулевой матрицы. В других случаях ранг матрицы равен некоторому положительном числу.

2. Ранг прямоугольной матрицы не превышает меньшего из двух чисел m и n, т.е. $0 \le r \le \min(m, n)$.

3. Для квадратной матрицы n-го порядка $r=n$ только тогда, когда матрица невырожденная.

4. В случае квадратной матрицы если $r < n$ то определитель матрицы равен нулю.

При нахождении ранга матрицы, как правило, нужно вычислять большое количество определителей. Чтобы облегчить задачу вычисления ранга, можно использовать элементарные преобразования матрицы.

Элементарные преобразования матрицы

1. Транспонирование, т.е. замена каждой строки столбцом с тем же номером и наоборот.

2. Перестановка двух строк или двух столбцов.

3. Умножение всех элементов строки или столбца на любое число не равное нулю.

4. Добавление всех элементов строки или столбца соответствующих элементов параллельного ряда, умноженного на одно и то же число.

Матрицы, полученные одна из второй элементарными преобразованиями, называются ***эквивалентными***. Эквивалентные матрицы не равны друг другу, но при элементарных преобразованиях матрицы ее ранг не меняется. Если матрицы A и B эквивалентны, то это записывается так: $A \Leftrightarrow B$.

Рассмотрим два основных метода нахождения ранга матрицы.

Первый метод – **метод окантовки** – заключается в следующем:

Если все миноры 1-го порядка, т.е. элементы матрицы равны нулю, то $r = 0$.

Если хоть один из миноров 1-го порядка не равен нулю, а все миноры 2-го порядка равны нулю, то $r = 1$.

Если минор 2-го порядка отличен от нуля, то исследуем миноры 3-го порядка. Таким образом, находят минор k-го порядка и проверяют, не равны ли нулю миноры $(k+1)$-го порядка.

Если все миноры $(k+1)$-го порядка равны нулю, то ранг матрицы $A(a_{ij})_{m,n}$ равен числу k. Такие миноры $(k+1)$ -го порядка, как правило, находят путем "окантовки" минора k-го порядка.

Второй метод определения ранга матрицы заключается в применении элементарных преобразований матрицы при возведении ее к диагональному виду. Ранг такой матрицы равно числу отличных от нуля диагональных элементов.

Рассмотрим примеры применения каждого метода.

Условие равенства нулю определителя: для равенства определителя нулю необходимо и достаточно, чтобы его столбцы (строки) были линейно зависимыми.

Рассмотрим произвольную (не обязательно квадратную) матрицу

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{23} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

Минором *k*-го порядка матрицы A будем называть определитель k-го порядка с элементами, лежащими на пересечении любых k строк и любых k столбцов матрицы A. (Конечно, k не превосходит наименьшее из чисел m и n.)

Предположим, что хотя бы один из элементов a_{ij} матрицы A отличен от нуля. Тогда найдется такое целое положительное число r, что будут выполнены следующие два условия: 1) у матрицы A имеется минор r-го порядка, отличный от нуля, 2) всякий минор $(r + 1)$-го и более высокого порядка (если таковые существуют) равен нулю. Число r, удовлетворяющее требованиям 1) и 2), назовем рангом матрицы A (ранг матрицы A, все элементы которой – нули, по определению равен нулю).

Тот минор r-го порядка, который отличен от нуля, назовем **базисным минором** (конечно, у матрицы A может быть несколько миноров r-го порядка, отличных от нуля).

Строки и столбцы, на пересечении которых стоит базисный минор, назовем соответственно **базисными строками** и **базисными столбцами**. **Теорема (о базисном миноре)**. Базисные строки (базисные столбцы) линейно независимы. Любая строка (любой столбец) матрицы A является линейной комбинацией базисных строк (базисных столбцов).

Пример. Найти методом окаймления миноров ранг матрицы:

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 & -2 \\ 2 & 4 & 3 & 0 \\ -1 & -2 & 6 & 6 \end{pmatrix}$$

Решение: Начинаем с миноров 1-го порядка, т.е. с элементов матрицы A. Выберем, например, минор (элемент) $M_1 = 1$, расположенный в первой строке и первом столбце. Окаймляя при помощи второй строки и третьего столбца, получаем минор $M_2 = \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 3 \end{vmatrix}$, отличный от нуля. Переходим теперь к минорам 3-го порядка, окаймляющим M_2. Их всего два (можно добавить второй столбец или четвертый). Вычисляем их:

$\begin{vmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 2 & 4 & 3 \\ -1 & -2 & 6 \end{vmatrix} = 0, \begin{vmatrix} 1 & -1 & -2 \\ 2 & 3 & 0 \\ -1 & 6 & 6 \end{vmatrix} = 0$. Таким образом, все окаймляющие миноры третьего порядка оказались равными нулю. Ранг матрицы A равен двум.

Произвольные системы линейных алгебраических уравнений. Теорема Кронекера-Капелли. Однородные системы линейных уравнений. Структура общего решения. Фундаментальная система решений. Неоднородные системы линейных уравнений, структура общего решения

Система m уравнений с n неизвестными вида:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = b_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n = b_2, \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n = b_m \end{cases} \qquad (2.3.2)$$

где a_{ij} – коэффициенты системы (2.3.2), принадлежащие множеству действительных чисел R; b_i – свободные члены, принадлежащие множеству действительных чисел R, называется системой линейных алгебраических уравнений (СЛАУ).

Пусть дана произвольная система (2.3.2) m линейных уравнений с n неизвестными. Исчерпывающий ответ на вопрос о совместности этой системы дает теорема:

Теорема (Кронекера-Капелли). Система линейных алгебраических уравнений (2.3.2) совместна тогда и только тогда, когда ранг расширенной матрицы системы равен рангу основной матрицы.

Правила практического разыскания всех решений совместной системы линейных уравнений вытекают из следующих теорем.

Теорема. Если ранг основной матрицы совместной системы уравнений (2.3.2) равен числу неизвестных, то система имеет единственное решение.

Теорема. Если ранг совместной системы уравнений (2.3.2) меньше числа неизвестных, то система имеет бесчисленное множество решений.

Однородные системы линейных уравнений.

Пусть дана система линейных однородных уравнений:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = 0, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n = 0, \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n = 0. \end{cases}$$

Очевидно, что однородная система всегда совместна $(r(A)=r(\bar{A}))$ она имеет нулевое (тривиальное) решение $x_1 = x_2 = \ldots = x_n = 0$.

Теорема. Для того чтобы система однородных уравнений имела ненулевые решения, необходимо и достаточно, чтобы ранг r ее основной матрицы был меньше числа n неизвестных, т. е. $r < n$.

Необходимость. Так как ранг не может превосходить размера матрицы, то, очевидно, $r \leq n$. Пусть $r = n$. Тогда один из миноров размера $n \times n$ отличен от нуля. Поэтому соответствующая система линейных уравнений имеет единственное решение: $x_i = \frac{\Delta_i}{\Delta} = 0, \Delta_i = 0, \Delta \neq 0$. Значит, других, кроме тривиальных, решений нет. Итак, если есть нетривиальное решение, то $r < n$.

Пусть дана однородная система n линейных уравнений с n неизвестными.

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = 0, \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \cdots + a_{nn}x_n = 0. \end{cases}$$

Теорема. Для того чтобы однородная система n линейных уравнений с n неизвестными имела ненулевые решения, необходимо и достаточно, чтобы ее определитель Δ был равен нулю, т. е. $\Delta = 0$.

Если система имеет ненулевые решения, то $\Delta = 0$. Ибо при $\Delta \neq 0$ система имеет только единственное нулевое решение. Если же $\Delta = 0$, то ранг r основной матрицы системы меньше числа неизвестных, т. е. $r < n$. И, значит, система имеет бесконечное множество (ненулевых) решений.

Фундаментальная система решения

Рассмотрим множество всех столбцов, которые являются решениями исходной системы.

Фундаментальной системой решений (ФСР) однородной СЛАУ называется базис этой системы столбцов.

Иначе говоря, любая упорядоченная совокупность $n - r$ линейно независимых решений однородной линейной системы образует ***фундаментальную систему решений*** однородной системы.

Пример. Записать ФСР однородной СЛАУ

$$\begin{cases} x_1 - 5x_2 - x_3 - 2x_4 + 3x_5 = 0; \\ 2x_1 - 6x_2 + x_3 - 4x_4 - 2x_5 = 0; \\ -x_1 + 4x_2 + 5x_3 - 3x_4 = 0. \end{cases}$$

зная общее решение. Записать общее решение с помощью ФСР.

Решение:

Общее решение у нас имеется. Это решение таково:

$$\begin{cases} x_1 = \dfrac{-17x_4 + 144x_5}{19}; \\ x_2 = \dfrac{-15x_4 + 41x_5}{19}; \\ x_3 = \dfrac{20x_4 - 4x_5}{19}; \\ x_4 \in R;\ x_5 \in R. \end{cases}$$

Составим фундаментальную систему решения.

Ранг матрицы системы $r = 3$ (поэтому у нас три базисных переменных), количество переменных $n = 5$. Количество свободных переменных и количество решений ФСР равно $n - r = 2$.

Составим ФСР. При составлении учтём, что x_1, x_2, x_3 – базисные переменные, а x_4, x_5 – свободные переменные.

x_1	x_2	x_3	x_4	x_5
$-\dfrac{17}{19}$	$-\dfrac{15}{19}$	$\dfrac{20}{19}$	1	0
$\dfrac{144}{19}$	$\dfrac{41}{19}$	$-\dfrac{4}{19}$	0	1

Совокупность $\varphi_1 = \begin{pmatrix} -\frac{17}{19} \\ -\frac{15}{19} \\ \frac{20}{19} \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \varphi_2 = \begin{pmatrix} \frac{144}{19} \\ \frac{41}{19} \\ -\frac{4}{19} \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ и есть ФСР данной системы.

Общее решение можно записать теперь так: $X = C_1 \cdot \varphi_1 + C_2 \cdot \varphi_2$. Или в развёрнутом виде: $X = C_1 \cdot \begin{pmatrix} -\frac{17}{19} \\ -\frac{15}{19} \\ \frac{20}{19} \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + C_2 \cdot \begin{pmatrix} \frac{144}{19} \\ \frac{41}{19} \\ -\frac{4}{19} \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$, где C_1 и C_2 – произвольные постоянные.

Ответ: Фундаментальная система решений: $\varphi_1 = \begin{pmatrix} -\frac{17}{19} \\ -\frac{15}{19} \\ \frac{20}{19} \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$,

$\varphi_2 = \begin{pmatrix} \frac{144}{19} \\ \frac{41}{19} \\ -\frac{4}{19} \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$. Общее решение: $X = C_1 \cdot \begin{pmatrix} -\frac{17}{19} \\ -\frac{15}{19} \\ \frac{20}{19} \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + C_2 \cdot \begin{pmatrix} \frac{144}{19} \\ \frac{41}{19} \\ -\frac{4}{19} \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$, где C_1 и C_2 – произвольные константы.

Теорема. Общее решение неоднородной СЛАУ равно сумме частного решения неоднородной СЛАУ и общего решения соответствующей однородной СЛАУ.

Структура общего решения

Однородная система линейных уравнений

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = 0, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n = 0, \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n = 0. \end{cases}$$

всегда совместна, так как имеет ***тривиальное решение*** $x_1 = x_2 = \ldots = x_n = 0$ (x=0). Если ранг матрицы системы равен количеству неизвестных ($rang(A) = n$), то тривиальное решение единственное.

Предположим, что $r = rang(A) < n$. Тогда однородная система имеет бесконечно много решений. Заметим, что расширенная матрица $\bar{A}$ однородной системы при элементарных преобразованиях строк приводится к упрощенному виду, где $b'_1 = b'_2 = \ldots = b'_r = 0$. Поэтому получаем общее решение однородной системы уравнений:

$$\begin{cases} x_1 = -a'_{1\,r+1}x_{r+1} - \cdots - a'_{1\,n}x_n \\ \vdots \\ x_r = -a'_{r\,r+1}x_{r+1} - \cdots - a'_{r\,n}x_n \end{cases}$$

Получим другую форму записи решений однородной системы, которая раскрывает структуру множества решений. Для этого подчеркнем следующие свойства.

Если столбцы $\varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_k$ *– решения однородной системы уравнений, то любая их линейная комбинация* $\alpha_1\varphi_1 + \alpha_2\varphi_2 + \ldots + \alpha_k\varphi_k$ *также является решением однородной системы.*

Если ранг матрицы однородной системы равен r*, то система имеет* $(n-r)$ *линейно независимых решений*

Теорема (об общем решении однородной системы). Если $\varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_{n-r}$ – фундаментальная система решений однородной системы уравнений, то столбец

$$x = C_1 \cdot \varphi_1 + C_2 \cdot \varphi_2 + \ldots + C_{n-r} \cdot \varphi_{n-r}$$

при любых значениях произвольных постоянных $C_1, C_2, \ldots, C_{n-r}$ также является решением системы, и, наоборот, для каждого решения x этой системы найдутся такие значения произвольных постоянных $C_1, C_2, \ldots, C_{n-r}$, при которых это решение x удовлетворяет равенству.

Неоднородные системы линейных уравнений структура общего решения

Рассмотрим неоднородную систему уравнений, записанную в матричной форме:

$$AX = B \qquad (2.3.3)$$

и соответствующую однородную систему

$$AX = 0. \qquad (2.3.4)$$

Свойства решений неоднородной системы уравнения

Пусть X_1 и X_2 – какие–либо решения неоднородной системы (2.3.3). Тогда $X_1 - X_2$ – решение однородной системы (2.3.4).

Пусть $X_{н.}$ – какое–либо решение неоднородной системы (2.3.3), а X_0 – любое решение однородной системы (2.3.4). Тогда $X_{н.} + X_0$ также является решением неоднородной системы (2.3.3).

Из этих утверждений следует:

Теорема (о структуре общего решения неоднородной системы уравнений).

Любое решение неоднородной системы линейных уравнений определяется формулой

$$X_{о.н.} = X_{ч.н.} + C_1 \cdot X_1 + C_2 \cdot X_2 + \ldots + C_{n-r} \cdot X_{n-r}, \qquad (2.3.5)$$

где $X_{ч.н.}$ – какое–либо частное решение неоднородной системы (2.3.3),

$X_1, X_2, \ldots, X_{n-r}$ – фундаментальная система решений соответствующей однородной системы (2.3.4) и C_1, C^2, …, C_{n-r} – произвольные постоянные.

Свойства общего решения неоднородной системы уравнений

При любых значениях $C_1, C_2, \ldots, C_{n-r}$ $X_{о.н.}$, определяемое формулой (2.3.5), является решением системы (2.3.3).

Каково бы ни было решение системы (2.3.3) X, существуют числа C_1^0, …, C_{n-r}^0 такие, что

$$X = X_{чн.} + C_1^0 \cdot X_1 + C_2^0 \cdot X_2 + \ldots + C_{n-r}^0 \cdot X_{n-r}.$$

ТЕМА 3. АНАЛИТИЧЕСКАЯ ГЕОМЕТРИЯ

3.1. Аналитическая геометрия на плоскости

Векторное уравнение прямой

Положение прямой в пространстве вполне определено, если задать какую-либо точку M_o на прямой и вектор $\vec{S}$, параллельный этой прямой. Вектор $\vec{S}$ называется направляющим вектором прямой.

Пусть прямая L задана ее точкой M_o $(x_0;\ y_0;\ z_0)$ и направляющим вектором $\vec{S}= (m;\ n;\ p)$. Возьмем на прямой L произвольную точку M $(x;\ y;\ z)$. Обозначим радиус-векторы точек M_o и M соответственно через $\vec{r_0}$ и $\vec{r}$. Очевидно, что три вектора $\vec{r_0}$, $\vec{r}$ и $\overrightarrow{M_0M}$ связаны соотношением:

$$\vec{r} = \vec{r_0} + \overrightarrow{M_0M}$$

Вектор $\overrightarrow{M_0M}$, лежащий на прямой L, параллелен направляющему вектору $\vec{S}$, поэтому $\overrightarrow{M_0M} = t\vec{S}$, где t – скалярный множитель, называемый параметром, может принимать различные значения в зависимости от положения точки M на прямой.

Уравнение можно записать в виде:

$$\vec{r} = \vec{r_0} + t\vec{S}$$

Полученное уравнение называется векторным уравнением прямой.

Параметрические уравнения прямой

Замечая, что $\vec{r}= (x;\ y;\ z)$, $\vec{r_0}= (x_0;\ y_0;\ z_0)$, $t\vec{S} = (tm;\ tn;\ tp)$, уравнение $\vec{r} = \vec{r_0} + t\vec{S}$ можно записать в виде:

$$\begin{cases} x = x_0 + mt, \\ y = y_0 + nt\ , \\ z = z_0 + pt. \end{cases}$$

Они называются параметрическими уравнениями прямой в пространстве.

Канонические уравнения прямой

Пусть $\vec{S} = (m;\ n;\ p)$ – направляющий вектор прямой L и $\overrightarrow{M_0}$ $(x_0;\ y_0;\ z_0)$ – точка, лежащая на этой прямой. Вектор $\overrightarrow{M_0M}$, соединяющий точку O с произвольной точкой M $(x;\ y;\ z)$ прямой L, параллелен вектору $\vec{B}$. Поэтому координаты вектора

$\overrightarrow{M_0M}$ $=(x - x_0; y - y_0; z - z_0)$ и вектора $\vec{S} = (m;\ n;\ p)$ пропорциональны:

$$\frac{x - x_0}{m} = \frac{y - y_0}{n} = \frac{z - z_0}{p}.$$

Уравнение называется каноническим уравнением прямой в пространстве.

Общее уравнение прямой

Прямую в пространстве можно задать как линию пересечения двух непараллельных плоскостей. Рассмотрим систему уравнений:

$$\begin{cases} A_1x + B_1y + C_1z + D_1 = 0, \\ A_2x + B_2y + C_2z + D_2 = 0. \end{cases}$$

Это уравнение называют общим уравнением прямой.

Каждое из уравнений этой системы определяет плоскость. Если плоскости не параллельны (координаты векторов $\overrightarrow{n_1} = (A_1; B_1; C_1)$ и $\overrightarrow{n_2} = (A_2; B_2; C_2)$ не пропорциональны), то система определяет прямую L как геометрическое место точек пространства, координаты которых удовлетворяют каждому из уравнений системы.

Угол между прямыми

Пусть прямые L_1 и L_2 заданы уравнениями:

$$\frac{x-x_1}{m_1} = \frac{y-y_1}{n_1} = \frac{z-z_1}{p_1}$$

и

$$\frac{x-x_2}{m_2} = \frac{y-y_2}{n_2} = \frac{z-z_2}{p_2}$$

Под углом между этими прямыми понимают угол между направляющими векторами $\vec{s}_1 = (m_1; n_1; p_1)$ и $\vec{s}_2 = (m_2; n_2; p_2)$. Поэтому, по известной формуле для косинуса угла между векторами, получаем:

$$cos\varphi = \frac{\overrightarrow{s_1} \cdot \overrightarrow{s_2}}{|\overrightarrow{s_1}| \cdot |\overrightarrow{s_2}|}$$ или

$$cos\varphi = \frac{m_1m_2 + n_1n_2 + p_1p_2}{\sqrt{m_1^2 + n_1^2 + p_1^2} \cdot \sqrt{m_2^2 + n_2^2 + p_2^2}}.$$

Для нахождения острого угла между прямыми L_1 и L_2 числитель правой части формулы следует взять по модулю.

Расстояние от точки до прямой

Расстоянием от точки до прямой называется расстояние, равно длине перпендикуляра, опущенного из точки на прямую.

Если $\vec{s} = \{m, n, p\}$ – направляющий вектор прямой L, $M_1(x_1, y_1, z_1)$ – точка лежащей на прямой, тогда расстояние от точки $M_0(x_0;\ y_0;\ z_0)$ до прямой L можно найти, используя формулу:

$$d = \frac{|\overrightarrow{M_0M_1}| \times |\vec{s}|}{|\vec{s}|}$$

Расстояние между скрещивающимися и параллельными прямыми

Две прямые называются скрещивающимися, если они не лежат в одной плоскости.

Теорема. Через каждую из скрещивающихся прямых проходит единственная плоскость, которой параллельна другая прямая.

Расстояние между скрещивающимися прямыми – это расстояние между одной из скрещивающихся прямых и параллельной ей плоскостью, проходящей через другую прямую

Расстояние между двумя параллельными прямыми – это расстояние от произвольной точки одной из параллельных прямых до другой прямой.

Теорема. Все точки одной из двух параллельных прямых удалены на одинаковое расстояние от другой прямой.

В частности, если в прямоугольной системе координат Oxy на плоскости прямую a задает общее уравнение прямой вида $Ax + By + C_1 = 0$, а прямую b, параллельную прямой a – общее уравнение прямой $Ax + By + C_2 = 0$, то расстояние $|M_1H_1|$ между этими параллельными прямыми можно вычислить по формуле:

$$|M_1H_1| = \frac{|C_2 - C_1|}{\sqrt{A^2 + B^2}}$$

Понятие кривой второго порядка. Окружность, эллипс, гипербола, парабола, их геометрические свойства и канонические уравнения

Пусть на плоскости задана прямоугольная декартова система координат.

Кривой второго порядка называется множество точек, координаты которых удовлетворяют уравнению второго порядка:

$$ax^2 + bxy + cy^2 + dx + fy + g = 0,$$

где a, b, c, d, f, g – вещественные числа, и хотя бы одно из чисел a, b, c отлично от нуля.

1) если коэффициенты a и b равны ($a = b$), то уравнение может описывать окружность;

2) если коэффициенты a и b не равны, но имеют одинаковые знаки, то уравнение может описывать эллипс;

3) если коэффициенты a и b не равны и имеют разные знаки, то уравнение может описывать гиперболу;

4) если один из коэффициентов a или b равен нулю ($a = 0$ или $b = 0$), т. е. отсутствует слагаемое, содержащее квадрат переменной x или y, то такое уравнение может описывать параболу.

Начнем с определения окружности, известного из школьного курса математики.

Окружностью называется геометрическое место точек плоскости, равноудаленных от фиксированной точки, называемой центром окружности.

Получим уравнение окружности, если известны ее центр и радиус.

Окружность радиуса R с центром в точке $M_0(x_0; y_0)$ имеет уравнение:

$$(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 = R^2.$$

Эллипсом называется множество точек плоскости, сумма расстояний которых до двух данных точек, называемых фокусами F_1 и F_2, есть величина постоянная (ее обозначают через $2a$). Причем эта постоянная больше расстояния между фокусами.

Выведем уравнение эллипса на координатной плоскости. Пусть F_1, F_2 – фокусы эллипса. Длину отрезка F_1F_2 обозначим через $2c$. Введем систему координат, считая началом координат O середину отрезка F_1F_2, осью абсцисс – прямую F_1F_2, осью ординат – прямую, проходящую через начало координат и перпендикулярную оси абсцисс. Фокусы эллипса будут иметь координаты $F_1(-c; 0)$, $F_2(c; 0)$.

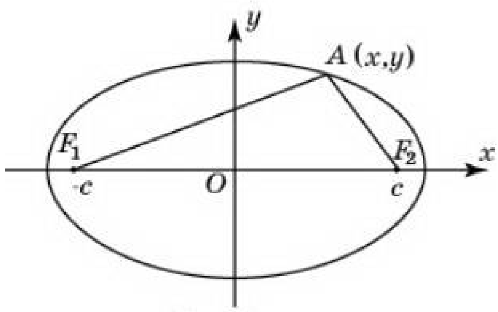


Рисунок 3.1.1. Эллипс

Пусть $A(x; y)$ – точка плоскости. Расстояния от нее до фокусов равны соответственно:

$$\sqrt{(x-c)^2 + y^2} \text{ и } \sqrt{(x+c)^2 + y^2}.$$

Точка A принадлежит эллипсу в том и только том случае, когда выполняется равенство:

$$\sqrt{(x-c)^2 + y^2} + \sqrt{(x+c)^2 + y^2} = 2a,$$

где a – некоторое фиксированное число ($a > 2c$).

Перенесем второе слагаемое левой части этого равенства в правую часть и возведем обе части полученного равенства в квадрат. Получим:

$$(x-c)^2 + y^2 = 4a^2 - 4a\sqrt{(x+c)^2 + y^2} + (x+c)^2 + y^2.$$

Приведем подобные члены:

$$a\sqrt{(x+c)^2 + y^2} = a^2 + xc.$$

Еще раз возведем в квадрат и приведем подобные члены:

$$x^2(a^2 - c^2) + y^2a^2 = a^4 - a^2c^2.$$

Обозначим $b^2 = a^2 - c^2$ и разделим обе части равенства на a^2b^2. Получим равенство:

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1\ -\ \text{уравнение эллипса,}$$

В этом каноническом уравнении a – большая, b – малая полуоси эллипса, причем a, b и c (c – половина расстояния между фокусами) связаны соотношением:

$$a^2=b^2+c^2,$$

Форма эллипса (мера его "сжатия") характеризуется его эксцентриситетом.

$$\varepsilon=\frac{c}{a}$$

(так как $c < a$, то $\varepsilon < 1$).

Прямые: $D_1: x = \frac{a}{\varepsilon}$ и $D_2: x = -\frac{a}{\varepsilon}$ перпендикулярные главной оси и проходящие на расстоянии $\frac{a}{\varepsilon}$ от центра, называются директрисами эллипса.

Параболой называется множество точек плоскости, равноудаленных от данной точки, называемой фокусом, и данной прямой, называемой директрисой.

Если директрисой параболы является прямая $D: x = -\frac{p}{2}$, а фокусом – точка $F(\frac{p}{2}, 0)$, то уравнение параболы имеет вид:

$$y^2=2px,\ \text{где}\ p>0.$$

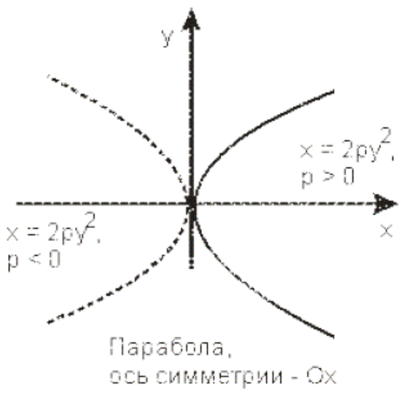


Рисунок 3.1.2. Парабола

Гиперболой называется множество точек плоскости, абсолютная величина разности которых до двух данных точек, называемых фокусами, есть величина постоянная (ее обозначают через $2a$), причем эта постоянная меньше расстояния между фокусами $|r_1 - r_2| = 2a$.

Выведем уравнение гиперболы. Введем систему координат, считая осью Ox прямую, проходящую через фокусы, а осью Oy прямую, перпендикулярную оси Ox, и делящую отрезок F_1F_2 пополам. Пусть фокусы имеют координаты $F_1(-c; 0)$, $F_2(c; 0)$.

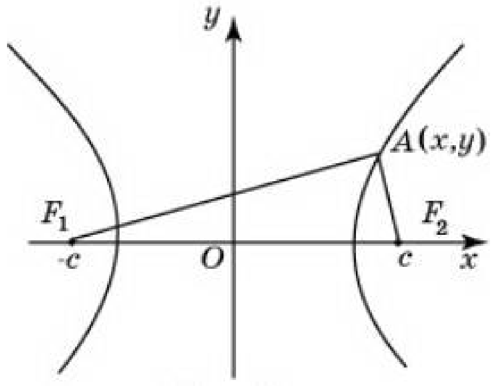


Рисунок 3.1.3. Гипербола

Точка $A(x; y)$ принадлежит гиперболе тогда и только тогда, когда выполняется равенство $AF_1 - AF_2 = \pm 2a$, где a – некоторое фиксированное число, $0 < a < c$. Перепишем это равенство в координатной форме:

$$\sqrt{(x+c)^2+y^2} - \sqrt{(x-c)^2+y^2} = \pm 2a.$$

Перенесем второй корень в правую часть и возведем обе части равенства в квадрат. Получим:

$$(x+c)^2+y^2 = 4a^2 \pm 4a\sqrt{(x-c)^2+y^2} + (x-c)^2+y^2.$$

Раскрывая скобки и приводя подобные члены, будем иметь равенство:

$$xc - a^2 = \pm\sqrt{(x-c)^2+y^2}.$$

Еще раз, возводя в квадрат и обозначая $b^2 = c^2 - a^2$, получим:

$$x^2b^2 - y^2a^2 = a^2b^2.$$

Разделив обе части на a^2b^2, окончательно получим уравнение гиперболы:

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1, \text{ где } b^2 = c^2 - a^2.$$

Точки: $A_1(a;0)$ и $A_2(-a;0)$ называются вершинами гиперболы. Отрезок A_1A_2 такой, что $|A_1A_2| = 2a$, называется действительной осью гиперболы, а отрезок B_1B_2 такой, что $|B_1B_2| = 2a$ – мнимой осью.

Гипербола имеет две асимптоты, уравнения которых:

$$y = \pm\frac{b}{a}x.$$

Отношение $\varepsilon = \frac{c}{a} > 1$ называется эксцентриситетом гиперболы.

В итоге получается:

1) $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1, (a > b)$ – каноническое уравнение эллипса;
2) $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$ – каноническое уравнение гиперболы;
3) $y^2 = 2px\ (p > 0)$ – каноническое уравнение параболы;
4) $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = -1$ – мнимый эллипс;

5) $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 0$ – пара пересекающихся прямых;

6) $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 0$ – пара мнимых пересекающихся прямых (с единственной действительной точкой пересечения в начале координат);

7) $y^2 - a^2 = 0$ – пара параллельных прямых;

8) $y^2 + a^2 = 0$ – пара мнимых параллельных прямых;

9) $y^2 = 0$ – пара совпавших прямых.

3.2. Элементы аналитической геометрии в пространстве

Плоскость в пространстве и различные формы её задания. Угол между двумя плоскостями. Расстояние от точки до плоскости

Поверхность в пространстве, как правило, можно рассматривать как геометрическое место точек, удовлетворяющих какому-либо условию. Например, сфера радиуса R с центром в точке (0;1) есть геометрическое место всех точек пространства, находящихся от точки (0;1) на расстоянии R. Прямоугольная система координат $Oxyz$ в пространстве позволяет установить взаимно однозначное соответствие между точками пространства и тройками чисел x, y и z – их координатами.

Свойство, общее всем точкам поверхности, можно записать в виде уравнения, связывающего координаты всех точек поверхности.

Прямоугольная система координат $Oxyz$ в пространстве позволяет установить взаимно однозначное соответствие между точками пространства и тройками чисел x, y и z – их координатами. Свойство, общее всем точкам поверхности, можно записать в виде уравнения, связывающего координаты всех точек поверхности.

Уравнением данной поверхности в прямоугольной системе координат $Oxyz$ называется такое уравнение $F(x, y, z) = O$ с тремя переменными x, y и z, которому удовлетворяют координаты каждой точки, лежащей на поверхности, и не удовлетворяют координаты точек, не лежащих на этой поверхности. Переменные x, y и z в уравнении поверхности называются текущими координатами точек поверхности.

Уравнение поверхности позволяет изучение геометрических свойств поверхности заменить исследованием его уравнения. Так, для того, чтобы узнать, лежит ли точка A $(x_1; y_1; z_1)$ на данной поверхности, достаточно подставить координаты точки A в уравнение поверхности вместо переменных: если эти координаты удовлетворяют уравнению, то точка лежит на поверхности, если не удовлетворяют – не лежит.

Уравнение сферы

Найдем уравнение сферы радиуса R с центром в точке $O_1\ (x_0;\ y_0;\ z_0)$.

Согласно определению сферы расстояние любой ее точки $M\ (x;\ y;\ z)$ от центра $O_1\ (x_0;\ y_0;\ z_0)$ равно радиусу R. Следовательно:

$$\sqrt{(x-x_0)^2+(y-y_0)^2+(z-z_0)^2}=R$$

или

$$(x-x_0)^2+(y-y_0)^2+(z-z_0)^2=R^2.$$

Это и есть искомое уравнение сферы. Ему удовлетворяют координаты любой ее точки и не удовлетворяют координаты точек, не лежащих на данной сфере.

Если же дано уравнение вида $F\ (x,\ y,\ z)=0$, то оно, вообще говоря, определяет в пространстве некоторую поверхность.

Итак, поверхность в пространстве можно задать геометрически и аналитически.

Пример. Написать уравнение сферы с центром A проходящей через точку N, если: A (-2; 2; 0) и N (5; 0; -1).

Решение:

Уравнение сферы с центром в точке $O_1\ (x_0;\ y_0;\ z_0)$ имеет вид:

$(x-x_0)^2+(y-y_0)^2+(z-z_0)^2=R^2$

В нашем случае оно имеет вид:

$(x+2)^2+(y-2)^2+(z)^2=R^2$

Т.к. точка N лежит на сфере, то ее координаты удовлетворяют данному уравнению:

$$(5+2)^2+(0-2)^2+(-1)^2=R^2$$

$49+4+1=R^2$

$R^2=54$

Поэтому уравнение сферы имеет вид:

$(x+2)^2+(y-2)^2+(z)^2=54.$

Уравнения линии в пространстве

Линию в пространстве можно рассматривать как линию пересечения двух поверхностей или как геометрическое место точек, общих двум поверхностям.

Если $F_1(x,\ y,\ z)=0$ и $F_2(x,\ y,\ z)=0$ – уравнения двух поверхностей, определяющих линию L, то координаты точек этой линии удовлетворяют системе двух уравнений с тремя неизвестными:

$$\begin{cases}F_1(x,y,z)=0,\\F_2(x,y,z)=0.\end{cases}$$

Уравнения системы называются уравнениями линии в пространстве.

Линию в пространстве можно рассматривать как траекторию движения точки. В этом случае ее задают параметрическим уравнением:

$$\begin{cases} x = x(t), \\ y = y(t), \\ z = z(t). \end{cases}$$

Уравнения плоскости в пространстве

Простейшей поверхностью является плоскость. Плоскость в пространстве *Oxyz* можно задать разными способами. Каждому из них соответствует определенный вид ее уравнения.

Уравнение $A(x - x_0) + B(y - y_0) + C(z - z_0) = 0$ называется уравнением плоскости, проходящее через данную точку $M_o\ (x_0;\ y_0;\ z_0)$ перпендикулярно вектору $\vec{n} = (A;B;C)$. Оно первой степени относительно текущих координат x, y и z. Вектор $\vec{n} = (A;B;C)$ называется нормальным вектором плоскости.

Пусть заданы две плоскости Q_1 и Q_2:

$$A_1x + B_1y + C_1z + D_1 = 0,$$
$$A_2x + B_2y + C_2z + D_2 = 0.$$

Под углом между плоскостями Q_1 и Q_2 понимается один из двугранных углов, образованных этими плоскостями.

Угол φ между нормальными векторами $\overrightarrow{n_1} = (A_1;B_1;C_1)$, $\overrightarrow{n_2} = (A_2;B_2;C_2)$ плоскостей Q_1 и Q_2 равен одному из этих углов. Поэтому:

$$cos\varphi = \frac{\overrightarrow{n_1} \cdot \overrightarrow{n_2}}{\left|\overrightarrow{n_1}\right| \cdot \left|\overrightarrow{n_2}\right|} \text{ или}$$

$$cos\varphi = \frac{A_1A_2 + B_1B_2 + C_1C_2}{\sqrt{A_1^2 + B_1^2 + C_1^2} \cdot \sqrt{A_2^2 + B_2^2 + C_2^2}}.$$

Для нахождения острого угла следует взять модуль правой части.

Расстояние от точки до плоскости

Пусть задана точка $M_o\,(x_0;\ y_0;\ z_0)$ и плоскость Q своим уравнением $Ax + By + Cz + D = 0$.

Расстояние d от точки O до плоскости Q находится по формуле:

$$d = \frac{|Ax_0 + By_0 + Cz_0 + D|}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}}.$$

Пример. Найти расстояние от точки M (0; 3; 6) до плоскости $2x + 4y - 4z - 6 = 0$.

Решение: Подставим в формулу коэффициенты плоскости и координаты точки:

$$d = \frac{|2 \cdot 0 + 4 \cdot 3 + (-4) \cdot 6 - 6|}{\sqrt{4 + 16 + 16}} = \frac{|0 + 12 - 24 - 6|}{\sqrt{36}} = \frac{|-18|}{6} = 3$$

Ответ: расстояние от точки до плоскости равно 3.

ТЕМА 4. ФУНКЦИИ ОДНОЙ И НЕСКОЛЬКИХ ПЕРЕМЕННЫХ. ДИФЕРЕНЦИРОВАНИЕ ФУНКЦИЙ.

4.1. Числовая последовательность и ее предел

Числовая последовательность и ее предел. Бесконечно большие и бесконечно малые последовательности. Свойства сходящихся последовательностей. Виды неопределенностей. Монотонные последовательности. Теорема Вейерштрасса. Число е

Числовой последовательностью называется бесконечное множество чисел

$a_1, a_2, a_3, \dots , a_n, \dots$ (4.1.1)

следующих одно за другим в определенном порядке и построенных по определенному закону, с помощью которого a_n задается как функция целочисленного аргумента n, т. е $f(n) = a_n$.

Число A называется **пределом последовательности** (4.1.1), если для любого $\varepsilon > 0$ существует натуральное число $N=N(\varepsilon)$, такое, что при $n \ge N(\varepsilon)$ выполняется неравенство $|a_n - A| < \varepsilon$. Если число A есть предел последовательности (4.1.1), то пишут

$$\lim_{n\to\infty} a_n = A.$$

Последовательность, имеющая предел, называется **сходящейся**. Последовательность, не являющаяся сходящейся, называется **расходящейся**.

Для сходящихся последовательностей имеют место теоремы:

1.
$$\lim_{n\to\infty}(a_n \pm b_n) = \lim_{n\to\infty} a_n \pm \lim_{n\to\infty} b_n;$$
2.
$$\lim_{n\to\infty}(a_n b_n) = \lim_{n\to\infty} a_n \cdot \lim_{n\to\infty} b_n$$
3.
$$\lim_{n\to\infty}\frac{a_n}{b_n} = \frac{\lim\limits_{n\to\infty} a_n}{\lim\limits_{n\to\infty} b_n}\ \left(\text{если } \lim_{n\to\infty} b_n \neq 0\right).$$

Последовательность $\{x_n\}$ называется **бесконечно малой последовательностью** (б.м.п.), если для любого числа $\varepsilon > 0$ существует номер $n_0 \in N$ такой, что для любого $n \ge n_0$ выполняется неравенство: $|x_n| < \varepsilon$.

Теорема. Если последовательность сходится, то она имеет только один предел.

Теорема. Если последовательность сходится, то она ограничена.

Теорема. Пусть даны три последовательности $\{a_n\}$, $\{b_n\}$ и $\{c_n\}$, причем последовательности $\{a_n\}$ и $\{c_n\}$ имеют один и тот же предел:

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} c_n = b$$

и пусть для всех натуральных n выполняется неравенство: $a_n \le b_n \le c_n$. Тогда последовательность $\{b_n\}$ сходится, причем её предел равен b.

Последовательность $\{x_n\}$ называется **бесконечно-большой** (б.б.п.), если для любого $A > 0$ существует номер $n_0 \in N$ такой, что для любого $n \ge n_0$ выполняется неравенство: $|x_n| > A$.

Основные свойства бесконечно малой и бесконечно большой последовательностей:

1. Сумма б.м. последовательностей есть б.м.п.
2. Произведение ограниченной последовательности и б.м. есть б.м.п.
3. Если $\{x_n\}$ – б.м.п., то $\{x_n\}$ – ограниченная последовательность.
4. Произведение б.м. последовательностей есть последовательность б.м.
5. Если $\{x_n\}$ – б.м.п. и $x_n = c, \forall n \in N$, то $c=0$, т.е. $x_n = 0, \forall n \in N$
6. Если $\{x_n\}$ – б.м.п. и $x_n \ne 0, \forall n\, n_0$, то последовательность $\left\{\frac{1}{x_n}\right\}_{n=n_0}^{\infty}$ – б.б.п.
7. Если $\{x_n\}$ – б.б.п., то $\exists n_0 \in N: \forall n \ge n_0,\ x_n \ne 0$ и последовательность $\left\{\frac{1}{x_n}\right\}_{n=n_0}^{\infty}$ – б.м.п.

Перечислим основные виды неопределенностей:
$\frac{0}{0}, \frac{\infty}{\infty}, 0 \cdot \infty, \infty - \infty, 1^{\infty}, \infty^0, 0^0.$

Последовательность $\{x_n\}$ называется **монотонно возрастающей**, если для любого $n \in N, x_n < x_{n+1}$.

Последовательность $\{x_n\}$ называется **монотонно убывающей**, если для любого $n \in N, x_n > x_{n+1}$.

Последовательность $\{x_n\}$ является неубывающей или нестрого возрастающей (невозрастающей или нестрого убывающей), если для $\forall n \in N, x_n < x_{n+1} (x_n \ge x_{n+1})$.

Последовательность $\{x_n\}$ называется монотонной, если она убывающая или возрастающая.

Если все элементы последовательности $\{x_n\}$ равны одному и тому же числу, то последовательность называется **постоянной**.

Теорема Вейерштрасса (Основная теорема теории последовательностей). Если последовательность $\{x_n\}$ является нестрого возрастающей (нестрого убывающей) и $\{x_n\}$ ограничена сверху (снизу), то $\{x_n\}$ является сходящейся.

Данную теорему можно сформулировать немного иначе: Любая монотонная и ограниченная последовательность $\{x_n\}$ имеет предел.

Замечание. Для того чтобы монотонная последовательность сходилась, достаточно, чтобы она была ограниченной.

Используя теорему Вейерштрасса, можно показать, что последовательность

$$\{x_n\} = \left\{(1 + \frac{1}{n})^n\right\}$$

является сходящейся, то есть имеет предел. Данный предел равен числу e – числу Эйлера (приблизительно равно 2,71828), которое является основанием натурального логарифма $\ln x$:

$$\lim_{n\to\infty}\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = e.$$

Пример. Доказать, что последовательность $\{x_n\} = \left\{\frac{1}{n}\right\}$ сходится.

Доказательство. Рассматриваемая последовательность ограничена снизу, так как для любого натурального n: $x_n = \frac{1}{n} > 0$. Исследуем заданную последовательность на монотонность:

$$x_n - x_{n+1} = \frac{1}{n} - \frac{1}{n+1} = \frac{n+1-n}{n(n+1)} = \frac{1}{n(n+1)}$$

$$\frac{1}{n(n+1)} > 0 \Rightarrow x_n > x_{n+1},$$

а значит последовательность $\{x_n\}$ монотонно убывающая. А тогда, согласно теореме Вейерштрасса, последовательность сходится.

4.2. Функции одной вещественной переменной

Функцией называется закон, по которому каждому числу x из заданного множества X, поставлено в соответствие только одно число y, пишут $y=f(x)$, при этом x называют аргументом функции, y называют значением функции.

Существуют разные способы задания функций:

1. Аналитический способ.

Аналитический способ – это наиболее часто встречающийся способ задания функции. Заключается он в том, что функция задается формулой, устанавливающей, какие операции нужно произвести над x, чтобы найти y.

Например, $y = x^2 – 2$, $y = 3\ln x$, $y = \sin 2x$.

Рассмотрим первый пример – $y = x^2 – 2$. Здесь значению $x = 1$ соответствует $y=1^2–2= –1$, значению $x = 3$ соответствует $y=3^2–2=7$ и т. д.

Функция может быть задана на разных частях множества X разными функциями.

2. Графический способ.

При графическом способе вводится прямоугольная система координат и в этой системе координат изображается множество точек с координатами $(x; y)$. При этом $y = f(x)$.

3. Словесный способ.

Функция задается с помощью словесной формулировки. Классический пример – функция Дирихле: «Функция равна 1, если x – рациональное число; функция равна 0, если x – иррациональное число».

4. Табличный способ.

Табличный способ наиболее удобен, когда множество X конечно. При этом способе составляется таблица, в которой каждому элементу из множества X, ставится в соответствие число Y.

Пусть функция $y = f(x)$ строго монотонная (возрастающая или убывающая) и непрерывная на области определения $y \in (a;\ b)$, область значений этой функции $y \in (c;\ d)$, тогда на интервале $(c;\ d)$ определена непрерывная строго монотонная функция $x = g(y)$ с областью значений $(a;\ b)$, которая является **обратной** для $y = f(x)$.

Другими словами, об обратной функции $x = g(y)$ для функции $y = f(x)$ на конкретном промежутке имеет смысл говорить, если на этом интервале $y = f(x)$ либо возрастает, либо убывает.

Функции f и g называют взаимно обратными.

Основными элементарными функциями являются:

Постоянная функция (константа) $y = C$

Степенная функция $y = x^a$

Показательная функция $y = a^x$

Логарифмическая функция $y = \log_a(x)$

Тригонометрические функции $y = \sin x, y = \cos x, y = \operatorname{tg} x\ , y = ctgx$

Обратные тригонометрические функции $y = \arcsin x$, $y = \arccos x$, $y = \operatorname{arctg} x$, $y = \operatorname{arcctg} x$.

Квантор общности $\forall$ – заменяет выражение "для любого", "для произвольного", "для какого бы ни было".

Квантор существования $\exists$ – заменяет выражение "существует", "найдется".

Запись $A \Rightarrow B$ (импликация) означает, что из справедливости высказывания A вытекает справедливость высказывания B. Если, кроме того, из справедливости высказывания B вытекает справедливость A, то записываем B. Если $A \Leftrightarrow B$, то высказывание B является необходимым и достаточным условием для того, чтобы выполнялось высказывание A.

Если предложения A и B справедливы одновременно, то ем $A \wedge B$. Если же справедливо хотя бы одно из предложений A или B, то записываем $A \vee B$.

Метод математической индукции является важным способом доказательства предложений (утверждений), зависящих от натурального аргумента.

Метод математической индукции состоит в следующем:

Предложение (утверждение) $P(n)$, зависящее от натурального числа n, справедливо для любого натурального n если:

P (1) является истинным предложением (утверждением);

$P(n)$ остается истинным предложением (утверждением), если n увеличить на единицу, то есть $P(n+1)$ – истинное предложение (утверждение).

Таким образом, метод математической индукции предполагает два этапа:

Этап проверки: проверяется, истинно ли предложение (утверждение) $P(1)$.

Этап доказательства: предполагается, что предложение $P(n)$ истинно, и доказывается истинность предложения $P(n+1)$ (n увеличено на единицу).

Замечание. В некоторых случаях метод математической индукции используется в следующей форме:

Пусть m – натуральное число, $m > 1$ и $P(n)$ – предложение, зависящее от n, $n \geq m$.

Если $P(m)$ справедливо;

$P(n)$ будучи истинным предложением, влечет истинность предложения $P(n+1)$ для любого натурального n, $n \geq m$, тогда $P(n)$ – истинное предложение для любого натурального n, $n \geq m$.

Формула бинома Ньютона для натуральных n имеет вид:

$(a+b)^n = a^n + \frac{n}{1!}a^{n-1}b + \frac{n(n-1)}{2!}a^{n-2}b^2 + \cdots + b^n,$

где $C_{nk} = \frac{n!}{k!(n-k)!}$ – биномиальные коэффициенты, представляющие из себя сочетания из n по k, $k=0,1,\ 2,\ \ldots,\ n$, а «!» – это знак факториала ($n! = 1\cdot2\cdot3\cdot\ldots\cdot(n-1)\cdot n$).

К примеру, известная формула сокращенного умножения "квадрат суммы" вида

$$(a+b)^2 = C_2^0 a^2 + C_2^1 a^1 b + C_2^2 b^2 = a^2 + 2ab + b^2$$

есть частный случай бинома Ньютона при $n = 2$. Выражение, которое находится в правой части формулы бинома Ньютона, называют разложением выражения $(a+b)^n$, а выражение $C_n^k a^{n-k} b^k$ называют *(k+1)*-ым членом разложения, $k=0,\ 1,\ 2,\ \ldots,\ n$.

Пример. Разложить бином $(1+x)^6$ по степеням x.

Решение: Применяем формулу бинома Ньютона:

$(1+x)^6 = 1 + C_6^1 + C_6^2 x^2 + C_6^3 x^3 + C_6^4 x^4 + C_6^5 x^5 + x^6.$

Значения биномиальных коэффициентов находим последовательно по формуле $C_n^k + C_n^{k+1} = C_{n+1}^{k+1}$.

Например, $C_6^3 = C_5^2 + C_5^3 = (C_4^1 + C_4^2) + (C_4^2 + C_4^3) = 4 + 2\cdot$

$$\cdot(C_3^1 + C_3^2) + 4 = 4 + 2\cdot 6 + 4 = 20.$$

$$(1+x)^6 = 1 + 6x + 15x^2 + 20x^3 + 15x^4 + 6x^5 + x^6.$$

Ответ: $(1+x)^6 = 1 + 6x + 15x^2 + 20x^3 + 15x^4 + 6x^5 + x^6.$

Предел функции в точке (по Коши и по Гейне) и на бесконечности. Односторонние пределы функции. Бесконечно малые и бесконечно большие функции

Пусть задано некоторое числовое множество $X \subset R$ и каждому $x \in X$ поставлено в соответствие число $y \in R$, тогда говорят, что на множестве X задана функция $y = f(x)$, $x \in X$.

Определение предела функции по Коши

Число b называется пределом функции $f(x)$ в точке a, если для $\forall \varepsilon > 0\ \exists \delta > 0$ такое, что для $\forall x \in (a-\delta; a+\delta) \cap D[f]$ из того, что $0 < |x - a| < \delta$ следует, что $|f(x) - b| < \varepsilon$ и обозначается

$$\lim_{x \to a} f(x) = b, \quad f(x) \to b$$

или при $x \to a$.

Определение предела функции по Гейне

Число b называется **пределом функции** $f(x)$ в точке a, если для любой последовательности $\{x_n\} \subset D(f)$, которая сходится к a, соответствующая последовательность значений функции $\{f(x_n)\}$ сходится к b.

Пусть переменная x стремится к a, оставаясь больше a, и при этом $f(x) \to A$. Тогда число A называют **правосторонним пределом** (или пределом справа) функции $f(x)$ и обозначают любым из символических выражений

$$\lim_{x \to a+0} f(x) = A, \ \lim_{x \to a+} f(x) = A.$$

Понятие левостороннего предела (или предела слева) вводится аналогичным образом. В этом случае $f(x) \to B$ при $x \to a$ со стороны меньших значений:

$$\lim_{x \to a-0} f(x) = B, \ \lim_{x \to a-} f(x) = B.$$

Для существования обычного (двустороннего) предела функции $f(x)$ в точке a необходимо и достаточно равенство между собой односторонних пределов:

$$\lim_{x \to a+0} f(x) = \lim_{x \to a-0} f(x) = A \Rightarrow \lim_{x \to a} f(x) = A.$$

Например, в точке $x = 3$ односторонние пределы функции $f(x) = 2^{1/(x-3)}$ отличаются друг от друга:

$$\lim_{x \to 3+0} 2^{1/(x-3)} = +\infty, \ \lim_{x \to 3-0} 2^{1/(x-3)} = 0.$$

Поэтому в рассматриваемой точке предел функции $f(x)$ не существует.

Непрерывность функции в точке. Свойства функций, непрерывных в точке. Односторонняя непрерывность. Точки разрыва функций и их классификация. Непрерывность элементарных функций. Замечательные пределы

Функция $f(x)$ называется **непрерывной в точке a**, если функция $f(x)$ определена в точке a и её окрестности, существует конечный предел функции $f(x)$ в точке a, и этот предел равен значению функции в точке a, т.е. $\lim_{x\to a} f(x) = f(a)$.

Замечание. При нахождении предела функции $y = f(x)$, которая является непрерывной, можно переходить к пределу под знаком функции, т.е. $\lim_{x\to a} f(x) = f(\lim_{x\to a} x) = f(a)$.

Теорема. Сумма непрерывных функций есть функция непрерывная.

Доказательство. Пусть функции $f(x)$ и $g(x)$ непрерывны в точке a. Тогда

$$\lim_{x\to a} f(x) = f(a), \lim_{x\to a} g(x) = g(a).$$

Согласно свойству пределов функций существование пределов функций $f(x)$ и $g(x)$ гарантирует существование предела их суммы. При этом

$$\lim_{x\to a}(f(x) + g(x)) = \lim_{x\to a} f(x) + \lim_{x\to a} f(x) = f(a) + g(a),$$

что и требовалось доказать.

Пример. Найти

$$\lim_{x\to\infty} \ln\frac{x^2+1}{x^2-3}$$

Решение:

$$\lim_{x\to\infty} \ln\frac{x^2+1}{x^2-3} = \ln(\lim_{x\to\infty}\frac{x^2+1}{x^2-3}) = \ln 1 = 0.$$

Ответ:

$$\lim_{x\to\infty} \ln\frac{x^2+1}{x^2-3} = 0.$$

Теорема. Произведение непрерывных функций есть функция непрерывная.

Теорема. Частное от деления непрерывных функций есть функция непрерывная – за исключением точек, в которых знаменатель обращается в нуль.

Теорема. Любая элементарная функция непрерывна в области своего определения.

Определение. Точка a, в которой нарушено хотя бы одно из трех условий непрерывности функции называется **точкой разрыва** функции.

Если в точке a существуют конечные пределы $f(a-0)$ и $f(a+0)$, такие, что $f(a-0) \neq f(a+0)$, то точка a называется **точкой разрыва первого рода**.

Если хотя б один из пределов $f(a-0)$ или $f(a+0)$ не существует или равен бесконечности, то точка a называется точкой разрыва второго рода.

Если существуют левый и правый пределы функции в точке, и они равны друг другу, но не совпадают со значением функции $f(x)$ в точке a:

$f(a) \neq f(a-0) = f(a+0)$ или функция $f(x)$ не определена в точке a, то точка a называется точкой устранимого разрыва.

Непрерывность элементарных функций:

$f(x) = C$, (где C – постоянная) непрерывна на R, т. к. $\Delta y \to 0$ при любом x.

$f(x) = x$, непрерывна на R, т. к. $\Delta y = \Delta x \to 0$ при $\Delta x \to 0$.

$f(x) = a_k x^k$, $k \in N$, непрерывна на R как произведение непрерывных функций.

$f(x) = P_n(x)$, непрерывна на R, т. к. многочлен $P_n(x)$ есть сумма непрерывных функций.

$f(x) = P_n(x) / Q_m(x)$,

где $P_n(x)$ и $Q_m(x)$ – многочлены степени n и m соответственно, непрерывна на R кроме тех x, при которых $Q_m(x)$ обращается в нуль, как частное непрерывных функций.

$f(x) = sin(x)$

Пусть x_0 – произвольная точка множества R. Тогда $sin(x) - sin(x_0) = 2\sin\frac{x-x_0}{2}\cos\frac{x+x_0}{2}$.

Так как

$$\left|\sin\frac{x-x_0}{2}\right| \leq \left|\frac{x-x_0}{2}\right|, a \ \left|\cos\frac{x-x_0}{2}\right| \leq 1, \text{то } |\sin x - \sin x_0| \leq |x - x_0|,$$

откуда следует, что функция $f(x) = sin(x)$ – непрерывна на R.

Аналогично рассуждая, можно доказать непрерывность косинуса $f(x) = cos(x)$. Из непрерывностей синуса и косинуса следуют непрерывности тангенса и котангенса, учитывая, что $cosx \neq 0$(для тангенса) и $sinx \neq 0$ (для котангенса).

$f(x) = arcsin(x)$, $f(x) = arccos(x)$, $f(x) = arctg(x)$, $f(x) = arcctg(x)$, непрерывны на своей области определения. Это следует из теоремы об обратной функции.

Логарифмическая функция непрерывна, что следует из непрерывности показательной функции по теореме об обратной функции.

Первый замечательный предел – предел отношения синуса к его аргументу равен единице в случае, когда аргумент стремится к нулю:

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x} = 1\,.$$

Следствия из первого замечательного предела:

$$\lim_{x\to 0}\frac{\operatorname{tg} x}{x} = 1\,;$$

$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\arcsin x}{x} = 1$;
$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\operatorname{arctg} x}{x} = 1$;
$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-\cos x}{\frac{x^2}{2}} = 1$.

Второй замечательный предел:

$$\lim_{x\to\infty}(1+\frac{1}{x})^x = e ,$$

где e – иррациональное число 2,71828...

Следствия из второго замечательного предела:

$\lim\limits_{x\to 0}(1+x)^{\frac{1}{x}} = e$

$\lim\limits_{x\to\infty}(1+\frac{k}{x})^x = e^k$.

Часто используют важные предметы:

$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\ln(1+x)}{x} = 1$;
$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^x-1}{x} = 1$;
$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{a^x-1}{x} = \ln a, a \in (0;1)\cup(1;+\infty)$;
$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{(1+x)^m-1}{x} = \mathrm{m}$.

Сравнение бесконечно малых и бесконечно больших функций. Эквивалентные функции, их применение к вычислению пределов функций

Для определения бесконечно малых и бесконечно больших функций воспользуемся, так называемым сравнением функций.

Сравнение бесконечно малых функций

Пусть $\alpha(x)$ и $\beta(x)$ две бесконечно малые функции при $x \to x_0$ и $\beta(x)$ отлична от нуля в некоторой окрестности точки x_0 (за исключением, быть может, самой точки x_0).

1) Если

$$\lim_{x\to x_0}\frac{\alpha(x)}{\beta(x)} = 0,$$

т.е. предел отношения функций существует и он равен нулю, то $\alpha(x)$ называется бесконечно малой более высокого порядка, чем $\beta(x)$. В этом случае пишут $\alpha(x) = o(\beta(x))$ и говорят $\alpha(x)$ есть o – малое от $\beta(x)$.

2)Если

$$\lim_{x\to x_0}\frac{\alpha(x)}{\beta(x)} = \mathrm{A} \neq 0 \ (\mathrm{A} - \text{число}),$$

т.е. предел отношения функций существует, и он равен А, то бесконечно малые $\alpha(x)$ и $\beta(x)$ имеют одинаковый порядок малости. В этом случае пишут $\alpha(x) = O(\beta(x))$, $\alpha(x)$ есть O – большое от $\beta(x)$.

3) Если

$$\lim_{x\to x_0}\frac{\alpha(x)}{\beta(x)} = \infty,$$

то $\alpha(x)$ называется бесконечно малой более низкого порядка, чем $\beta(x)$. Соответственно $\beta(x)= o(\alpha(x))$ и говорят $\beta(x)$ есть o – малое от $\alpha(x)$.

4) Если

$$\lim_{x\to x_0}\frac{\alpha(x)}{\beta(x)} = 1,$$

то $\alpha(x)$ и $\beta(x)$ называется эквивалентными бесконечно малыми, $\alpha(x) \sim \beta(x)$.

В некоторых случаях недостаточно знать, что одна из двух бесконечно малых является бесконечно малой более высокого порядка, чем другая. Нужно еще оценить, как высок этот порядок. Поэтому вводится следующее правило: если

$$\lim_{x\to x_0}\frac{\alpha(x)}{\beta^n(x)} = \mathrm{A} \neq 0,$$

то $\alpha(x)$ является бесконечно малой n-го порядка относительно $\beta(x)$.

Сравнение бесконечно больших функций

Для бесконечно больших функций имеют место аналогичные правила сравнения.

Бесконечно большие функции $\alpha(x)$ и $\beta(x)$ являются эквивалентными бесконечно большими при $x \to x_0$, если

$$\lim_{x\to x_0}\frac{\alpha(x)}{\beta(x)} = 1.$$

Функция $\alpha(x)$ является бесконечно большой более низкого порядка, чем $\beta(x)$ при $x \to x_0$, если

$$\lim_{x\to x_0}\frac{\alpha(x)}{\beta(x)} = 0.$$

Бесконечно большие функции $\alpha(x)$ и $\beta(x)$ имеют одинаковый порядок роста при $x \to x_0$, если

$$\lim_{x\to x_0}\frac{\alpha(x)}{\beta(x)} = \text{A} \neq 0 \ (\text{A} - \text{число}).$$

Функция $\alpha(x)$ является бесконечно большой n-го порядка по отношению к бесконечно большой $\beta(x)$ при $x \to x_0$, если

$$\lim_{x\to x_0}\frac{\alpha(x)}{\beta^n(x)} = \text{A} \neq 0.$$

Эквивалентные функции, их применение к вычислению пределов функций

Определение. Если $\lim\limits_{x\to x_0}\frac{\alpha(x)}{\beta(x)} = 1$, то бесконечно малые или бесконечно большие величины $\alpha(x)$ и $\beta(x)$ называются эквивалентными. Обозначают: $\alpha(x) \sim \beta(x)$ при $x \to x_0$.

Очевидно, что эквивалентные величины являются частным случаем бесконечно малых (бесконечно больших) величин одного порядка малости.

Пример. Проверить, являются ли функции $\alpha(x) = 5(x^2 - 5x + 6)$ и $\beta(x) = x^2 - x - 6$ эквивалентными бесконечно малыми при $x \to 3$.

Решение: Проверим вначале, что данные функции являются бесконечно малыми функциями в точке $x = 3$:

$$\lim_{x\to 3}\alpha(x) = \lim_{x\to 3} 5(x^2 - 5x + 6) = 0$$

$$\lim_{x\to 3}\beta(x) = \lim_{x\to 3} (x^2 - x - 6) = 0$$

Найдем предел отношения этих функций:

$$\lim_{x\to 3}\frac{\alpha(x)}{\beta(x)} = \lim_{x\to 3}\frac{5(x^2 - 5x + 6)}{x^2 - x - 6} = \lim_{x\to 3}\frac{5(x-3)(x-2)}{(x-3)(x+2)} = \lim_{x\to 3}\frac{5(x-2)}{(x+2)} = \frac{5}{5} = $$

$$= 1$$

Ответ: Заданные функции $\alpha(x) = 5(x^2 - 5x + 6)$ и $\beta(x) = x^2 - x - 6$ являются эквивалентными бесконечно малыми.

При $\alpha(x) \xrightarrow[x\to x_0]{} 0$ справедливы следующие соотношения эквивалентности:

- $\sin\alpha(x) \sim \alpha(x);$
- $\operatorname{tg}\alpha(x) \sim \alpha(x);$
- $\arcsin\alpha(x) \sim \alpha(x);$
- $\operatorname{arctg}\alpha(x) \sim \alpha(x);$
- $\log_a(1 + \alpha(x)) \sim \alpha(x) \cdot \frac{1}{\ln a}$, где $a > 0$;
- $\ln(1 + \alpha(x)) \sim \alpha(x);$
- $a^{\alpha(x)} - 1 \sim \alpha(x) \cdot \ln a$, где $a > 0$;
- $e^{\alpha(x)} - 1 \sim \alpha(x);$

- $1 - \cos\alpha(x) \sim \frac{\alpha^2(x)}{2}$;
- $\left(1 + \alpha(x)\right)^{\mu} - 1 \sim \mu \cdot \alpha(x), \mu \in R$, поэтому используют выражение: $\sqrt[n]{1 + \alpha(x)} \approx \frac{\alpha(x)}{n} + 1$, где $\alpha(x) \xrightarrow[x \to x_0]{} 0$.

Теорема. Предел отношения двух бесконечно малых функций *α(x)* и *β(x)* при $x \to a$ равен пределу отношения эквивалентных им бесконечно малой функций $\alpha^*(x)$ и $\beta^*(x)$ при $x \to a$, то есть верны предельные равенства:

$$\lim_{x\to a}\frac{\alpha(x)}{\beta(x)} = \lim_{x\to a}\frac{\alpha^*(x)}{\beta(x)} = \lim_{x\to a}\frac{\alpha(x)}{\beta^*(x)} = \lim_{x\to a}\frac{\alpha^*(x)}{\beta^*(x)}.$$

Пример. Найти предел

$$\lim_{x\to 0}\frac{3x + 7x^2}{\sin 2x}$$

Решение: При $x \to 0$: $\sin 2x \sim 2x$

$$\lim_{x\to 0}\frac{3x + 7x^2}{\sin 2x} = \lim_{x\to 0}\frac{x(3 + 7x)}{2x} = \lim_{x\to 0}\frac{3 + 7x}{2} = \frac{3}{2}$$

Ответ:

$$\lim_{x\to 0}\frac{3x + 7x^2}{\sin 2x} = \frac{3}{2}$$

Теорема. Произведение двух эквивалентных бесконечно малых функций есть бесконечно малая функция более высокого порядка, чем каждая из них.

Верно и обратное утверждение.

Теорема. Сумма конечного числа бесконечно малой функций разных порядков эквивалентна слагаемому низшего порядка.

Слагаемое, которое эквивалентно сумме бесконечно малых функций, называется **главной частью указанной суммы**.

Замена суммы бесконечно малой функций ее главной частью называется **отбрасыванием бесконечно малой высшего порядка.**

Пример. Найти предел

$$\lim_{x\to 0}\frac{5x - 6x^3}{tg3x}$$

Решение: При $x \to 0$: $5x - 6x^3 \sim 5x$, $tg3x \sim 3x$

$$\lim_{x\to 0}\frac{5x - 6x^3}{tg3x} = \left[\frac{0}{0}\right] = \lim_{x\to 0}\frac{5x}{3x} = \lim_{x\to 0}\frac{5}{3} = \frac{5}{3}$$

Ответ:$\lim_{x\to 0}\frac{5x-6x^3}{tg3x}=\frac{5}{3}$

Применение эквивалентных бесконечно малых функций при вычислении пределов. Для раскрытия неопределенностей вида $\left[\frac{0}{0}\right]$ часто бывают полезным применять принцип замены бесконечно малых эквивалентными и другие свойства эквивалентных бесконечно малых функций. Как известно, $\sin x \sim x$ при $x \to 0$, $\operatorname{tg} x \sim x$ при $x \to 0$.

Пример. Найти

$$\lim_{x\to 3}\frac{\sin(x-3)}{x^2-4x+3}.$$

Решение: При $x \to 3$ функция $x-3$ бесконечно малая и, следовательно, $\sin(x-3) \sim x-3$.

Так как при замене бесконечно малой функции $\sin(x-3)$ эквивалентной ей функцией $x-3$ предел отношения не изменится, то

$$\lim_{x\to 3}\frac{\sin(x-3)}{x^2-4x+3}=\lim_{x\to 3}\frac{x-3}{(x-3)(x-1)}=\lim_{x\to 3}\frac{1}{x-1}=\frac{1}{2}.$$

Ответ:

$$\lim_{x\to 3}\frac{\sin(x-3)}{x^2-4x+3}=\frac{1}{2}$$

Функции, непрерывные на отрезке и их свойства: теоремы Вейерштрасса, теорема Коши о прохождении функции через нуль, теорема Коши о промежуточном значении

Наряду с непрерывностью функции в точке рассматривают ее непрерывность на разных промежутках.

Функция $f(x)$ называется **непрерывной на интервале** (a, b), если она непрерывна в каждой точке этого интервала.

Функция $f(x)$ называется **непрерывной на отрезке** $[a, b]$, если она непрерывна на интервале (a, b), непрерывна справа в точке a и непрерывна слева в точке b.

Замечание. Функция, непрерывная на отрезке $[a, b]$ может быть разрывной в точках a и b (рис. 4.2.1).

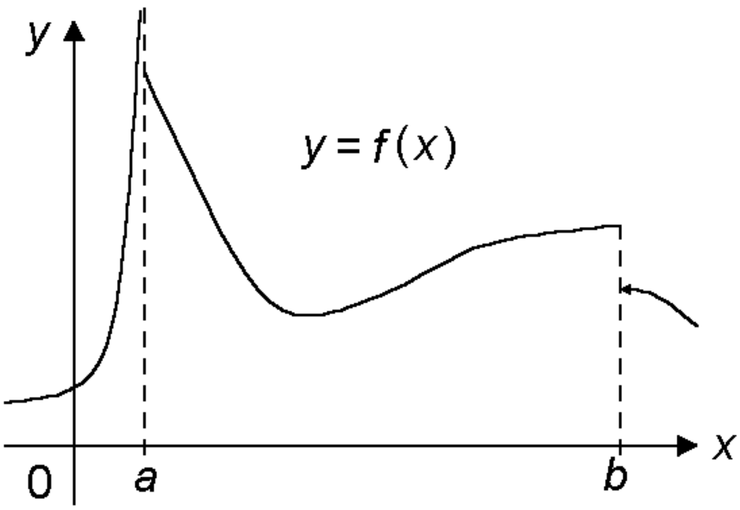


Рисунок 4.2.1. Функция, непрерывная на отрезке

Множество функций, непрерывных на отрезке $[a,\ b]$ обозначается символом $C_{[a,b]}$.

Свойства функций, непрерывных на отрезке

Теорема (об ограниченности непрерывной функции**).** Если функция $f(x)$ непрерывна на отрезке $[a, b]$, то она ограничена на этом отрезке, т. е. существует такое число $C > 0$, что $x \in [a, b]$ выполняется неравенство $|f(x)| \le C$.

Теорема (Вейерштрасс). Если функция $f(x)$ непрерывна на ке $[a, b]$, то она достигает на этом отрезке своего наибольшего значения M и наименьшего значения m, т.е. существуют точки $\alpha, \beta \in [a, b]$ такие, что $m = f(\alpha) \le f(x) \le f(\beta) = M$ для всех $x \in [a, b]$ (рис. 4.2.2).

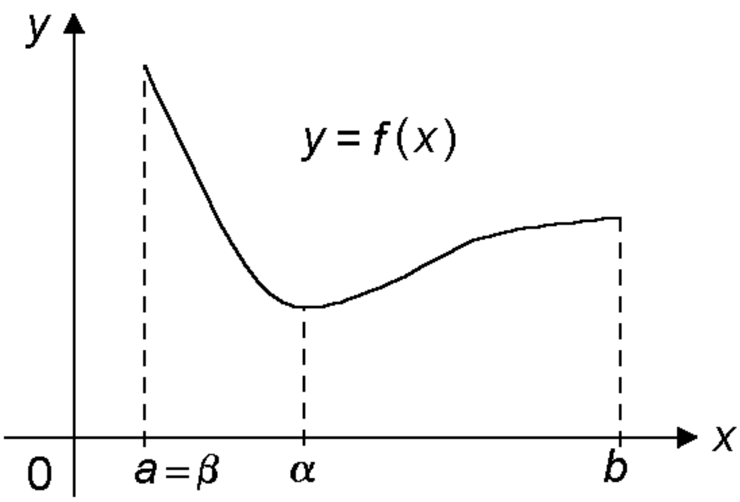


Рисунок 4.2.2. Теорема Вейерштрасса

Наибольшее значение M обозначается символом $\max\limits_{x \in [a,b]} f(x)$, а наименьшее значение m – символом

$\min\limits_{x \in [a,b]} f(x)$.

Теорема (**о существовании нуля**). Если функция $f(x)$ непрерывна на отрезке $[a, b]$ и на концах отрезка принимает ненулевые значения разных знаков, то на интервале (a, b) найдется по крайней мере одна точка ξ в которой $f(\xi) = 0$.

Геометрический смысл теоремы состоит в том, что график функции, удовлетворяющей условиям теоремы, обязательно пересечет ось Ox (рис. 4.2.3).

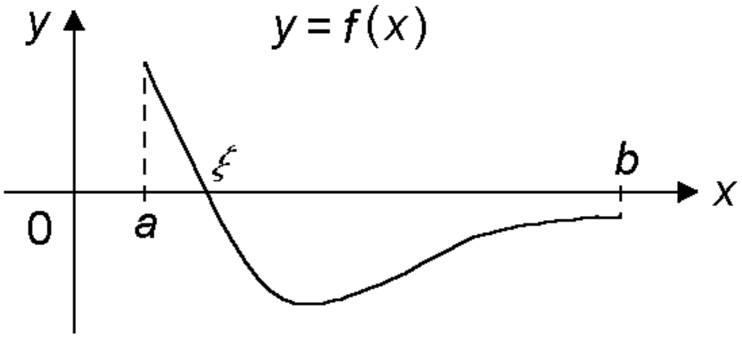


Рисунок 4.2.3. Теорема о существовании нуля

Замечание. На этой теореме основан метод приближенного решения уравнения $f(x) = 0$ (4.1.1) называемый **методом бисекции (дихотомии)**, или **методом половинного деления**.

Схема решения уравнения методом половинного деления:

Отделяем корни уравнения (4.1.1) Для этого устанавливаем промежутки, в которых функция $f(x)$ имеет единственный нуль и на его концах принимает значения разных знаков. С этой целью используем графические построения или составляем таблицу значений функции. Обозначим такой отрезок символом σ_0.

Разделим этот отрезок пополам. Если в середине отрезка функция $f(x)$ равна нулю, уравнение (4.2.1) решено. В противном случае на концах одного из полученных половинных отрезков $f(x)$ вновь принимает значения разных знаков. Обозначим этот отрезок символом σ_1 и вновь разделим его пополам. Если в середине σ_1 функция $f(x)$ равна нулю, то уравнение (4.2.1) решено. В противном случае продолжим указанную процедуру. Таким образом, мы либо на каком–то этапе получим точку, в которой $f(x) = 0$, т.е. точное решение уравнения (4.2.1) , либо получим последовательность вложенных друг в друга отрезков $\sigma_0, \sigma_1 \dots \sigma_n$, на каждом из которых $f(x)$ имеет значения разных знаков. В этом случае можно заключить искомый корень уравнения (4.2.1) в промежуток произвольной длины и, следовательно, вычислить этот корень с любой заданной точностью.

Замечание. Метод неприменим для отыскания корней четной кратности.

Теорема (**Больцано–Коши**). Если функция $f(x)$ непрерывна на отрезке, то она принимает на (a, b) все промежуточные значения между $f(a)$ и $f(b)$.

4.3. Дифференциальное исчисление функций одной вещественной переменной

Пусть функция $y = f(x)$ определена на некотором интервале (a, b). Проделаем следующие операции:

– аргументу $x \epsilon (a, b)$ дадим приращение Δx: $x + \Delta x \in (a, b)$;

– найдем соответствующее приращение функции: $\Delta y = f(x + \Delta x) - f(x)$;

– составим отношение приращения функции к приращению аргумента: $\frac{\Delta y}{\Delta x}$;

– найдем предел этого отношения при $\Delta x \to 0$:

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x}$$

Если этот предел существует, то его называют производной функции $f(x)$ и обозначают одним из символов: f'_x, $f'(x)$, y', y'_x, $\frac{dy}{dx}$.

Производной функции $y = f(x)$ в точке x_0 называется предел отношения приращения функции к приращению аргумента, когда приращение аргумента стремится к нулю.

Итак, по определению:

$$y' = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x}$$

или

$$f'(x_0) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}.$$

Производная функции $f(x)$ есть некоторая функция $f'x)$, «*произведенная*» из данной функции.

Существуют односторонние пределы функции $y=|x|$ в точке x = 0:

$$\lim_{\Delta x \to 0-0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = -1, \lim_{\Delta x \to 0+0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = 1.$$

В таких случаях говорят, что функция имеет односторонние пределы (или «производные слева, и справа»). И обозначаются соответственно $f'(x)$, $f'_+(x)$.

Если $f'_-(x) \neq f'_+(x)$, то производная в точке не существует. Не существует производной и в точках разрыва функции.

Физический смысл производной:

Если функция $y = f(x)$ и ее аргумент x являются физическими величинами, то производная $f'(x_0)$ – скорость изменения переменной уотносительно переменной x в точке x_0. Например, если $S = S(t)$– расстояние, проходимое точкой за время t, то ее производная $S' = S(t_0)$ – скорость в момент времени t_0. Если $q = q(t)$ – количество электричества, протекающее через поперечное сечение проводника в момент времени t, то $q'(t_0)$ – скорость изменения количества электричества в момент времени t_0, т.е. сила тока в момент времени t_0.

Геометрический смысл производной:

Рассмотрим график функции $y = f(x)$:

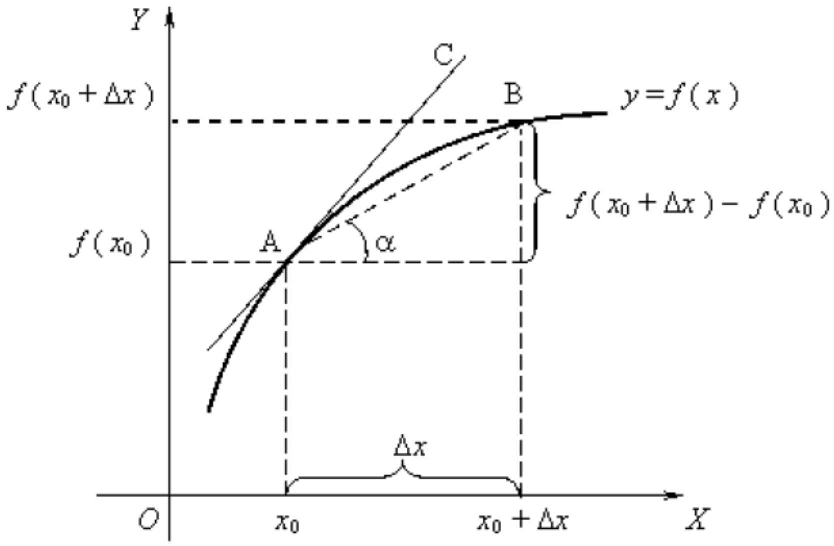


Рисунок 4.3.1. Геометрический смысл производной

Из рис. 4.1.4 видно, что для любых двух точек A и B графика функции: $\frac{f(x_0+\Delta x)-f(x_0)}{\Delta x} = \operatorname{tg}\alpha$, где α – угол наклона секущей AB.

Таким образом, разностное отношение равно угловому коэффициенту секущей. Если зафиксировать точку A и двигать по направлению к ней точку B, то Δx неограниченно уменьшается и приближается к 0, а секущая AB приближается к касательной AC. Следовательно, предел разностного отношения равен угловому коэффициенту касательной к графику функции $y = f(x)$в точке A. Отсюда следует: *производная функции в точке есть угловой коэффициент касательной к графику этой функции в этой точке.* В этом и состоит **геометрический смысл** производной.

Уравнение касательной

Выведем уравнение касательной к графику функции в точке $A(x_0; f(x_0))$. В общем случае уравнение прямой с угловым коэффициентом $f'(x_0)$ имеет вид:

$$y = f'(x_0) \cdot x + b.$$

Чтобы найти b, воспользуемся тем, что касательная проходит через точку A: $f(x_0) = f'(x_0) \cdot x_0 + b$, отсюда, $b = f(x_0) - f'(x_0) \cdot x_0$, и подставляя это выражение вместо b, мы получим **уравнение касательной**:

$$y = f(x_0) + f'(x_0) \cdot (x - x_0).$$

Производные элементарных функций:

1. $c' = 0, c = const$
2. $(x^n)' = nx^{n-1}$
3. $(a^x)' = a^x \cdot \ln a$
4. $(e^x)' = e^x$
5. $(\log_a x)' = \dfrac{1}{x \ln a}$
6. $(\ln x)' = \dfrac{1}{x}$
7. $(\sin x)' = \cos\ x$
8. $(\cos x)' = -\sin\ x$
9. $\left(\sqrt{x}\right)' = \dfrac{1}{2\sqrt{x}}$
10. $(tg\ x)' = \dfrac{1}{cos^2\ x}$
11. $(ctg\ x)' = -\dfrac{1}{sin^2 x}$
12. $(\arcsin x)' = \dfrac{1}{\sqrt{1 - x^2}}$
13. $(\arcsin x)' = \dfrac{1}{\sqrt{1 - x^2}}$
14. $(arctg\ x)' = \dfrac{1}{1 + x^2}$
15. $(arcctg\ x)' = -\dfrac{1}{1 + x^2}$
16. $(sh\ x)' = ch\ x$
17. $(ch\ x)' = sh\ x$
18. $(th\ x)' = \dfrac{1}{ch^2 x}$
19. $(th\ x)' = -\dfrac{1}{sh^2 x}$

Производная суммы

Если функции *u(x)* и *v(x)* имеют в точке *x* производные, то в этой точке существует производная их суммы *u(x)+v(x),* которая вычисляется по формуле

$$\left(u(x) + v(x)\right)' = u(x)' = v(x)'$$

Эта формула справедлива для любого конечного числа слагаемых:

$$(u_1 + u_2 + \ldots + u_n)' = u_1' + u_2' + \ldots + u_n'.$$

Производная произведения

Если функции $u(x)$ и $v(x)$ имеют в точке x производные, то в этой точке существует производная их произведения $u(x)\ v(x)$ которая вычисляется по формуле

$$(uv)' = u'v + uv'$$

Постоянный множитель можно выносить за знак производной:

$$\left(kf(x)\right)' = kf'(x)$$

Производная частного

Если функции $u(x)$ и $v(x)$ имеют в точке x производные и если $v(x) \neq 0$, то в этой точке существует производная их частного $\frac{u}{v}$ которая вычисляется по формуле $\left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{u'v-uv'}{v^2}$.

Производная сложной функции

Пусть $y = f(u)$ и $u = \varphi(x)$, тогда $y = f\left(\varphi(x)\right)$ – сложная функция с промежуточным аргументом u и независимым аргументом x.

Если функция $u = \varphi(x)$ имеет производную u_x' в точке x, а функция $y = f(u)$ имеет производную y_u' в соответствующей точке $u = \varphi(x)$, то сложная функция $y = f\left(\varphi(x)\right)$ имеет производную y_x' в точке x, которая находится по формуле $y_x' = y_u' u_x'$.

Производная обратной функции

Пусть на множестве дифференцируемая функция $y = f(x)$ имеет множество значений Y и на множестве Y существует функция.

Теорема. Если в точке x_0 производная $y' = f'(x_0) \neq 0$, то производная обратной функции $x = \varphi(y)$ в точке $y_0 = \varphi(x_0)$ существует и равна обратной величине производной данной функции: $\varphi'(y_0) = \frac{1}{f'(x_0)}$, или $x'_y = \frac{1}{y'_x}$.

Логарифмическое дифференцирование:

Для функций вида $y(x) = \frac{u_1(x)\cdot u_2(x)\cdot\ldots\cdot u_k(x)}{v_1(x)\cdot v_2(x)\cdot\ldots\cdot v_m(x)}$ для упрощения нахождения производной рациональнее использовать логарифмическое дифференцирование.

Логарифмическим дифференцированием называется метод дифференцирования функций, при котором сначала находится логарифм функции, а затем вычисляется производная от него. Такой прием можно использовать для нахождения производных степенных, рациональных и некоторых иррациональных функций.

Рассмотрим этот подход более детально. Пусть дана функция $y = f(x)$. Возьмем натуральные логарифмы от обеих частей:

$$lny = lnf(x).$$

Теперь продифференцируем это выражение как сложную функцию, имея в виду, что y – это функция от x.

$$(lny)' = (lnf(x))'$$

Отсюда видно, что искомая производная равна

$$y' = y(lnf(x))' = f(x)(lnf(x))'.$$

Такая производная от логарифма функции называется **логарифмической производной**.

Данный метод позволяет также эффективно вычислять производные показательно-степенных функций, то есть функций вида

$$y = u(x)^{v(x)}$$

где $u(x)$ и $v(x)$ − дифференцируемые функции от x.

Дифференцируемость функций в точке. Дифференциал функции, его геометрический смысл, и применение в приближенных вычислениях. Инвариантность формы дифференциала

Определение. Если функция $f(x)$ определена в окрестности точки x_0 и $f(x) - f(x_0) = A\Delta x + \alpha(\Delta x)\Delta x$, где

$$\lim_{\Delta x \to 0} \alpha(\Delta x) = 0,$$

а A – некоторая константа, то функцию $f(x)$ называют дифференцируемой в точке x_0 и $A\Delta x = df(x_0)$ называется дифференциалом функции $f(x)$ в точке x_0.

Определение. Если функция $y = f(x)$ дифференцируема в любой точке $x_0 \in (a, b)$, то функция $y = f(x)$ называется дифференцируемой на промежутке (a, b).

Замечание. Если $y = f(x)$ – дифференцируема на промежутке (a, b) и

$$\exists f'_+(a) = \lim_{x \to a+0} \frac{\Delta y}{x - a}, \text{и } \exists\, f'_-(b) = \lim_{x \to b-0} \frac{\Delta y}{x - b}$$

то функция y называется дифференцируемой на отрезке $[a, b]$.

Рассмотрим функцию $y = f(x)$. Проведем к графику этой функции касательную MB в точке $M(x, y)$ и рассмотрим ординату этой касательной для точки $x + \Delta x$ (рис. 4.1.5). На рисунке $AM = \Delta x;\ AM_1 = \Delta y$

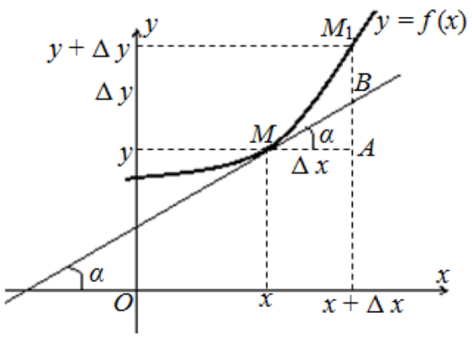


Рисунок 4.3.2. Дифференцируемость функции в точке

Рассмотрим прямоугольный ΔMAB. Тогда $\operatorname{tg}\alpha = \frac{AB}{AM} = \frac{AB}{\Delta x} \Rightarrow AB = \Delta x \cdot \operatorname{tg}\alpha$

Согласно геометрическому смыслу производной, тангенс угла между касательной к графику функции $y = f(x)$ положительным направлением оси абсцисс равен производной этой функции: $tg\alpha = f'(x)$. Следовательно, $AB = \Delta x \cdot f'(x)$

Известно, что приращение независимой переменной равно дифференциалу этой переменной: $\Delta x = dx$. Тогда $AB = f'(x)dx$.

По определению, дифференциал dy функции $y = f(x)$ равен $dy = f'(x)dx$.

Сравнивая правые части последних двух равенств, делаем вывод, что равны и их левые части, то есть $AB = dy$.

Таким образом, **геометрический смысл дифференциала**: дифференциал функции $y = f(x)$ в точке x равен приращению ординаты касательной к графику функции в этой точке, когда x получит приращение Δx.

Приращение Δy функции $y = f(x)$ представимо в виде:

$\Delta y = f'(x)\Delta x + \alpha(\Delta x)\Delta x$, где функция $\alpha(\Delta x)$ является бесконечно малой функцией при стремлении аргумента Δx к нулю. Так как $\Delta x = dx$, то

$$\Delta y = f'(x)\Delta x + \alpha(\Delta x)\Delta x = dy + \alpha(\Delta x)\Delta x$$

В силу того, что второе слагаемое $\alpha(\Delta x)\Delta x$ является бесконечно малым, то им можно пренебречь, а поэтому $\Delta y \approx dy$.

А так как в нахождении дифференциал значительно проще, чем приращение функции, то данная формула активно используется на практике.

Для приближенного вычисления значения функции применяется следующая формула: $f(x_0 + \Delta x) \approx f(x_0) + f'(x_0)\Delta x$.

Пример. Вычислить приближенно $arctg(1{,}02)$, заменяя приращение функции ее дифференциалом.

Решение: Рассмотрим функцию $y = arctgx$. Необходимо вычислить ее значение в точке $x = 1{,}02$. Представим данное значение в виде следующей суммы: $x = x_0 + \Delta x$.

Величины x_0 и Δx выбираются так, чтобы в точке x_0 можно было бы достаточно легко вычислить значение функции и ее производной, а Δx было бы достаточно малой величиной. С учетом этого, делаем вывод, что $x = 1{,}02 = 1 + 0{,}02$, то есть $x_0 = 1$, $\Delta x = 0{,}02$

Вычислим значение функции $y = arctgx$ в точке $x_0 = 1$:

$$y(x_0) = y(1) = arctg1 = \frac{\pi}{4}$$

Далее продифференцируем рассматриваемую функцию и найдем значение $y'(x_0)$: $y' = (arctg\, x)' = \frac{1}{1+x^2}$.

Тогда $y'(1) = \frac{1}{2}$.

Итак, $y(1{,}02) = arctg1{,}02 = y(1+0{,}02) \approx y(1) + y'(1)\Delta x = \frac{\pi}{4} + \frac{1}{2}\cdot 0{,}02 \approx 0{,}7852 + 0{,}01 = 0{,}7952$

Ответ: $arctg1{,}02 \approx 0{,}7952.$

Инвариантность формы первого дифференциала:

Если x – независимая переменная, то $dx = x - x_0$ (фиксированное приращение). В этом случае имеем

$$df(x_0) \ = \ f'(x_0)dx.$$

Если $x = \varphi(t)$ – дифференцируемая функция, то $dx = \varphi'(t_0)dt$. Следовательно, $df\big(\varphi(t_0)\big) = \Big(f\big(\varphi(t_0)\big)\Big)'_t dt = f'_x\big(\varphi(t_0)\big)\varphi'_t(t_0)dt =$

$= (x_0)dx,$ т.е. первый дифференциал обладает свойством инвариантности относительно замены аргумента.

<u>Производные высших порядков. Формула Лейбница. Дифференциалы высших порядков</u>

Производные высшего порядка явно заданной функции:

Пусть функция $y = f(x)$ имеет конечную производную $f'(x)$ в некотором интервале (a, b),тогда производная $f'(x)$ также является функцией в этом интервале. Если эта функция дифференцируема, то мы можем найти **вторую производную** исходной функции $f(x)$, которая обозначается в виде

$$f'' = \left(\frac{dy}{dx}\right)' = \frac{d}{dx}\left(\frac{dy}{dx}\right) = \frac{d^2y}{dx^2}.$$

Аналогично, если $f''(x)$ существует и дифференцируема, то мы можем вычислить третью производную функции $f(x)$:

$$f''' = \frac{d^3y}{dx^3} = y'''.$$

Производные более высокого порядка (если они существуют) определяются как

$$f^{(4)} = \frac{d^4y}{dx^4} = y^{(4)}, \dots, f^{(n)} = \frac{d^ny}{dx^n} = y^{(n)}$$

Таким образом, понятие производной n-го порядка вводится индуктивно путем последовательного вычисления n производных, начиная с производной первого порядка. Переход к производной следующего, более высокого порядка производится с помощью рекуррентной формулы

$y^{(n)} = (y^{(n-1)})'.$

В ряде случаев можно вывести общую формулу для производной произвольного n-го порядка без вычисления промежуточных производных. Некоторые такие примеры рассмотрены ниже.

Отметим, что для нахождения производных высшего порядка можно использовать следующие линейные соотношения:

$$(u+v)^{(n)}=(u)^{(n)}+(v)^{(n)}, (Cu)^{(n)}=C(u)^{(n)}, C=const.$$

Для вычисления производной любого порядка от произведения двух функций, минуя последовательное применение формулы вычисления производной от произведения двух функций, применяется формула Лейбница:

$$(uv)^{(n)}=u^{(n)}v+C_n^1u^{(n-1)}v'+C_n^2u^{(n-2)}v''+\ldots+C_n^{n-1}u'v^{(n-1)}+uv^{(n)}$$

где $C_n^k=\frac{n!}{k!(n-k)}$,

$n!=1\cdot 2\cdot \ldots \cdot n$ – факториал натурального числа n.

Дифференциалы высших порядков:

Пусть $y=f(x)$ – функция независимой переменной x, имеющая дифференциалы любого порядка. Первый дифференциал функции $dy=f'(x)dx$, где $dx=\Delta x$ – некоторое приращение независимой переменной x, которое мы задаем сами и которое не зависит от x. По определению

$d^2y=d(dy)=d(f'(x)dx)$.

Переменной является аргумент x. Значит, для дифференциала величина dx является постоянной и поэтому может быть вынесена за знак дифференциала. То есть дифференциал второго порядка

$$d^2y=d(f'(x)dx)=dx\cdot d\big(f'(x)\big).$$

Для вычисления дифференциала $d(f'(x))$ применим формулу дифференциала первого порядка к функции $f'(x)$. Тогда получим:

$d\big(f'(x)\big)=\big(f'(x)\big)'\cdot dx=dx\cdot f(x)dx=f(x)(dx)^2$. Итак,

$d^2y=f''(x)dx^2$.

Рассматривая последовательно дифференциалы все более высокого порядка, получим формулу дифференциала n-го порядка:

$d^ny=f^{(n)}(x)dx^n$.

Дифференцирование параметрически заданных функций. Дифференцирование функций, заданных неявно

Предположим, что функциональная зависимость от x не задана непосредственно, а через промежуточную величину t. Тогда формулы

$$\begin{cases}x=x(t)\\ y=y(t)\end{cases}$$

задают **параметрическое представление** функции одной переменной.

Пусть функция $y=f(x)$ задана в параметрической форме, то есть в виде:

$$\begin{cases}x=x(t)\\ y=y(t)\end{cases}$$

где функции $x = x(t)$ и $y = y(t)$ определены и непрерывны на некотором интервале изменения параметра t. Найдем дифференциалы от правых и левых частей каждого из равенств:

$$\begin{cases} dx = x'_t dt \\ dy = y'_t dt \end{cases}.$$

Далее, разделив второе уравнение на первое, и с учетом того, что

$$\frac{dy}{dx} = y'_x ,$$

получим выражение для первой производной функции, заданной параметрически:

$$\frac{dy}{dx} = y'_x = \frac{y'_t}{x'_t}.$$

Для нахождения второй производной $\frac{d^2y}{dx^2} = y''_{xx}$ выполним следующие преобразования:

$$\frac{d^2y}{dx^2} = y''_{xx} = (y'_x)' = \frac{dy'_x}{dx} = \frac{\frac{dy'_x}{dt}}{\frac{dx}{dt}} = \frac{(y'_x)'_t}{x'_t}.$$

Пример. Найти вторую производную для функции $\begin{cases} x = lnt \\ y = t^3 \end{cases}$, заданной параметрически.

Решение: Вначале находим первую производную по формуле:

$$y = \frac{y'_t}{x'_t}.$$

Производная функции y по переменной t равна:

$$y'_t = (t^3)' = 3t^2.$$

Производная x по переменной t равна:

$$x'_t = (\ln t)' = \frac{1}{t}$$

Тогда

$$y'_x = \frac{3t^2}{\frac{1}{t}} = 3t^3.$$

Вторая производная равна

$$y''_{xx} = (3t^3)' \cdot \frac{1}{\frac{1}{t}} = 3 \cdot (t^3)' \cdot t = 3t \cdot 3t^2 = 9t^3.$$

Ответ: $y''_{xx} = 9t^3$

Если независимая переменная x и функция y связаны уравнением вида $F(x, y) = 0$, которое не разрешено относительно y, то функция y называется **неявной функцией** переменной.

Например:

$$x^2 siny + xy - 1 = 0.$$

Всякую явно заданную функцию $y = f(x)$ можно записать в неявном виде $y - f(x) = 0$. Обратно сделать не всегда возможно.

Несмотря на то, что уравнение $F(x, y) = 0$ не разрешимо относительно y, оказывается возможным найти производную от y по x. В этом случае необходимо продифференцировать обе части заданного уравнения, рассматривая функцию y как функцию от x, а затем из полученного уравнения найти производную y'.

Пример. Найти вторую производную $y''(x)$ неявной функции $x^2 + xy^2 = 1$

Решение: Продифференцируем левую и правую часть заданного равенства, при этом помним, что y является функцией переменной x, поэтому производную от нее будем брать как производную от сложной функции. В итоге получаем:

$$(x^2 + xy^2)' = (1)'$$
$$(x^2)' + (xy^2)' = 0$$
$$2x + (x)' \cdot y^2 + x \cdot (y^2)' = 0$$
$$2x + 1 \cdot y^2 + x \cdot 2y \cdot y' = 0 \Longrightarrow 2x + y^2 + 2xy \cdot y' = 0$$

Из полученного равенства выражаем y':

$$2xy \cdot y^2 = -(2x + y^2) \Longrightarrow y' = -\frac{2x + y^2}{2xy}$$

Для нахождения второй производной продифференцируем равенство $2x + y^2 + 2xy \cdot y' = 0$ еще раз:

$$(2x + y^2 + 2xy \cdot y')' = (0)'$$
$$(2x)' + (y^2)' + (2xy \cdot y')' = 0$$
$$2(x)' + 2y \cdot y' + 2(xy \cdot y')' = 0$$

Подставив вместо y' найденное выше выражение, получаем:

$$2 \cdot 1 + 2y\left(-\frac{2x + y^2}{2xy}\right) + 2[(xy)' \cdot y' + xy \cdot (y')'] = 0$$

$$2 - \frac{2x + y^2}{x} + 2[\{(x)' \cdot y + x \cdot (y)'\} + xy \cdot y''] = 0$$

$$\frac{2x - 2x - y^2}{x} + 2[\{1 \cdot y + x \cdot y'\} \cdot y' + xy \cdot y''] = 0$$

$$-\frac{y^2}{x} + 2\left[\left(y - \frac{2x^2 + xy^2}{2xy}\right) \cdot \left(-\frac{2x + y^2}{2xy}\right) + xy \cdot y''\right] = 0$$

После упрощения получаем:

$$\frac{4x^2 - 3y^4}{2xy^2} + 2xy \cdot y'' = 0$$

Из полученного равенства выражаем вторую производную $y''(x)$:

$$y'' = \frac{3y^2 - 4x^2}{4x^2y^3}$$

Ответ:

$$y''(x) = \frac{3y^4 - 4x^2}{4x^2y^3}$$

Локальный экстремум функции. Теорема Ферма. Основные теоремы дифференциального исчисления: Ролля, Логранжа, Коши

Точка x_0 называется **точкой локального максимума** функции $f(x)$, если существует такая окрестность этой точки, что для всех x из этой окрестности выполняется неравенство:

$$f(x) \le f(x_0).$$

Точка x_0 называется **точкой локального минимума** функции $f(x)$, если существует такая окрестность этой точки, что для всех x из этой окрестности выполняется неравенство:

$$f(x) \ge f(x_0).$$

Значение функции в точке максимума называется **локальным максимумом**, значение функции в точке минимума – **локальным минимумом** данной функции. Локальные максимум и минимум функции называются **локальными экстремумами**.

Точка x_0 называется точкой **строгого локального максимума** функции $y = f(x)$, если для всех x из окрестности этой точки будет справедливо строгое неравенство

$$f(x) < f(x_0).$$

Точка x_0 называется точкой **строгого локального минимума** функции $y = f(x)$, если для всех x из окрестности этой точки будет справедливо строгое неравенство

$$f(x) > f(x_0).$$

Наибольшее или наименьшее значение функции на промежутке называется **глобальным экстремумом**.

Замечание. Глобальный экстремум может достигаться либо в точках локального экстремума, либо на концах отрезка.

Теорема Ферма. Пусть функция $f(x)$, определена в некотором промежутке; имеет локальный экстремум во внутренней точке x_0 этого промежутка; дифференцируема в окрестности точки x_0. Если x_0 – точка локального экстремума и функция $f(x)$ дифференцируема в точке x_0, то

$f'(x) = 0.$

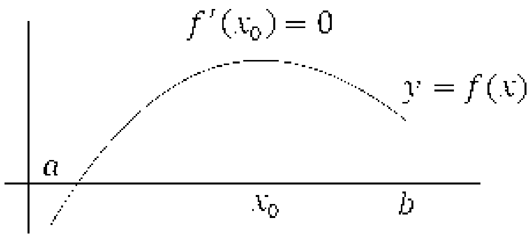


Рисунок 4.3.3. Теорема Ферма

Если функция принимает свое наибольшее (или наименьшее) значение не во внутренней точке промежутка, а на одном из его концов, то производная этой функции в точке экстремума не обязательно равна нулю.

Теорема Ролля. (О нуле производной функции, принимающей на концах отрезка равные значения) Пусть функция $y = f(x)$ непрерывна на отрезке $[a, b]$, дифференцируема на интервале (a, b), на концах отрезка $[a, b]$ принимает равные значения $f(a) = f(b)$. Тогда на интервале (a, b) найдется, по крайней мере, одна точка x_0, в которой $f'(x_0) = 0$.

Следствие (Геометрический смысл теоремы Ролля). Найдется хотя бы одна точка, в которой касательная к графику функции будет параллельна оси абсцисс.

Следствие. Если $f(a) = f(b) = 0$, то теорему Ролля можно сформулировать следующим образом: между двумя последовательными нулями дифференцируемой функции имеется, хотя бы один, нуль производной.

Теорема Лагранжа (О конечных приращениях). Пусть функция $y = f(x)$ непрерывна на отрезке $[a; b]$, дифференцируема на интервале (a, b).Тогда на интервале (a, b) найдется по крайней мере одна точка x_0, такая, что

$$\frac{f(b) - f(a)}{b - a} = f'(x_0).$$

Замечание. Теорема Ролля есть частный случай теоремы Лагранжа, когда $f(a) = f(b)$.

Следствие (Геометрический смысл теоремы Лагранжа). На кривой $y = f(x)$ между точками a и b найдется точка $M(x_0; f(x_0))$, такая, что через эту точку можно провести касательную, параллельную хорде AB (рис. 4.3.4).

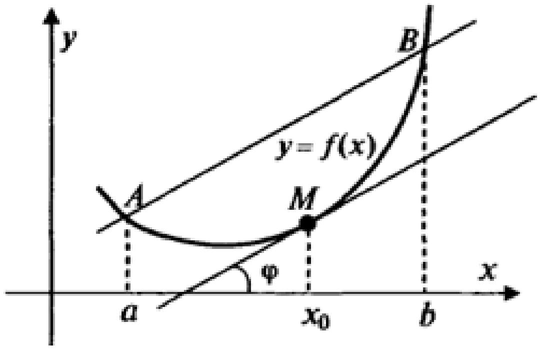


Рисунок 4.3.4. Геометрический смысл теоремы Лагранжа

Доказанная формула называется **формулой Лагранжа** или **формулой конечных приращений**. Она может быть переписана в виде:

$$f(b) - f(a) = f'(x_0)(b - a).$$

Теорема Коши. (Об отношении конечных приращений двух функций) Если функции $y = f(x)$ и $y = g(x)$ непрерывны на отрезке $[a, b]$, дифференцируемы на интервале (a, b) и производная $g'(x) \neq 0$ на интервале $(a; b)$, тогда на этом интервале найдется по крайней мере одна точка x_0, такая, что

$$\frac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)} = \frac{f'(x_0)}{g'(x_0)}.$$

Теорема. Если производная функции равна нулю на некотором промежутке, то функция является постоянной на этом промежутке.

Теорема. Если две функции имеют равные производные на некотором промежутке, то они на этом промежутке отличаются друг от друга на некоторое постоянное слагаемое.

Правила Лопиталя и их применение для раскрытия неопределенностей

Правило Лопиталя.

Пусть функции $y = f(x)$ и $y = g(x)$ удовлетворяют следующим условиям:

1) эти функции дифференцируемы в окрестности точки a, кроме, может быть, самой точки a;
2) $g(x) \neq 0$ и $g'(x) \neq 0$ в этой окрестности;
3) $\lim_{x \to a} f(x) = 0, \lim_{x \to a} f(x) = 0$,
4) $\lim_{x \to a} \frac{f'(x)}{g'(x)}$ существует конечный или бесконечный.

Тогда существует и

$$\lim_{x \to a} \frac{f(x)}{g(x)}$$

причем

$$\lim_{x \to a} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \to a} \frac{f'(x)}{g'(x)}$$

.

Таким образом, вычисление предела отношения двух функций может быть заменено при выполнении условий теоремы вычислением предела отношения производных этих функций.

Замечание. Правило Лопиталя распространяется на случай неопределенности $\left[\frac{\infty}{\infty}\right]$ при $x \to \infty$.

Замечание. Правило Лопиталя распространяется и на случай $x \to \infty$. Чтобы убедится в этом, достаточно сделать замену $x = \frac{1}{t}$ и воспользоваться результатом выше приведенной теоремы.

Замечание. Иногда правило Лопиталя приходится применять несколько раз (делать несколько шагов), если от неопределенности не удается избавиться на первом шаге. Однако условия теоремы на каждом шаге должны оставаться справедливыми.

Замечание. Хотя правило Лопиталя работает только с неопределенностями $\left[\frac{0}{0}\right]$ и $\left[\frac{\infty}{\infty}\right]$, неопределенности других типов могут быть раскрыты с его помощью, если путем преобразований удастся привести изучаемую неопределенность к указанному типу.

Формула Тейлора с остаточным членом в форме Пеано и Лагранжа. Формула Маклорена. Основные разложения по формуле Маклорена. Приложения формулы Тейлора

Пусть существует $f^{(n)}(x_0)$, тогда в некоторой окрестности $U(x_0)$ можно написать равенство:$_{T}$ огда в некоторой окрестности $U(x_0)$ можно написать равенство:огда в некоторой окрестности $U(x_0)$ можно написать равенство:

$$f(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}(x - x_0)^k + r_n(f,x) = P_n(f,x) + r_n(f,x) \qquad (4.7.1)$$

которое называется **формулой Тейлора** функции f в точке x_0, где $P_n(f,x)$ называется **многочленом Тейлора**, а $r_n(f,x)$ – **остаточным членом** Тейлора (после n-го члена).

Теорема (Формула Тейлора с остаточным членом в форме Лагранжа**).** Пусть $x > x_0$ $(x < x_0), n \in \mathbb{N}_0, f^{(n)}$ непрерывна на отрезке $[x_0, x]([x, x_0]), \exists\ f^{(n+1)}$ на интервале $(x_0, x)((x, x_0))$. Тогда справедлива формула (4.7.1), в которой

$$r_n(f,x) = \frac{f^{(n+1)}(x_0 + \theta(x - x_0))}{(n+1)!}(x - x_0)^{n+1} = \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}(x - x_0)^{n+1}$$

где $0 < \theta < 1$.

Теорема (Формула Тейлора с остаточным членом в форме Пеано). Пусть $n \in \mathbb{N}$ и $\exists\ f^{(n)}(x_0)$. Тогда справедлива формула (4.7.1), в которой $r_n(f,x) = o((x - x_0)^n)$ при $x \to x_0$.

Формула Маклорена

При $x_0 = 0$ получаем частный случай формулы Тейлора – **формулу Маклорена:**

$$f(x) = f(0) + \frac{f'(0)}{1!}x + \frac{f''(0)}{2!}x^2 + \cdots + \frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n + \frac{f^{(n+1)}(c)}{(n+1)!}x^{n+1},$$

где c находится между 0 и x $(c = \theta x, 0 < \theta < 1)$.

Признаки возрастания и убывания функции. Необходимое и достаточные условия существования экстремума. Наибольшее и наименьшее значения функции, непрерывной на отрезке. Выпуклость и точки перегиба. Достаточное условие выпуклости. Необходимое условие перегиба. Достаточные условия перегиба. Вертикальные и наклонные асимптоты графика функции

Определение. Функция $y = f(x)$ возрастает на интервале X, если для любых $x_1 \in X$ и $x_2 \in X$, $x_2 > x_1$ выполняется неравенство $f(x_2) > f(x_1)$.

Другими словами – большему значению аргумента соответствует большее значение функции.

Определение. Функция $y = f(x)$ убывает на интервале X, если для любых $x_1 \in X$ и $x_2 \in X$, $x_2 > x_1$ выполняется неравенство $f(x_2) < f(x_1)$.

Другими словами – большему значению аргумента соответствует меньшее значение функции.

Замечание. Если функция определена и непрерывна в концах интервала возрастания или убывания (a, b), то есть при $x = a$ и $x = b$, то эти точки включаются в промежуток возрастания или убывания. Это не противоречит определениям возрастающей и убывающей функции на промежутке X.

К примеру, из свойств основных элементарных функций мы знаем, что $y = sinx$ определена и непрерывна для всех действительных значений аргумента. Поэтому, из возрастания функции синуса на интервале $\left(-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right)$ мы можем утверждать о возрастании на отрезке $\left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right]$.

Теорема (достаточные условия возрастания и убывания функции). Если производная функции $y = f(x)$ положительна (отрицательна) для любого x из интервала X, то функция возрастает (убывает) на X.

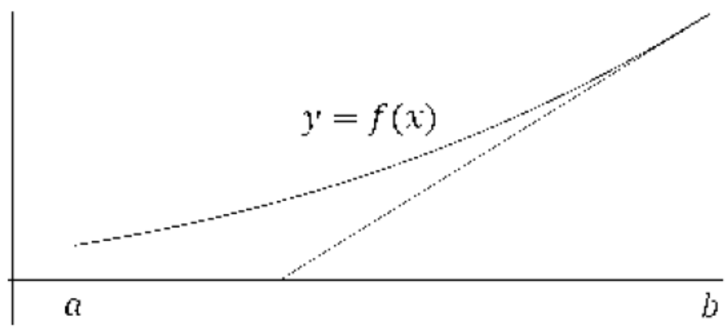


Рисунок 4.3.5

Таким образом, чтобы определить промежутки возрастания и убывания функции необходимо:

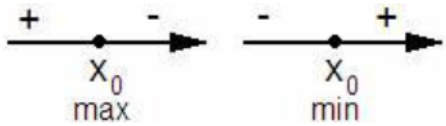
- найти область определения функции;
- найти производную функции;

- решить неравенства $f'(x) > 0$ и $f'(x) < 0$ на области определения;
- к полученным промежуткам добавить граничные точки, в которых функция определена и непрерывна.

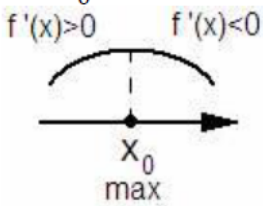
Значения аргумента x, при которых производная функции обращается в 0 или не существует, называют критическими точками функции.

Теорема (первый достаточный признак экстремума). Пусть $f(x)$ непрерывна в некоторой окрестности точки x_0 и имеет в этой окрестности производную всюду, кроме, быть может самой точки, тогда, если при $x < x_0$ $f'(x) > 0$ и при $x > x_0$ $f'(x) < 0$. Тогда x_0 – точка максимума.

Если при $x < x_0$ $f'(x) < 0$ и при $x > x_0$ $f'(x) > 0$, то x_0 – точка минимума.



Доказательство. Пусть при $x < x_0$ $f'(x) > 0$, значит слева от точки x_0 находится интервал возрастания функции $f(x)$, прилежащий к точке x_0 и $x > x_0$ $f'(x) < 0$, значит справа от точки x_0 находится интервал убывания функции $f(x)$, прилежащий к точке x_0.



Алгоритм нахождения точек экстремума по первому признаку экстремума функции.

- Находим область определения функции.
- Находим производную функции на области определения.
- Определяем нули числителя, нули знаменателя производной и точки области определения, в которых производная не существует (все перечисленные точки называют *точками возможного экстремума*, проходя через эти точки, производная как раз может изменять свой знак).
- Эти точки разбивают область определения функции на промежутки, в которых производная сохраняет знак. Определяем знаки производной на каждом из интервалов (например, вычисляя значение производной функции в любой точке отдельно взятого интервала).
- Выбираем точки, в которых функция непрерывна и, проходя через которые, производная меняет знак – они и являются точками экстремума.

Теорема (второй достаточный признак экстремума функции).

Пусть $f'(x_0) = 0$,

- если $f''(x_0) > 0$, то x_0 – точка минимума;
- если $f''(x_0) < 0$, то x_0 – точка максимума.

Определение. Дифференцируемая функция называется **выпуклой вниз** на интервале X, если ее график расположен не ниже касательной к нему в любой точке интервала X.

Определение. Дифференцируемая функция называется **выпуклой вверх** на интервале X, если ее график расположен не выше касательной к нему в любой точке интервала X.

Выпуклую вверх функцию часто называют **выпуклой**, а выпуклую вниз – **вогнутой**.

Определение. Точка $M(x_0, f(x_0))$называется **точкой перегиба графика функции** $y = f(x)$, если в данной точке существует касательная к графику функции (она может быть параллельна оси Oy) и существует такая окрестность точки x_0, в пределах которой слева и справа от точки M график функции имеет разные направления выпуклости.

Другими словами, точка M называется точкой перегиба графика функции, если в этой точке существует касательная и график функции меняет направление выпуклости, проходя через нее.

Теорема (необходимое условие перегиба). Пусть график функции $y = f(x)$ имеет перегиб в точке $M(x_0, f(x_0))$ и имеет при $x = x_0$ непрерывную вторую производную, тогда выполняется равенство $f''(x_0) = 0$.

Из этого условия следует, что абсциссы точек перегиба следует искать среди тех, в которых вторая производная функции обращается в ноль. Но это условие не является достаточным, то есть не все значения x_0, в которых вторая производная равна нулю, являются абсциссами точек перегиба.

Теорема (Первое достаточное условие перегиба). Пусть функция $y=f(x)$ непрерывна в точке M $(x_o; f(x_o))$, имеет в ней касательную (можно вертикальную) и эта функция имеет вторую производную в некоторой окрестности точки x_0. Тогда, если в пределах этой окрестности слева и справа от x_0, вторая производная имеет разные знаки, то M $(x_o; f(x_o))$ является точкой перегиба графика функции.

Алгоритм нахождения точек перегиба функции. Находим все абсциссы x_o возможных точек перегиба графика функции ($f''(x_o) = 0$ или $\lim\limits_{x\to x_0-0} f'(x) = \infty$ и $\lim\limits_{x\to x_0+0} f'(x) = \infty$) и выясняем, проходя через какие x_0 вторая производная меняет знак. Такие значения и будут абсциссами точек перегиба, а соответствующие им точки M $(x_o; f(x_o))$ будут точками перегиба графика функции.

Определение. Прямая $x = x_o$ называется **вертикальной асимптотой** графика функции $y = f(x)$, если хотя бы одно из предельных значений

$\lim\limits_{x\to x_0-0} f(x)$

или

$\lim\limits_{x\to x_0+0} f(x)$

равно $+\infty$ или $-\infty$.

Замечание. Прямая $x = x_o$ не может быть вертикальной асимптотой, если функция непрерывна в точке $x = x_o$. Поэтому вертикальные асимптоты следует искать в точках разрыва функции.

Определение. Прямая $y = y_o$ называется **горизонтальной асимптотой** графика функции $y = f(x)$, если хотя бы одно из предельных значений

$$\lim_{x\to+\infty} f(x)$$

или

$$\lim_{x\to-\infty} f(x)$$

равно y_o.

Замечание. График функции может иметь только правую горизонтальную асимптоту или только левую.

Определение. Прямая $y = kx+b$ называется **наклонной асимптотой** графика функции $y = f(x)$, если

$$\lim_{x\to\infty} [f(x) - kx - b] = 0\,.$$

Теорема (о условиях существования наклонной асимптоты). Если для функции $y = f(x)$ существуют пределы

$$\lim_{x\to\infty} \frac{f(x)}{x} = k$$

и

$$\lim_{x\to\infty} [f(x) - kx] = b,$$

то функция имеет наклонную асимптоту $y = kx + b$ при $x \to \infty$.

Замечание. Горизонтальная асимптота является частным случаем наклонной при $k = 0$.

Замечание. Если при нахождении горизонтальной асимптоты получается, что

$\lim_{x\to\infty} f(x) = 0$, то функция может иметь наклонную асимптоту.

Замечание. Кривая $y = f(x)$ может пересекать свою асимптоту, причем неоднократно.

Общая схема исследования поведения функции и построения графика функции

После того как мы обсудили многие аспекты поведения функции и способы их исследования, сформулируем общую схему исследования функции. Эта схема даст нам практический способ построения графика функции, отражающего основные черты её поведения.

Пусть дана функция $f(x)$. Для её исследования нужно:

1) Найти её область определения $D(f)$. Если это не слишком сложно, то полезно найти также область значений $E(f)$ (Однако, во многих случаях, вопрос нахождения $E(f)$ откладывается до нахождения экстремумов функции).

2) Выяснить общие свойства функции, которые помогут в определении её поведения: не является ли функция чётной либо нечётной (быть может, после сдвига влево или вправо по оси Ox), не является ли она периодической.

3) Выяснить, как ведёт себя функция при приближении аргумента x к граничным точкам области определения $D(f)$, если такие граничные точки имеются. При этом могут обнаружиться вертикальные асимптоты. Если функция имеет такие точки разрыва, в которых она определена, то эти точки тоже проверить на наличие вертикальных асимптот функции. Поясним сказанное примером:

$$\text{Пусть } f(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{x^2}, \text{при } x \neq 0, \\ 0, \text{при } x = 0, \end{cases}$$

эта функция определена на всей числовой оси, однако 0 является точкой разрыва функции: при $x \to 0$ функция стремится к $+\infty$. Значит, вертикальная прямая $x \to 0$ служит вертикальной асимптотой функции, хотя функция и определена в точке $x=0$.

4) Если область определения $D(f)$ включает в себя лучи вида $(a;\ +\infty)$ или $(-\infty;\ b)$, то можно попытаться найти наклонные асимптоты (или горизонтальные асимптоты) при $x \to +\infty$ или $x \to -\infty$ соответственно.

5) Найти точку пересечения графика с осью Oy (если $0 \in D(f)$). Для этого нужно вычислить значение $f(0)$. Найти также точки пересечения графика с осью Ox, для чего найти корни уравнения $f(x)=0$ (или убедиться в отсутствии корней). Уравнение $f(x)=0$ часто удаётся решить лишь приближённо, но уже отделение корней помогает лучше уяснить строение графика. Далее, нужно определить знак функции на промежутках между корнями и точками разрыва.

6) Найти интервалы монотонности функции $f(x)$ (то есть интервалы возрастания и убывания). Это делается с помощью исследования знака производной $f'(x)$.

На стыках интервалов монотонности найти точки локального экстремума; вычислить значение функции в этих точках. Если функция имеет критические точки, не являющиеся точками локального экстремума, то полезно вычислить значение функции и в этих точках.

7) Найти интервалы выпуклости и вогнутости функции. Это делается с помощью исследования знака второй производной $f''(x)$. Найти точки перегиба на стыках интервалов выпуклости и вогнутости. Вычислить значение функции в точках перегиба. Если функция имеет другие точки непрерывности (кроме точек перегиба), в которых вторая производная равна 0 либо не существует, то в этих точках также полезно вычислить значение функции.

8) В некоторых случаях бывает нужно найти характерные точки графика, которые не были упомянуты в предыдущих пунктах. Например, если функция имеет наклонную асимптоту, то можно попытаться выяснить, нет ли точек пересечения графика с этой асимптотой.

После выяснения свойств функции, упомянутых в пунктах 1–8, и нахождения опорных точек (точек пересечения с осями координат, точек графика, соответствующих точкам локального экстремума, точкам перегиба и проч.) мы можем достаточно точно построить график.

4.4. Функции многих переменных

Определение. Упорядоченная совокупность из n действительных чисел $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ называется n-мерной точкой.

Определение. Расстоянием между двумя n-мерными точками $\bar{x}(x_1, \ldots, x_n)$ и $\bar{y}(y_1, \ldots, y_n)$ называется величина

$$d = \sqrt{(x_1 - y_1)^2 + (x_2 - y_2)^2 + \cdots + (x_n - y_n)^2}.$$

Определение. Совокупность всех n–мерных точек с введенной на ней метрикой $d = \sqrt{(x_1 - y_1)^2 + (x_2 - y_2)^2 + \cdots + (x_n - y_n)^2}$ называется n–мерным евклидовым (метрическим) пространством R^n.

Определение. Множество G называется связным, если любые его две точки P_1 и P_2 можно соединить непрерывной кривой, принадлежащей G.

Определение. Множество действительных чисел называется ограниченным, если существует такое число $M > 0$, что для любого элемента x данного множества справедливо неравенство $|x| \leq M$.

Определение. Множество действительных чисел называется ограниченным сверху (снизу), если существует такое число P, что для любого элемента x данного множества имеет место неравенство $x \leq P$ (соответственно $x \geq P$).

Определение. Множество точек в n-мерном пространстве называется ограниченным, если в этом пространстве существует сфера, целиком содержащая это множество.

Пусть даны множества $D \subset R^n$ и $I \subset R$.

Определение. Если каждой точке $\bar{x}(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ множества D ставится в соответствие единственное число y из I, то говорят, что задана функция n переменных $y = f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$.

Множество D называется областью определения функции $D(\text{y}) = D$, множество I называется множеством значений функции $I(\text{y}) = I$.

Если зафиксировать любые n-1 переменные, то функция многих переменных превращается в функцию одной переменной. $x_2 = c_2, x_3 = c_3, \ldots, x_n = c_n$; $y = f(c_1, c_2, \ldots, c_m)$ – функция одной переменной x_1.

Пример. $z(x, y) = 8xy^2 - 5y^3$ – функция двух переменных,

$u(x, y, z) = sin(xy) - cos(yz)$ – функция трех переменных.

Определение. Графиком функции двух переменных $z=f(x,y)$ называется множество точек (x, y, z) трехмерного пространства, таких, что $(x,y) \in D(z)$ и $z = f(x,y)$. Любую точку графика можно записать в виде $(x, y, f(x, y))$ (Рис 4.4.1).

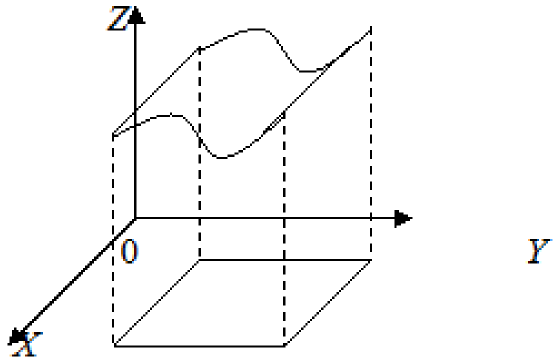


Рисунок 4.4.1. График функции

Определение. Графиком функции n переменных называется n-мерная гиперповерхность в пространстве R^{n+1}, точки которой имеют вид $(x_1, x_2, \ldots, x_n, f(x_1, x_2, \ldots, x_n))$.

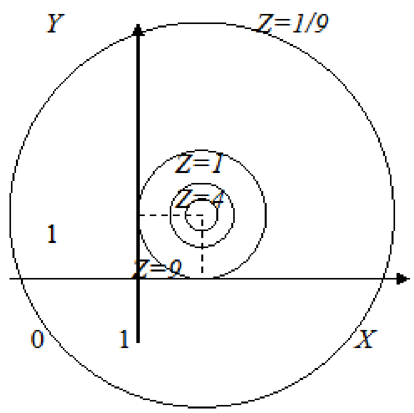
Определение. Линией уровня функции двух переменных называется линия на плоскости Oxy, принадлежащая $D(z)$, в каждой точке которой функция принимает одно и то же значение.

Уравнение линии уровня: $f(x,y) = c$, где c – произвольное число. На данной линии уровня значение функции $z = c$. Линий уровня бесконечно много, и через каждую точку области определения можно провести линию уровня.

Пример. Найти линии уровня функции:

$$z(x,y) = \frac{1}{(x-1)^2 + (y-1)^2}$$

$D(z) = R^2 \backslash \{(1,1)\}$.



$c = 1, \frac{1}{(x-1)^2+(y-1)^2} = 1, z = 1.$

$c = 4, \frac{1}{(x-1)^2+(y-1)^2} = 4, z = 4.$

$c = 9, \frac{1}{(x-1)^2+(y-1)^2} = 9, z = 9.$

Используя линии уровня, можно построить график функции (Рис 4.4.2).

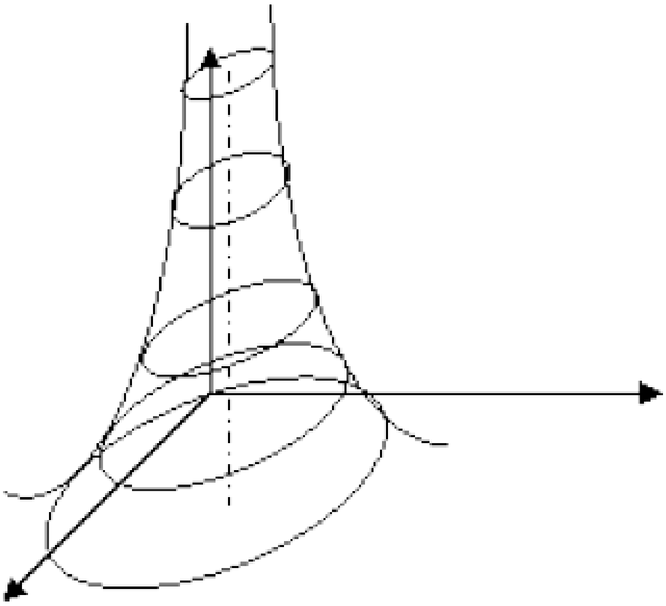


Рисунок 4.4.2. График функции

Определение. Поверхностью уровня функции n переменных $y = f(x_1, x_2, \dots, x_n)$ называется гиперповерхность в пространстве R^n, входящая в $D(y)$, в каждой точке которой значение функции одно и то же. Уравнение поверхности уровня $f(x_1, x_2, \dots, x_n) = c$. На поверхности уровня значение функции постоянно: $y = c$.

Предел функции двух переменных. Непрерывность.

δ–окрестностью точки $P_0(x_0, y_0)$ называется внутренность круга радиуса δ с центром в этой точке (Рис 4.4.3).

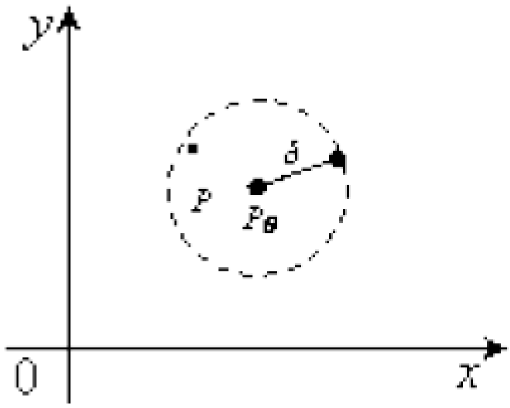


Рисунок 4.4.3. δ–окрестностью точки

Иначе говоря, это множество всех точек $P\,(x, y)$, для которых выполняется неравенство $\sqrt{(x - x_0)^2 - (y - y_0)^2} < \delta$, то есть расстояние $p = PP_0 < \delta$.

Пусть функция $z = f\,(x, y)$ определена в некоторой области G плоскости Oxy и точка $P_0(x_0, y_0) \in$ G.

Теорема. Число A называется **пределом функции** $z = f(x, y)$ при стремлении точки $P(x, y)$ к точке $P_0(x_0, y_0)$, если для любого числа $\xi > 0$ найдется такая δ-окрестность точки P_0, что для любой точки P из этой окрестности, кроме, может быть, самой точки P_0, имеет место неравенство

$$|f(P) - A| < \delta$$

Обозначают: $\lim\limits_{P \to P_0} f(P) = A$

Для функции трех переменных δ-*окрестностью точки* $P_0(x_0, y_0, z_0)$ является множество всех внутренних точек шара радиуса δ с центром в точке P_0, определение предела сохраняется.

Функция нескольких переменных называется *бесконечно малой*, если ее предел равен нулю.

Правила предельного перехода, установленные для функции одной переменной, остаются справедливыми.

Функция $z = f(P)$ называется **непрерывной в точке** P_0, если:

1) функция $f(P)$ определена как в самой точке P_0, так и в некоторой ее окрестности;

2) существует предел

$$\lim_{P \to P_0} f(P)$$

1) этот предел равен значению функции в предельной точке:

$$\lim_{P \to P_0} f(P) = f(P_0)$$

Условия 2) и 3) можно заменить равносильным требованием: бесконечно малому расстоянию $p = PP_0$ соответствует бесконечно малое приращение функции $\Delta z = f(P) - f(P_0)$.

Справедлива теорема:

Теорема. Если функции нескольких переменных $f_1(P)$ и $f_2(P)$ непрерывны в точке P_o, то в той же точке непрерывны, и их сумма $f_1(P) + f_2(P)$, разность $f_1(P) - f_2(P)$, произведение $f_1(P) \cdot f_2(P)$ и частное $f_1(P) : f_2(P)$ последнее – если $f_2(P_o) \neq 0$).

Определение. Точка P_0 называется *точкой разрыва* функции $z = f(P)$, если для нее не выполняется хотя бы одно из трех условий в определении непрерывности.

Точки разрыва данной функции могут располагаться как отдельно (*изолированные точки разрыва*), так и заполнять целые линии (*линии разрыва*).

Например, функция

$$z = \frac{1}{x^2 + y^2}$$

имеет единственную точку разрыва O(0;0), а функция

$$z = \frac{1}{x + y - 1}$$

это множество точек разрыва, то есть линию разрыва $x + y - 1 = 0$.

Определение. Областью (открытой областью) называется множество точек плоскости, обладающее свойствами:

1) Каждая точка области принадлежит ей вместе с некоторой окрестностью (свойство открытости);

2) всякие две точки области можно соединить непрерывной линией, целиком лежащей в этой области (свойство связности).

Определение. Точка P_0 называется **граничной точкой** области G, если любая окрестность этой точки содержит как точки области G, так и точки, ей не принадлежащие.

Определение. Множество всех граничных точек области называется ее **границей**.

Определение. Если к открытой области присоединить ее границу, то полученное множество точек называется **замкнутой областью**.

Определение. Область называется **ограниченной**, если можно подобрать круг, полностью ее покрывающий. В противном случае область называется **неограниченной**.

Определение. Функция $z = f(P)$ называется **непрерывной** *в области* G, если она непрерывна в каждой точке этой области.

Имеет место теорема:

Если функция $z = f(P)$ непрерывна в ограниченной замкнутой области, то она в этой области:

1) ограничена: $|f(P)| \leq N$;

2) принимает наименьшее и наибольшее значения (соответственно m и M);

3) принимает хотя бы в одной точке области любое численное значение, заключенное между m и M.

Пример.

Исследовать функцию на непрерывность. Определить характер разрывов функции, если они существуют. Выполнить чертёж.

$$y = f(x) = \frac{x^3 - x^2}{x - 1}$$

Решение:

1) Под прицел попадает единственная точка $x = 1$, в которой функция не определена.

2) Вычислим односторонние пределы:

$$\lim_{x\to 1-0} \frac{x^3 - x^2}{x-1} = \frac{0}{0} = \lim_{x\to 1-0} \frac{x^2(x-1)}{x-1} = \lim_{x\to 1-0}(x^2) = 1$$

$$\lim_{x\to 1+0} \frac{x^3 - x^2}{x-1} = \frac{0}{0} = \lim_{x\to 1+0} \frac{x^2(x-1)}{x-1} = \lim_{x\to 1+0}(x^2) = 1$$

Односторонние пределы конечны и равны.

Таким образом, в точке $x = 1$ функция терпит устранимый разрыв.

Хочется провести упрощение

$$f(x) = \frac{x^3 + x^2}{x-1} = \frac{x^2(x-1)}{x-1} = x^2$$

и вроде бы получается обычная парабола. Но исходная функция не определена в точке $x = 1$, поэтому обязательна следующая оговорка:

$$f(x) = x^2, \text{если } x \neq 1$$

Выполним чертёж (Рис. 4.4.4).

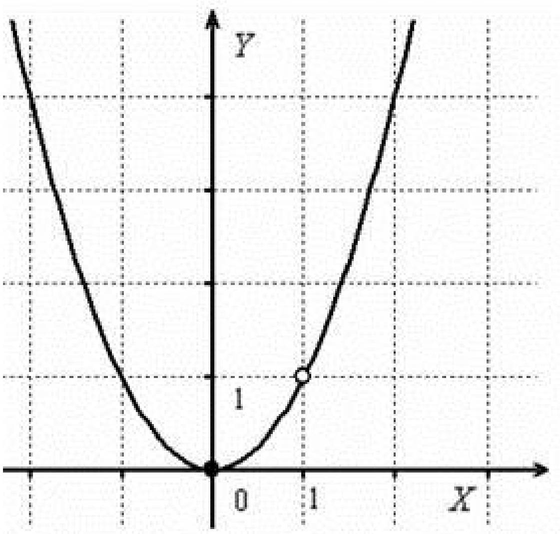


Рисунок 4.4.4. Пример

Функция непрерывна на всей числовой прямой кроме точки $x = 1$, в которой она терпит устранимый разрыв.

Частные производные и дифференцируемость ФМП. Необходимое и достаточное условия дифференцируемости. Полный дифференциал и его связь с частными производными. Дифференцирование сложных функций. Инвариантность формы полного дифференциала

Пусть функция $z = f(x, y)$ определена в области D и $(x_0, y_0) \in D$. Тогда при малых $|\Delta x|$ определено ее частное приращение по

$$x\colon \Delta_x z = f(x_0 + \Delta x, y_0) - f(x_0, y_0)$$

Определение. Частной производной функции $f(x, y)$ по переменной x в точке (x_0, y_0) называют предел

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta_x z}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x_0 + \Delta x, y_0) - f(x_0, y_0)}{\Delta x}$$

если он существует.

Частную производную по x обозначают одним из следующих символов:

$$z'_x(x_0, y_0), f'_x(x_0, y_0), \frac{\partial z(x_0, y_0)}{\partial x}, \frac{\partial f(x_0, y_0)}{\partial x}$$

Аналогично определяется частная производная по y и вводятся ее обозначения.

Легко видеть, что частная производная – это производная функции одной переменной, когда значение другой переменной фиксировано. Поэтому частные производные вычисляются по тем же правилам, что и вычисление производных функций одной переменной.

Пример. Найти частные производные функции $z = e^{x^2 y}$.

Имеем:

$$\frac{\partial z}{\partial x} = e^{x^2 y}(x^2 y)'_x = 2xye^{x^2 y}$$

$$\frac{\partial z}{\partial y} = e^{x^2 y}(x^2 y)'_x = x^2 e^{x^2 y}$$

Пусть $f\colon D(\subset R^2) \to R$. Составим полное приращение функции $z = f(x, y)$ в точке $(x, y) \in D$:

$$\Delta z = f(x + \Delta x + \Delta y) - f(x, y)$$

Определение. Функция $z = f(x,y)$ называется **дифференцируемой** в точке (x, y), если ее полное приращение в этой точке можно представить в виде:

$$\Delta z = A\Delta x + B\Delta y + o(\rho) \qquad (4.4.1)$$

где A и B – некоторые числа,

$$\frac{o(\rho)}{\rho} \to 0$$

при $\rho \to 0$,

$$\rho = \sqrt{(\Delta x)^2 + (\Delta y)^2}\,.$$

Другими словами, функция $z = f(x, y)$ дифференцируема в точке (x, y), если ее приращение Δz эквивалентно функции $A\Delta x + B\Delta y$: $\Delta z \sim A\Delta x + B\Delta y$ при $\rho \to 0$. Выражение $A\Delta x + B\Delta y$ в этом случае представляет собой главную часть приращения Δz, линейно зависящую от Δx и Δy.

Определение. Если функция $z = f(x, y)$ дифференцируема в точке (x, y), то главную линейную часть $A\Delta x + B\Delta y$ ее приращения Δz называют **полным дифференциалом** в точке (x, y) и обозначают в виде $dz = A\Delta x + B\Delta y$.

Для независимых переменных x и y полагают $\Delta x = dx$ и $\Delta y = dy$. Поэтому полный дифференциал записывают также в виде $dz = Adx + Bdy$.

Формула (7.2.1) показывает, что, как и в случае функции одной переменной, верна.

Теорема. Если функция $f(x, y)$ дифференцируема в точке (x, y), то она непрерывна в этой точке.

Обратное утверждение неверно, т.е. непрерывность является только необходимым, но не достаточным условием дифференцируемости функции. Покажем это.

Пример. Найдем частные производные функции $z = \sqrt{x^2 + y^2}$:

$$\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}}, \frac{\partial z}{\partial y} = \frac{y}{\sqrt{x^2 + y^2}}$$

Полученные формулы теряют смысл в точке $O(0; 0)$.

Можно показать иначе, что функция $f(x, y) = \sqrt{x^2 + y^2}$ не имеет частных производных в точке $O(0; 0)$. В самом деле, $f(x, 0) = \sqrt{x^2} = |x|$. Эта функция одной переменной x, как известно, не имеет производной в точке $x = 0$. Последнее и означает, что частная производная $\frac{\partial z}{\partial x}$ в точке O не существует. Аналогично, не существует частная производная $\frac{\partial z}{\partial y}$. При этом функция $z = \sqrt{x^2 + y^2}$, очевидно, непрерывна в точке $O(0; 0)$.

Итак, мы показали, что непрерывная функция может не иметь частных производных. Осталось установить связь между дифференцируемостью и существованием частных производных.

Определение. Связь между дифференцируемостью и существованием частных производных. Напомним, что для функции одной переменной $y = f(x)$ существование производной в точке является необходимым и достаточным условием дифференцируемости функции в этой точке. Для функции многих переменных дифференцируемость и существование частных производных не являются эквивалентными свойствами функции.

Теорема (необходимое условие дифференцируемости). Если функция $z = f(x, y)$ дифференцируема в точке $M(x, y)$, то она имеет в точке M частные производные по каждой переменной x и y.

При этом $\frac{\partial z}{\partial x}(M) = a, \frac{\partial z}{\partial y}(M) = B$, где A и B – числа из равенства (4.4.1).

Поэтому условие дифференцируемости (7.2.1) можно записать в виде:

$$\Delta z = \frac{\partial z}{\partial x}\Delta x + \frac{\partial z}{\partial y}\Delta y + o(\rho)$$

а полный дифференциал функции – в виде:

$$dz = \frac{\partial z}{\partial x}dx + \frac{\partial z}{\partial y}dy$$

Обратная теорема не верна, т.е. существование частных производных не является достаточным условием дифференцируемости функции.

Теорема (достаточное условие дифференцируемости). Если функция $z = f(x, y)$ имеет непрерывные частные производные f'_x и f'_yв точке $M(x, y)$, то она дифференцируема в точке M (и ее полный дифференциал в этой точке выражается формулой $dz = f'_x dx + f'_y\, dy$).

Обратная теорема не верна, т.е. непрерывность частных производных является только достаточным, но не необходимым условием дифференцируемости функции.

Понятие неявной функции, определённой одним уравнением, её существование и дифференцирование

Определение. Функция $w = f(x_1, x_2, \dots, x_n)$ называется заданной неявно в окрестности точки $(x_1^0, x_2^0, \dots, x_n^0, w_0)$, если задано уравнение $F(x_1, x_2, \dots, x_n, w) = 0$ и если:

- $F(x_1^0, x_2^0, \dots, x_n^0, w_0) = 0$;
- $\forall M(x_1, x_2, \dots, x_n) \epsilon U_8(M_0)$ $\exists$ единственное $w \epsilon U_8(w_0)$: $F(x_1, x_2, \dots, x_n) = 0$

В частности, уравнение $F(x, y, z) = 0$ в окрестностях тех точек (x_o, y_o, z_o), для которых уравнение $F(x_0, y_0, z_0) = 0$, имеет хотя бы один корень z_o, задает неявную функцию $z = f(x, y)$, значения которой равны корням этого уравнения.

При этом уравнение $F(x, y, z) = 0$ иногда может быть разрешено относительно z, а иногда нет. Не следует путать вопрос о существовании неявной функции с вопросом получения ее в виде явной зависимости. Следующая теорема дает условия существования, единственности и дифференцируемости неявной функции.

Теорема. Если функция $F(x_1, x_2, \dots, x_n, w)$:

- непрерывна в окрестности точки $(x_1^0, x_2^0, \dots, x_n^0, w_0)$;
- имеет в этой окрестности непрерывные частные производные по всем переменным;
- $F(x_1^0, x_2^0, \dots, x_n^0, w_0) = 0$;
- $F'_w(x_1^0, x_2^0, \dots, x_n^0, w_0) \neq 0$;

то уравнение $F(x_1, x_2, \dots, x_n, w) = 0$ задает в окрестности точки $(x_1^0, x_2^0, \dots, x_n^0, w_0)$ однозначную дифференцируемую функцию $w = f(x_1, x_2, \dots, x_n)$, для которой справедливо $w_0 = F(x_1^0, x_2^0, \dots, x_n^0)$.

Доказательство. В силу сложности и громоздкости доказательства этой теоремы, рассмотрим ее доказательство только для функции двух переменных $y = f(x)$, заданной неявной зависимостью $F(x, y) = 0$, где функция $F(x, y)$ непрерывна и дифференцируема в некоторой δ-окрестности точки (x_o, y_o) и $F'_y(x_o, y_o) \neq 0$. Если точка $(x_0 + \Delta x, y_0 \Delta y)$ принадлежит этой окрестности, то $F(x_o, y_o) = 0$ и $F(x_o+\Delta x, y_o+\Delta y) = 0$, тогда и $F(x_o+\Delta x, y_o+\Delta y) - F(x_o, y_o) = 0$. Для левой части последнего равенства можно использовать теорему Лагранжа.

$$
\begin{aligned}
F(x_0 + \Delta x, y_0 + \Delta y) - F(x_0, y_0)& \\
&= [F(x_0 + \Delta x, y_0 + \Delta y) - F(x_0 + \Delta x, y_0)] \\
&+ [F(x_0 + \Delta x, y_0) - F(x_0, y_0)] \\
&= \frac{\partial F}{\partial y}(x_0 + \Delta x, y_0) \cdot \Delta y + \frac{\partial F}{\partial x}(x_0, y_0) \cdot \Delta x = 0
\end{aligned}
$$

Из последнего равенства следует, что

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = -\frac{\frac{\partial F}{\partial x}(x_0 + \Delta x, y_0)}{\frac{\partial F}{\partial y}(x_0, y_0)}$$

Переходя в нем к пределу при $\Delta x \to 0$ и учитывая, что частные производные непрерывны, получим:

$$f'(x_0) = \lim_{\Delta x \to 0}\left(-\frac{\frac{\partial F}{\partial x}(x_0, y_0)}{\frac{\partial F}{\partial y}(x_0 + \Delta x, y_0)}\right) = -\frac{\frac{\partial F}{\partial x}(x_0, y_0)}{\frac{\partial F}{\partial y}(x_0, y_0)}$$

Замечание. Мы не только доказали дифференцируемость функции $y = f(x)$, но и получили формулу для вычисления ее производной.

$$y'_x = -\frac{\frac{\partial F}{\partial x}}{\frac{\partial F}{\partial y}}$$

Аналогично доказывается, что функция двух переменных $z = f(x, y)$ заданная уравнением $F(x, y, z) = 0$, где $F(x, y, z)$ – дифференцируемая по всем переменным функция, дифференцируема в точках, в которых $\frac{\partial F}{\partial z} \neq 0$ и её частные производные вычисляются по формулам:

$$\frac{\partial z}{\partial x} = -\frac{\frac{\partial F}{\partial x}}{\frac{\partial F}{\partial z}}, \frac{\partial z}{\partial y} = -\frac{\frac{\partial F}{\partial y}}{\frac{\partial F}{\partial z}}.$$

Производная по направлению. Градиент функции и его смысл. Геометрический смысл дифференциала функции двух переменных. Касательная плоскость и нормаль к поверхности

Рассмотрим функцию двух переменных $n = 2$; $z = f(x, y)$. Под направлением мы будем понимать любой вектор $\vec{l}$ на плоскости (Рис. 4.4.5).

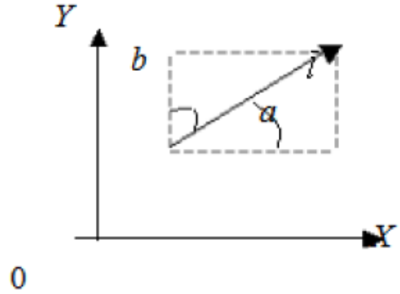


Рисунок 4.4.5. Вектор на плоскости

Определение. Направляющими косинусами данного направления $\vec{l}$ называются косинусы углов, которые данное направление образуют с положительными направлениями осей координат. Направляющие косинусы данного направления обозначаются $cos a, cos\beta$.

Направляющие косинусы любого направления в любом пространстве обладают следующим свойством: сумма квадратов направляющих косинусов равна единице $cos^2 a + cos^2\beta + \cdots = 1$.

На плоскости имеем:

$$\cos^2\alpha + \cos^2\beta = \cos^2\alpha + \cos^2\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right) = \cos^2\alpha + \sin^2\alpha = 1$$

$$\cos^2\alpha + \cos^2\beta = 1$$

Если рассмотреть вектор $\vec{l_0}$, координатами которого являются направляющие косинусы данного направления, то этот вектор сонаправлен с вектором $\vec{l}$ и имеет единичную длину.

Пусть даны точка $M_0(x_0, y_0)$ и направление $\vec{l}$. Переместим точку M_0 вдоль направления $\vec{l}$ на величину Δl в точку M_1. Тогда функция и аргумент получат соответствующие приращения (Рис 4.4.6).

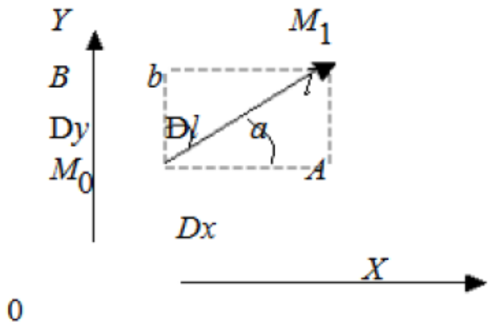


Рисунок 4.4.6. Приращение аргумента

Функция получит приращение, которое называется приращением функции в данном направлении:

$$\Delta_l z = f(x_0 + \Delta x, y_0 + \Delta y) - f(x_0, y_0)$$

Из треугольника $M_0\, M_1\, A$: $\Delta x = \Delta l \cos\alpha$.

Из треугольника $M_0\, M_1\, B$: $\Delta y = \Delta l \cos\beta$.

$$\Delta_l z = f(x_0 + \Delta l \cos\alpha, y_0 + \Delta l \cos\beta) - f(x_0, y_0)$$

Определение. Предел отношения приращения функции в данном направлении к приращению направления, когда приращение направления стремится к нулю, называется производной функции в данном направлении (если этот предел существует и конечен);

$$\frac{\partial z}{\partial l} = \lim_{\Delta l \to 0} \frac{f(x_0 + \Delta l\cos\alpha, y_0 + \Delta l\cos\beta) - f(x_0, y_0)}{\Delta l}$$

Если направление $\vec{l}$ совпадает с направлением оси Оx, то производная по направлению совпадает с частной производной по переменной x. Аналогично производная по направлению оси Оy совпадает с частной производной по переменной y.

Теорема. Производная по направлению равна сумме попарных произведений частных производных в данной точке на направляющие косинусы данного направления.

$$\frac{\partial z}{\partial l} = \frac{\partial z}{\partial x}\cos\alpha + \frac{\partial z}{\partial y}\cos\beta$$

Пример: Найти производную функции $z(x, y) = 3x^2y - 4x^2y^3$ в точке $M\,(1, 2)$ в направлении $\vec{l}$ (4, -3).

$$\frac{\partial z}{\partial x} = 6xy - 8y^3x$$

$$\frac{\partial z}{\partial y} = 3x^2 - 12y^2x^2$$

$$\frac{\partial z}{\partial x}|_{(1,2)} = 12 - 64 = -52$$

$$\frac{\partial z}{\partial y}|_{(1,2)} = 3 - 48 = -45$$

$$|\vec{l}| = \sqrt{4^2 + 3^2} = 5$$

$$\vec{l_0} = (\frac{4}{5}, -\frac{3}{5})$$

$$\cos\alpha = \frac{4}{5}, \cos\beta = -\frac{3}{5}$$

$$\frac{\partial z}{\partial l}|_{M_0} = -52 \cdot \frac{4}{5} + 45 \cdot \frac{3}{5} = -14{,}6$$

Рассмотрим функцию трех переменных $n = 3$, $u = f(x, y, z)$.

Определение. Градиентом функции многих переменных в данной точке называется вектор, координаты которого равны частным производным по соответствующим аргументам, вычисленным в данной точке.

$$grad\ u = (\frac{\partial u}{\partial x}, \frac{\partial u}{\partial y}, \frac{\partial u}{\partial z})$$

Теорема. Производная функции в данном направлении равна проекции градиента на данное направление.

Доказательство. Даны функция $u = f(x, y, z)$ и некоторое направление $\vec{l}$, заданное направляющими косинусами $cosa, cos\beta, cos\gamma$.

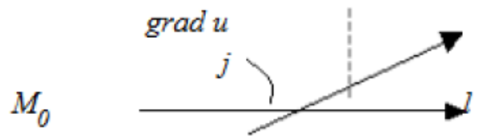
Единичный вектор данного направления – $\vec{l}(cosa, cos\beta, cos\gamma)$.

Производная по направлению в данной точке равна

$$\frac{\partial u}{\partial l} = \frac{\partial u}{\partial x}cos\alpha + \frac{\partial u}{\partial y}cos\beta + \frac{\partial u}{\partial z}cos\gamma = grad\ u \cdot l_0$$

$$= |grad\ u| \cdot |l_0| \cdot \cos\varphi = |grad\ u| \cdot \cos\varphi$$

где φ – угол между градиентом и направлением.



$$\frac{\partial u}{\partial l} = |grad\ u| \cdot cos\varphi = pr_l(grad\ u)$$

Следствие. Градиент функции в данной точке показывает направление наискорейшего возрастания функции. Модуль градиента совпадает с максимальной скоростью возрастания функции в данной точке.

Доказательство. Из теоремы следует, что

$$\frac{du}{dl} = |gradu|cos\varphi$$

Выясним, в каком из направлений в данной точке функция растет быстрее всего. Максимум будет достигаться, когда $\varphi = 0$, т. е. направление совпадает с направлением градиента.

$$\max_l \frac{du}{dl} = |gradu|$$

Рассмотрим функцию двух переменных $n = 2, z = f(x, y)$.

Теорема. Градиент функции в каждой точке области определения направлен по нормали к линии уровня (нормалью к плоской кривой называется перпендикуляр к касательной, проведенной в точку касания) (Рис 4.4.7).

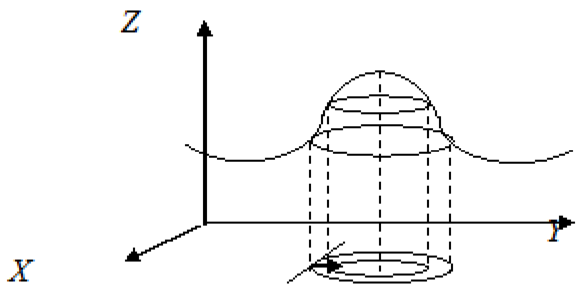


Рисунок 4.4.7. Теорема

Используя геометрический смысл частных производных $z'_x|_{M_0}$ и $z'_y|_{M_0}$ можно получить следующее уравнение (4.4.2) касательной плоскости $\pi_{кас}$ к поверхности: $z = f(x, y)$ в точке $C_0(x_0, y_0, z_0)$, $z_0 = z(M)$:

$$\pi_{кас} : z - z_0 = z'_x|_{M_0} \cdot (x - x_0) + z'_y|_{M_0} \cdot (y - y_0) \quad (4.4.2)$$

Из (4.4.2) получаем геометрический смысл полного дифференциала функции двух переменных: $dz|_{M_0}$– приращение аппликаты z при движении точки C по касательной плоскости из точки C_0 в точку $C_1(x_0 + \Delta x; y_0 + \Delta y; z_1)$, где $\overline{z_1}$ находится из (4.4.2).

Уравнение нормали $L_н$ к поверхности: $z = f(x, y)$ в точке C_0 получается, как уравнение прямой, проходящей через C_0 перпендикулярно к касательной плоскости:

$$L_н: \frac{x - x_0}{z'_x|_{M_0}} = \frac{y - y_0}{z'_y|_{M_0}} = \frac{z - z_0}{-1} \quad (4.4.3)$$

Частные производные высших порядков. Теорема о равенстве смешанных производных. Дифференциалы высших порядков

Рассмотрим функцию двух переменных $n = 2$, $z = f(x,y)$. Предположим, что функция имеет частные производные $\frac{\partial z}{\partial x} = f'_x(x, y)$ и $\frac{\partial z}{\partial y} = f'_y(x, y)$, которые являются функциями двух переменных. Их называют частными производными первого порядка. Предположим, что они дифференцируемы.

Определение. Частные производные от частных производных первого порядка называются **частными производными второго порядка**.

$$f''_{xx} = \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right),\ f''_{yy} = \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right).$$

$$f''_{yx} = \frac{\partial^2 z}{\partial y \partial x} = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right), f''_{xy} = \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right).$$

Две последние называют смешанными производными.

Если полученные функции являются дифференцируемыми, то частные производные от них называются частными производными третьего порядка.

Например:

$$\frac{\partial^3 z}{\partial y^2 \partial x} = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}\right)$$

Определение. Частной производной *n*-го порядка называется частная производная от частной производной (n–1)-го порядка.

Частных производных n–го порядка от функции двух переменных 2^n штук.

Частная производная порядка p функции $y = f(x_1, x_2, \dots, x_n)$ имеет вид

$$\frac{\partial^P y}{\partial x_1^{K_1}\, \partial x_2^{K_2} \dots \partial x_n^{K_n}}$$

где

$$\sum_{i=1}^{n} K_i = p$$

Теорема. Если частные производные первого порядка некоторой функции непрерывно дифференцируемы, то результаты смешанного дифференцирования равны.

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}$$

Пример. $z(x, y) = 5x^3y - 4x^2y^5$

$$\frac{\partial z}{\partial x} = 15x^2y - 8xy^5$$

$$\frac{\partial z}{\partial y} = 5x^3 - 20x^2y^4$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = 30xy - 8y^5$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial y \partial x} = 15x^2 - 40y^4$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = 15x^2 - 40xy^4$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = -80x^2y^3$$

$$\frac{\partial^3 z}{\partial x \partial y^2} = -160xy^3$$

Формула Тейлора для ФМП

Если функция $z = f(x, y)$ имеет в некоторой окрестности точки (x_0, y_0) непрерывные частные производные до $(n+1)$-го порядка включительно, то для любой точки (x, y) из этой окрестности справедлива формула Тейлора n-го порядка:

$$f(x,y) = f(x_0,y_0) = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k!}\left((x-x_0)\frac{\partial}{\partial x} + (y-y_0)\frac{\partial}{\partial y}\right)^k f(x_0,y_0) + o(p^n),$$

где $p = \sqrt{(x-x_0)^2 + (y-y_0)^2}$,

$$\left((x-x_0)\frac{\partial}{\partial x} + (y-y_0)\frac{\partial}{\partial y}\right) f(x_0,y_0) \equiv$$

$$\equiv (x-x_0)\frac{\partial f(x_0,y_0)}{\partial x} + (y-y_0)\frac{\partial f(x_0,y_0)}{\partial y},$$

$$\left((x-x_0)\frac{\partial}{\partial x} + (y-y_0)\frac{\partial}{\partial y}\right)^2 f(x_0,y_0) \equiv (x-x_0)^2\frac{\partial^2 f(x_0,y_0)}{\partial x^2} +$$

$$2(x-x_0)(y--y_0)\frac{\partial^2 f(x_0,y_0)}{\partial x \partial y} + (y-y_0)^2\frac{\partial^2 f(x_0,y_0)}{\partial y^2}$$

и т.д. Формула Тейлора, записанная в окрестности точки (0,0) называется формулой Маклорена. Например, для функции двух переменных при $n = 2$:

$$f(x,y) = f(0,0) + \frac{\partial f(0,0)}{\partial x}x + \frac{\partial f(0,0)}{\partial y}y + \frac{\partial^2 f(0,0)}{2\partial x^2}x^2 + \frac{\partial^2 f(0,0)}{\partial x \partial y}xy +$$

$$\frac{\partial^2 f(0,0)}{2\partial y^2}y^2 + o(p^2)$$

Понятие локального экстремума ФМП. Необходимое условие экстремума. Достаточные условия экстремума

Рассмотрим функцию двух переменных $n = 2, z = f(x, y)$.

Определение. Точка (x_0, y_0) называется точкой локального максимума (минимума) функции, если найдется некоторая окрестность данной точки, для всех точек которой выполняется условие $(f(x,y) < f(x_0,y_0)\ (f(x,y) > f(x_0,y_0))$.

Определение. Точки локального максимума и минимума называются точками экстремума.

Теорема (необходимое условие экстремума функции). Если точка (x_0, y_0) является точкой локального экстремума функции, то в этой точке частные производные равны нулю или не существуют.

Доказательство. Пусть (x_0, y_0) – точка экстремума функции. Зафиксируем y_0 и рассмотрим функцию одной переменной.

$g(x) = f(x, y_0)$. Точка x_0 является точкой локального экстремума функции $g(x)$, следовательно, в этой точке производная $g'(x)=0$ или не существует, тогда частная производная

$$\frac{\partial z(x_0, y_0)}{\partial x} = \frac{dg(x_0)}{dx}$$

равна нулю или не существует.

Аналогично доказывается, что

$$\frac{\partial z(x_0, y_0)}{\partial y} = 0$$

или не существует.

Определение. Точки, в которых частные производные равны нулю или не существуют, называются критическими точками функции многих переменных.

Необходимое условие экстремума не является достаточным, т. е. не каждая критическая точка является точкой экстремума. Например, функция $z = y \cdot x$ имеет частные производные $\frac{\partial z}{\partial x} = y$, $\frac{\partial z}{\partial y} = x$.

В точке (0, 0) частные производные функции равны нулю, однако в этой точке у функции нет экстремума. Данная точка является седловой точкой графика.

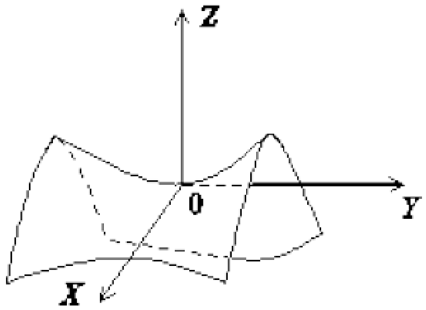


Рисунок 4.4.8. Точки экстремума функции

Теорема (достаточное условие экстремума функции).

Пусть функция $z = f(x, y)$ определена в некоторой окрестности критической точки (x_0, y_0), в которой частные производные равны нулю:

$$\frac{\partial z(x_0, y_0)}{\partial x} = 0, \frac{\partial z(x_0, y_0)}{\partial y};$$

в этой точке функция имеет непрерывные частные производные второго порядка

$$\frac{\partial^2 z(x_0, y_0)}{\partial y \partial x} = \frac{\partial^2 z(x_0, y_0)}{\partial x \partial y} = B\,,$$

$$\frac{\partial^2 z(x_0, y_0)}{\partial y^2} = C\,,$$

$$\frac{\partial^2 z(x_0, y_0)}{\partial x^2} = A\,.$$

Тогда если $\Delta = AC - B^2 > 0$, то в точке (x_0, y_0) функция имеет экстремум, причем если $A < 0$ – максимум, если $A > 0$ – минимум. В случае $\Delta = AC - B^2 < 0$ функция экстремума не имеет. Если $\Delta = AC - B^2 = 0$, то вопрос о наличии экстремума остается открытым.

Условный экстремум ФМП. Метод множителей Лагранжа. Наибольшее и наименьшее значения непрерывной ФМП в замкнутой области

Пусть функция $z = f(x, y)$ определена в некоторой области $G \subset R^2$ и в этой области задана кривая уравнением $\varphi(x, y) = 0$. Условным экстремумом функции двух переменных $z = f(x, y)$ называют ее экстремум при условии, что точки берутся на заданной кривой. Если из уравнения кривой можно, например, выразить $y = y(x)$, то задача о нахождении условного экстремума сводится к исследованию на экстремум функции одной переменной

$$z = f(x, y(x)).$$

Метод множителей Лагранжа

Если уравнение $\varphi(x, y) = 0$ не разрешимо ни относительно $y = y(x)$, ни относительно, $x = x(y)$, то рассматривают функцию Лагранжа

$L(x, y, \lambda) = f(x, y) + \lambda\varphi(x, y)$. Необходимым условием существования условного экстремума функции $z = f(x, y)$ при условии $\varphi(x, y) = 0$ является равенство нулю всех частных производных функции Лагранжа:

$$\frac{\partial L}{\partial x} = \frac{\partial L}{\partial y} = \frac{\partial L}{\partial \lambda} = 0$$

Рассмотрим определитель:

$$\Delta = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}, \text{ где}$$

$$a_{11} = \frac{\partial^2 z}{\partial x^2}(M_0)$$

$$a_{21} = a_{12} = \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}(M_0)$$

$$a_{23} = a_{32} = \frac{\partial^2 z}{\partial y \partial \lambda}(M_0)$$

$$a_{13} = a_{31} = \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial \lambda}(M_0)$$

$$a_{22} = \frac{\partial^2 z}{\partial y^2}(M_0)$$

$$a_{33} = \frac{\partial^2 z}{\partial \lambda^2}(M_0)$$

где M_0 – стационарная точка функции Лагранжа.

Если $\Delta < 0$, то точка (x_0, y_0) является точкой минимума функции Лагранжа, а значит точкой условного минимума функции $z = f(x, y)$. Если $\Delta >$ ли $\Delta > 0$, то точка (x_0, y_0) является точкой максимума, значит точкой условного максимума функции $z = f(x, y)$.

Наибольшее и наименьшее значение функции в замкнутой области

Поскольку функция $z = f(x, y)$, непрерывная в ограниченной замкнутой области достигает в ней своего наибольшего и наименьшего значений, задача об их нахождении разделяется на две части: найти экстремумы функции двух переменных внутри области, найти ее условные экстремумы на границе области, при условии, что граница задана уравнением $\varphi(x, y) = 0$.

Пример. Найти точки экстремума функции $z = x^2 + 2y^2$, при уравнении связи $3x + 2y = 11$.

Решение:

Запишем функцию Лагранжа:

$z(x, y, \lambda) = x^2 + 2y^2 + \lambda(3x + 2y - 11)$;

Найдём частные производные от функции:

$z'_x = 2x + 3\lambda$;

$z'_y = 4y + 2\lambda$;

$z'_\lambda = 3x + 2y - 11$.

Запишем систему:

$$\begin{cases} 2x + \ +3\lambda \ = \ 0, \\ \quad 4y + 2\lambda = 0, \\ 3x + \ 2y + = 11. \end{cases}$$

Решим систему методом Гаусса:

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 2 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & 4 & 2 & 0 \\ 3 & 2 & 0 & 11 \end{array}\right] = \left[\begin{array}{ccc|c} 2 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & 4 & 2 & 0 \\ 0 & 4 & 9 & 22 \end{array}\right] = \left[\begin{array}{ccc|c} 2 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & 4 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & -11 & 22 \end{array}\right]$$

$$\begin{cases} 2x + \ +3\lambda \ = \ 0, \\ \ 4y + 2\lambda \ = \ 0, \\ \quad -11\lambda \ = 22. \end{cases}$$

$\lambda = -2;\ y = 1;\ x = 3.$

Точка (3;1; -2) – стационарная точка функции Лагранжа.

Дальше находим частные производные второго порядка:

$z''_{xx} = (2x + 3\lambda)'_x = 2$;

$z''_{xy} = (2x + 3\lambda)'_y = 0$;

$z''_{yy} = (4y + 2\lambda)'_y = 4$;

$z''_{y\lambda} = (4y + 2\lambda)'_\lambda = 2$;

$z''_{x\lambda} = (2x + 3\lambda)'_\lambda = 3$;

$z''_{\lambda\lambda} = (3x + 2y - 11)'_\lambda = 0$.

Запишем определитель для нашего случая:

$$\Delta = \begin{vmatrix} 2 & 0 & 3 \\ 0 & 4 & 2 \\ 3 & 2 & 0 \end{vmatrix} = 0 + 0 + 0 - 36 - 8 - 0 = -44 < 0$$

Точка (3;1; -2) – точка минимума функции Лагранжа, точка (3;1) – точка условного минимума функции.

Пример. Найти наибольшее и наименьшее значения функции $z = 4(x - y) - x^2 - y^2$ в замкнутой области, ограниченной линиями $x + 2y = 4, x - 2y = 4, x = 0$.

Решение:

I) Вычислим значения функции в стационарных точках, принадлежащих данной области:

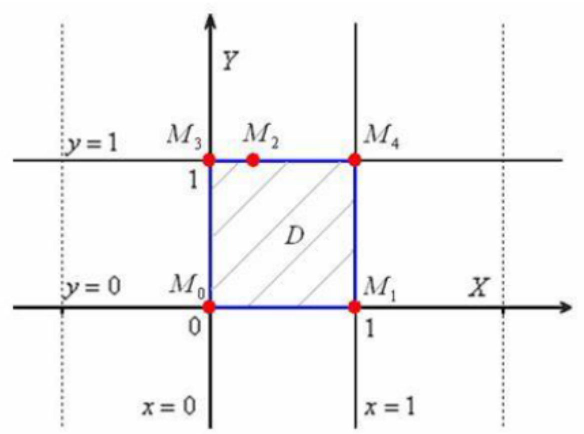
$$z'_x = (4x - 4y - x^2 - y^2)'_x = 4 - 0 - 2x - 0 = 4 - 2x$$

$$z'_y = (4x - 4y - x^2 - y^2)'_y = 0 - 4 - 0 - 2y = -4 - 2y$$

$$\begin{cases} z'_x = 0 \\ z'_y = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 4 - 2x = 0 \\ -4 - 2y = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 2 \\ y = -2 \end{cases} \Rightarrow M_0(2; -2) \notin D$$

M_0 – стационарная точка.

II) Исследуем границу области



1) Подставим x = 0 в функцию:

$$z = 4(0 - y) - 0^2 - y^2 = -4y - y^2$$

$$z' = (-4 - y^2)' = -4 - 2y$$

$$-4 - 2y = 0$$

$$y = -2 \in [-2; 2]$$

Вычислим значение функции в ке $M_1(0; -2)$

$$z(M_1) = z(0; -2) = 4(0 - (-2)) - 0^2 - (-2)^2 = 8 - 0 - 4 = \mathbf{4}$$

Вычислим значение функции на другом конце отрезка:

$$z(M_2) = z(0; 2) = 4(0 - 2) - 0^2 - 2^2 = -8 - 0 - 4 = \mathbf{-12}$$

2) Подставим в функцию $x = 4 - 2y$:

$$z = 4(4 - 2y - y) - (4 - 2y)^2 - y^2 = 4(4 - 3y) - (16 - 16y + 4y^2) - y^2$$

$$= 16 - 12y - 16 + 16y - 4y^2 - y^2 = -5y^2 + 4y.$$

Контроль: $z(M_2) = z(0; 2) = -5 \cdot 2^2 + 4 \cdot 2 = -20 + 8 = -12$

$$z' = (-5y^2 + 4y)' = -10y + 4 = 0$$

$$y = 0{,}4 \in [-2; 2] \Rightarrow x = 4 - 2 \cdot 0{,}4 = 3{,}2$$

Вычислим значение функции в точке $M_3(3{,}2;0{,}4)$:

$z(M_3) = z(3{,}2;0{,}4) = 4(3{,}2 - 0{,}4) - 3{,}2^2 - 0{,}4^2 = 11{,}2 - 10{,}24 - 0{,}16 =$

$= 0{,}8$

Вычислим значение функции на конце отрезка:

$z(M_4) = z(4;0) = 4(4 - 0) - 4^2 - 0^2 - 16 - 16 = 0$

3) Подставим в функцию $x = 2y + 4 = 2(y + 2)$:

$z = 4(2y + 4 - y) - \left(2(y + 2)\right)^2 - y^2 = 4(y + 4) - 4(y^2 + 4y + 4) - y^2 =$

$= 4y + 16 - 4y^2 - 16y - 16 - y^2 = -5y^2 - 12y$

Контроль:

$z(M_1) = z(0;-2) = -5 \cdot (-2)^2 - 12 \cdot (-2) = -20 + 24 = 4,$

$z(M_4) = z(4;0) = -0 - 0 = 0$

$z' = (-5y^2 - 12y)' = -10y - 12$

$-10y - 12 = 0$

$y = -1{,}2 \in [-2;2] \Rightarrow x = 2 \cdot (-1{,}2) + 4 = 1{,}6$

Вычислим значение функции в точке $M_5(1{,}6;-1{,}2)$:

$z(M_5) = z(1{,}6;-1{,}2) = 4\left(1{,}6 - (-1{,}2)\right) - 1{,}6^2 - (-1{,}2)^2 = 11{,}2 - 2{,}56 - 1{,}44 = 7{,}2$

Ответ: $\max_D z = z(1{,}6;-1{,}2) = 7{,}2;\ \min_D z = z(0;2) = -12.$

ТЕМА 5. ИНТЕГРАЛЬНОЕ ИСЧИСЛЕНИЕ ФУНКЦИЙ ОДНОЙ И НЕСКОЛЬКИХ ПЕРЕМЕННЫХ

5.1. Первообразная и неопределенный интеграл

Определение. Непрерывная функция $F(x)$ называется первообразной для функции $f(x)$ на промежутке X, если для каждого $x \in X$, $F'(x) = f(x)$.

Пример. Функция $F(x) = x^3$ является первообразной для функции $f(x) = 3x^2$ на интервале $(-\infty, +\infty)$, так как $F'(x) = (x^3)' = 3x^2 = f(x)$ для всех $x \in (-\infty, +\infty)$.

Легко проверить, что функция x^3+13 имеет ту же производную $3x^2$, поэтому x^3+13 также является первообразной для функции $3x^2$ для всех $x \in (-\infty, +\infty)$. Ясно, что вместо 13 можно взять любую постоянную.

Таким образом, задача нахождения первообразной имеет бесчисленное множество решений. Этот факт нашёл отражение в определении неопределённого интеграла.

Определение. Неопределённый интеграл функции $f(x)$ на промежутке X есть множество всех её первообразных.

Это записывается в виде: $\int f(x)dx = F(x) + C$, где C – любая постоянная, называемая постоянной интегрирования.

Таблица основных неопределённых интегралов

1. $\int 0 \cdot dx = C$
2. $\int dx = \int 1 \cdot dx = x + C$
3. $\int x^n \cdot dx = \dfrac{x^{n+1}}{n+1} + C,$ $n \neq -1, x > 0$
4. $\int \dfrac{dx}{x} = \ln|x| + C$
5. $\int a^x dx = \dfrac{a^x}{\ln a} + C$
6. $\int e^x dx = e^x + C$
7. $\int \sin x dx = -\cos x + C$
8. $\int \cos x dx = \sin x + C$
9. $\int \dfrac{dx}{\sin^2 x} = -\mathrm{ctg} x + C$
10. $\int \dfrac{dx}{\cos^2 x} = \mathrm{tg} x + C$
11. $\int \dfrac{dx}{\sqrt{a^2 - x^2}} = \arcsin \dfrac{x}{a} + C, |x| < |a|$
12. $\int \dfrac{dx}{a^2 + x^2} = \dfrac{1}{a} \mathrm{arctg} \dfrac{x}{a} + C$
13. «Высокий» логарифм:
$$\int \frac{dx}{a^2 - x^2} = \frac{1}{2a} \ln\left|\frac{a+x}{a-x}\right| + C, |x| \neq a$$
14. «Длинный» логарифм:
$$\int \frac{dx}{\sqrt{x^2 \pm a^2}} = \ln\left|x + \sqrt{x^2 \pm a^2}\right| + C$$

Методы решения неопределенных интегралов

1. Метод непосредственного интегрирования

Приведение к табличному виду или **метод непосредственного интегрирования**. С помощью тождественных преобразований подынтегральной функции интеграл сводится к интегралу, к которому применимы основные правила интегрирования и возможно использование таблицы основных интегралов.

Пример. Найти интеграл

$$\int 2^{3x-1}dx$$

Решение: Воспользуемся свойствами интеграла и приведем данный интеграл к табличному виду.

$$\int 2^{3x-1}dx = \int 2^{3x}\cdot 2^{-1}dx = \frac{1}{2}\int (2^3)^x dx = \frac{1}{2}\int 8^x dx = \frac{8^x}{2\ln 8} + C$$

Ответ: $\frac{8^x}{2\ln 8} + C$

2. Внесение под знак дифференциала

В формуле неопределенного интеграла величина *dx* означает, что берется дифференциал от переменной *x*. Можно использовать некоторые свойства дифференциала, чтобы, усложнив выражение под знаком дифференциала, тем самым упростить нахождение самого интеграла. Для этого используется формула $y'(x)dx=dy(x)$.

Если нужная функция $y(x)$ отсутствует, иногда ее можно образовать путем алгебраических преобразований.

Пример. Внесением под дифференциал найти неопределенный интеграл

$$\int \cos(2x)dx$$

Решение: Внесем функцию *2x* под знак дифференциала, тем самым приведя исходный интеграл к табличному.

$$\int cos(2x)\,dx = \int cos(2x)\cdot\frac{1}{2}\cdot 2\,dx = \int cos(2x)\cdot\frac{1}{2}\,d(2x) =$$

$$= \frac{1}{2}\int cos(2x)\,d(2x) = \frac{1}{2}\int d(sin\,2x) = \frac{1}{2}sin2x + C$$

Ответ: $\int cos(2x)\,dx = \frac{1}{2}sin2x + C$

В общем виде справедливо равенство:

$$\int f\big(y(x)\big)\cdot y'(x)dx = \int f(y(x))d(y(x))$$

3. Интегрирование заменой переменной.

Интегрирование заменой переменной или методом подстановки. Пусть *x=φ(t)*, где функция *φ(t)* имеет непрерывную производную *φ'(t)*, а между переменными *x* и *t* существует взаимно однозначное соответствие. Тогда справедливо равенство $\int f(x)dx = \int f(\,\varphi(t)) \cdot \varphi'(t) \cdot dt$

Определенный интеграл зависит от переменной интегрирования, поэтому если выполнена замена переменных, то обязательно надо вернуться к первоначальной переменной интегрирования.

Пример. Найти интеграл

$$\int \frac{dx}{3-5x}$$

Решение: Заменим знаменатель на переменную *t* и приведем исходный интеграл к табличному.

$$\int \frac{dx}{3-5x} \left\| \begin{matrix} 3-5x=t \\ -5dx=dt \\ dx=-\dfrac{dt}{5} \end{matrix} \right\| = \int \frac{-\frac{dt}{5}}{t} = -\frac{1}{5}\int \frac{dt}{t} = -\frac{1}{5}\ln|t| + C = -\frac{1}{5}\ln|3-5x| + C$$

Ответ: $\int \frac{dx}{3-5x} = -\frac{1}{5}\ln|3-5x| + C$

4. Интегрирование по частям

Интегрированием по частям называют интегрирование по формуле:

$$\int udv = uv - \int vdu.$$

При нахождении функции *v* по ее дифференциалу *dv* можно брать любое значение постоянной интегрирования *C*, так как она в конечный результат не входит. Поэтому для удобства будем брать *C=0*.

Использование формулы интегрирования по частям целесообразно в тех случаях, когда дифференцирование упрощает один из сомножителей, в то время как интегрирование не усложняет другой.

Пример. Найти интеграл

$$\int x \cdot cosxdx$$

Решение: В исходном интеграле выделим функции *u* и *v*, затем выполним интегрирование по частям.

$$\int x \cdot cosx \cdot dx = \left\| \begin{matrix} u = x \; v = sinx \\ du = dx \; dv = cosxdx \end{matrix} \right\| = x \cdot sinx - \int sinx \cdot dx = xsinx + cosx + C$$

Ответ: $\int x \cdot cosxdx = xsinx + cosx + C$

<u>Рациональные функции. Разложение правильной рациональной дроби на сумму простейших дробей. Методы нахождения коэффициентов разложения. Интегрирование рациональных функций, некоторых иррациональных и тригонометрических выражений</u>

Определение. Рациональная функция – это функция, получающаяся в результате конечного числа арифметических операций (сложения, умножения и деления) над переменным x и произвольными числами.

Рациональная функция имеет вид:

$$R(x) = \frac{P(x)}{Q(x)} = \frac{a_0x^n + a_1x^{n-1} + \cdots + a_n}{b_0x^m + b_1x^{m-1} + \cdots + a_m},$$

где a_o, a_1, ..., a_n и b_o, b_1, ..., b_m – постоянные ($a_o \neq 0$, $b_o \neq 0$), а n и m – неотрицательные целые числа.

Определение. Простейшие дроби часто называют элементарыми дробями. Различают следующие виды простейших дробей:

1. $\frac{A}{x-a}$
2. $\frac{A}{(x-a)^n}$
3. $\frac{Mx+N}{x^2+px+q}$
4. $\frac{Mx+N}{(x^2+px+q)^n}$

где n – натуральное число, A, M, N, a, p, q – действительные числа, а дискриминант знаменателя в дробях 3) и 4) меньше нуля.

Называют их соответственно дробями первого, второго, третьего и четвертого типов.

Для чего вообще дробь раскладывать на простейшие?

Приведем математическую аналогию. Часто приходится заниматься упрощением вида выражения, чтобы можно было проводить какие-то действия с ним. Так вот, представление дробно рациональной функции в виде суммы простейших дробей примерно то же самое. Применяется для разложения функций в степенные ряды, ряды Лорана и, конечно же, для нахождения интегралов.

К примеру, требуется взять интеграл от дробно рациональной функции:

$$\int \frac{2x^3 + 3}{x^3 + x} dx.$$

После разложения подынтегральной функции на простейшие дроби, все сводится к достаточно простым интегралам:

$$\int \frac{2x^3 + 3}{x^3 + x} dx = \int \left(2 + \frac{3}{x} - \frac{3x + 2}{x^2 + 1}\right) dx =$$

$$= \int 2dx + \int \frac{3}{x}dx - \int \frac{3x+2}{x^2+1}dx =$$
$$= 2x + 3\ln(x) - \frac{3}{2}\int \frac{d(x^2+1)}{x^2+1} - 2\int \frac{dx}{x^2+1} =$$
$$= 2x + 3\,ln(x) - \frac{3}{2}ln(x^2+1) - 2\,arctg(x) + C$$

Метод неопределенных коэффициентов.

Для нахождения неизвестных коэффициентов в разложении:

$$\frac{P_m(x)}{Q_n(x)} = \frac{A_1}{x-x_1} + \cdots + \frac{A_n}{(x-x_1)^n} + \frac{B_1}{x-X_2} + \cdots + \frac{B_m}{(x-x_2)^m} +$$
$$+ \frac{C_{1x}+D_1}{x^2+p_{1x}+q_1} + \cdots + \frac{F_{kx}+G_k}{(x^2+p_{1x}+q_1)^k}$$

используется **метод неопределенных коэффициентов**, суть которого состоит в следующем:

1. Правую часть записанного равенства приводим к общему знаменателю, который совпадает со знаменателем дроби, стоящей в левой части этого равенства – $Q_n(x)$, в числителе левой части получим некоторый многочлен $R_m(x)$ с неизвестными коэффициентами;

2. Используем тот факт, что две дроби равны, когда равны их числители и знаменатели. Из того, что знаменатели левой и правой частей равенства равны, то значит, равны и числители: $P_m(x)=R_m(x)$

3. Два многочлена равны, если равны коэффициенты при соответствующих степенях переменной, поэтому приравниваем коэффициенты при одинаковых степенях переменной x. В результате получаем систему для определения неизвестных коэффициентов.

Пример. Разложить рациональную дробь

$\frac{x+3}{x^2-5x+6}$ на простые дроби.

Решение: Так как корнями знаменателя являются значения $x_1 = 2$, $x_2 = 3$, то его можно разложить на множители следующим образом:

$$x^2 - 5x + 6 = (x-2)(x-3)$$

А тогда

$$\frac{x+3}{x^2-5x+6} = \frac{x+3}{(x-2)(x-3)}$$

Искомое разложение имеет вид:

$$\frac{x+3}{(x-2)(x-3)} = \frac{A}{x-2} + \frac{B}{x-3}$$

Приводим к общему знаменателю в правой части равенства и приравниваем числители:

$$\frac{x+3}{(x-2)(x-3)} = \frac{A(x-3)+B(x-2)}{(x-2)(x-3)} \Rightarrow x+3 = (A+B)x - 3A - 2B$$

Приравнивая коэффициенты, при соответствующих степенях, получаем:

$$\begin{array}{c|l} x & A+B=1 \\ x^0 & -3A-2B=3 \end{array} \Rightarrow \begin{cases} A+B \\ -3A-2B=3 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} A=-5 \\ B=6 \end{cases}$$

Отсюда, искомое разложение:

$$\frac{x+3}{x^2-5x+6} = -\frac{5}{x-2} + \frac{6}{x-3}$$

Ответ: $\frac{x+3}{x^2-5x+6} = -\frac{5}{x-2} + \frac{6}{x-3}$.

Метод неопределенных коэффициентов позволяет проинтегрировать любую рациональную дробь. При этом могут получиться лишь многочлены, рациональные дроби, логарифмы и арктангенсы.

Второй способ нахождения коэффициентов. Второй способ нахождения искомых коэффициентов состоит в том, что в получаемом относительно x тождестве аргументу x придают значения корней, в результате чего получаются уравнения для нахождения неизвестных коэффициентов. Данный метод более удобен, если корни знаменателя некратные. На практике чаще всего используется комбинация обоих способов.

Пример. Представить в виде суммы элементарных дробей дробь

$$\frac{x+3}{x^2-5x+6}$$

Решение: Как уже было показано, относительно переменной x получено следующее равенство: $x+3 = A(x-3) + B(x-2)$

В случае, когда $x = 3$, имеем: $6 = B$

Аналогично, для $x = 2$: $5 = -A \Rightarrow A = -5$

Таким образом,

$$\frac{x+3}{x^2-5x+6} = -\frac{5}{x-2} + \frac{6}{x-3}$$

Ответ: $\frac{x+3}{x^2-5x+6} = -\frac{5}{x-2} + \frac{6}{x-3}$.

Для интегрирования рациональной функции $P(x)/Q(x)$, где $P(x)$ и $Q(x)$ – полиномы, используется следующая последовательность шагов:

1. Если дробь неправильная (т.е. степень $P(x)$ больше степени $Q(x)$), то нужно преобразовать её в правильную, выделив целое выражение;
2. Разложить знаменатель $Q(x)$ на произведение одночленов и/или несократимых квадратичных выражений;
3. Разложить рациональную дробь на простейшие дроби, используя метод неопределенных коэффициентов;
4. Вычислить интегралы от простейших дробей.

5.2. Определенный интеграл

Основным понятием интегрального исчисления является все же не понятие неопределенного интеграла, а понятие интеграла определенного. Оно существенно сложнее и целесообразно предпослать ему некоторые задачи конкретного характера, которые выясняют необходимость введения этого понятия.

I. Задача о массе стержня

Если стержень однороден, то его истинная плотность одинакова во всех его точках и равна его средней плотности. У неоднородного же стержня истинная плотность p меняется от точки к точке. Если определять положение каждой точки M стержня с помощью расстояния x ее от одного из концов стержня (Рис. 5.2.1), то его плотность p в точке x будет функцией от x, $p = p(x)$. Поставим задачу, как, зная эту функцию и длину l стержня, найти его массу m.

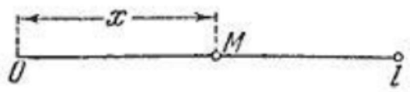


Рисунок 5.2.1. Задача о массе стержня

При решении этой задачи будем считать плотность $p(x)$ непрерывной функцией. Переходя к решению, разделим данный стержень точками

$x_1 < x_2 < \ldots < x_{n-1}$ $(0 < x_k < l)$ на n небольших участков (Рис. 5.2.2).

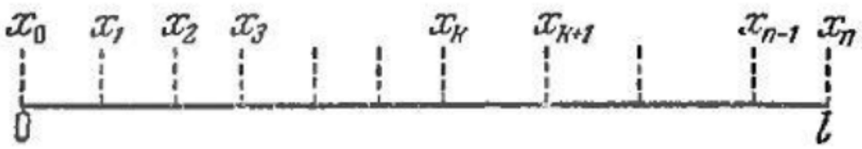


Рисунок 5.2.2. Задача о массе стержня2

Для единообразия обозначений положим еще $x_o = 0$, $x_n = l$, и пусть λ есть наибольшая из разностей $x_{k+1} - x_k$. Отдельный участок $[x_k, x_{k+1}]$ стержня приближенно можно считать однородным [т. к. из-за его малости (непрерывная) функция $p(x)$ не успевает на нем сколько-нибудь заметно измениться]. Делая такое допущение, мы тем самым принимаем плотность $p(x)$ на участке $[x_k, x_{k+1}]$ за постоянную. Пусть значение этой постоянной есть $p(\xi_k)$, где ξ_k есть произвольно выбранная точка участка $[x_k, x_{k+1}]$. Тогда масса участка $[x_k, x_{k+1}]$ будет равна $p(\xi_k)\ (x_{k+1} - x_k)$, а полная масса стержня будет

$$m = \sum_{k=0}^{n-1} p(\xi_k)(x_{k+1} - x_k).$$

Полученное выражение массы является, однако, лишь приближенным, т. к. на самом деле отдельные участки стержня не однородны. Тем не менее, чем короче эти участки, т. е. чем меньше число λ, тем более точным будет найденное выражение m. Отсюда следует, что точное значение массы таково:

$$m = \lim_{\lambda \to 0} \sum_{k=0}^{n-1} p(\xi_k)(x_{k+1} - x_k) \qquad (5.2.1)$$

II. Задача о пройденном пути

Пусть точка M движется по прямой, обладая скоростью v. Эта скорость меняется с течением времени и потому является функцией от времени t, $v = v(t)$. Поставим задачу – найти путь s, пройденный точкой за промежуток времени от момента $t = a$ до момента $t = b$.

При решении задачи будем считать скорость $v(t)$ непрерывной функцией t. Переходя к решению, разделим $[a, b]$ точками $t_1 < t_2 <\ldots < t_{n-1}$ $(a < t_k < b)$ на n коротких промежутков времени. Для единообразия положим еще $t_0 = a$, $t_n = b$ и пусть $\lambda = \max\limits_{l} \{t_{k+1} - t_k\}$.

Так как за короткий промежуток времени $[t_k, t_{k+1}]$ со скоростью $v(t)$ (будучи непрерывной функцией) почти не меняется, то можно приближенно считать ее за этот промежуток времени постоянной и равной $v(\tau_k)$, где $\tau_k \in [t_k, t_{k+1}]$. С точки зрения механики это означает, что мы считаем движение точки за время $[t_k, t_{k+1}]$ равномерным. Но тогда путь, пройденный точкой за это время, очевидно, равен $v(\tau_k)\ (t_{k+1} - t_k)$, а путь, пройденный за все время $[a, b]$, будет

$$s = \sum_{k=0}^{n-1} v(\tau_k)(t_{k+1} - t_k)$$

Полученное выражение для s, будучи лишь приближенным, оказывается тем более точным, чем меньше λ. Поэтому точное значение пути s таково:

$$s = \lim_{\lambda \to 0} \sum_{k=0}^{n-1} v(\tau_k)(t_{k+1} - t_k). \qquad (5.2.2)$$

III. Задача о площади криволинейной трапеции

Рассмотрим плоскую фигуру, ограниченную линиями $y = 0$, $x = a$, $x = b$ и $y = f(x)$, где $f(x)$ есть непрерывная положительная функция, заданная при $a \le x \le b$ (Рис. 5.2.3) Такая фигура называется криволинейной трапецией. Поставим вопрос о площади S этой трапеции.

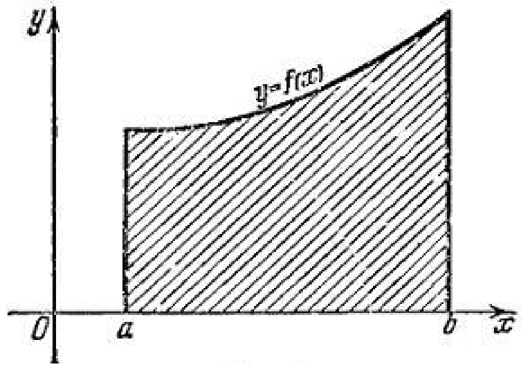


Рисунок 5.2.3. Задача о площади криволинейной трапеции

Отметим, что здесь, а отличие от двух рассмотренных выше задач, речь должна идти, прежде всего, о самом определении того, что такое площадь, и лишь затем – о нахождении ее численного значения. Нижеприводимое рассуждение освещает оба эти момента.

Разделим $[a,\ b]$ точками $a = x_0 < x_1 < x_2 <\ldots < x_{n-1} < x_n = b$ и пусть $\lambda = \max\ (x_{k+1} - x_k)$. Прямые $x = x_k$ разбивают нашу трапецию на n узких полос.

Так как функция $f(x)$ непрерывна, то она мало меняется при $x_k \le x \le x_{k+1}$ и без большой погрешности ее можно считать на промежутке $[x_k,\ x_{k+1}]$ постоянной и равной $f(\xi_k)$, где ξ_k есть произвольно взятая точка промежутка $[x_k,\ x_{k+1}]$. Легко видеть, что сделанное допущение равносильно тому, что мы принимаем вышеупомянутые полосы за прямоугольники. а всю нашу трапецию – за ступенчатую фигуру, изображенную на Рис. 5.2.4).

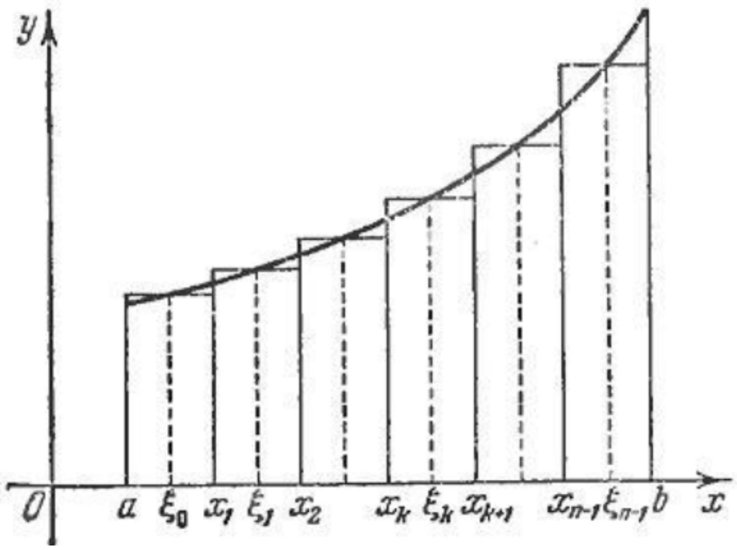


Рисунок 5.2.4. Задача о площади криволинейной трапеции2

Площадь этой ступенчатой фигуры, очевидно, равна

$$S_{\text{ступ}} = \sum_{k=0}^{n-1} f(\xi_k)(x_{k+1} - x_k).$$

Естественно считать, что эта площадь при малом λ является приближенным значением интересующей нас площади S. Поэтому по определению будем называть площадью нашей криволинейной трапеции предел

$$S = \lim_{\lambda \to 0} \sum_{k=0}^{n-1} f(\xi_k)(x_{k+1} - x_k), \qquad (5.2.3)$$

причем, однако, здесь подлежит доказательству существование этого предела (в предыдущих двух случаях существование этого предела считали очевидным, т. к. масса m и путь s – это заведомо существующие физические величины).

Сравнивая выражения (5.2.1), (5.2.2), (5.2.3), полученные в процессе решения рассмотренных задач, замечаем, что с чисто аналитической точки зрения все эти выражения совершенно одинаковы.

Определённый интеграл с переменным верхним пределом и его дифференцирование. Формула Ньютона-Лейбница

Определение. Определённым интегралом от непрерывной функции $f(x)$ на конечном отрезке $[a, b]$ (где $a \neq b$) называется приращение какой-нибудь её первообразной на этом отрезке. (Вообще, понимание заметно облегчится, если повторить тему неопределённого интеграла) При этом употребляется запись

$$\int_a^b f(x)dx$$

Как видно на Рис (5.2.5) внизу (приращение первообразной функции обозначено ΔF), **определённый интеграл может быть, как положительным, так и отрицательным числом** (Вычисляется как разность между значением первообразной в верхнем пределе и её же значением в нижнем пределе, т. е. как $F(b) - F(a)$).

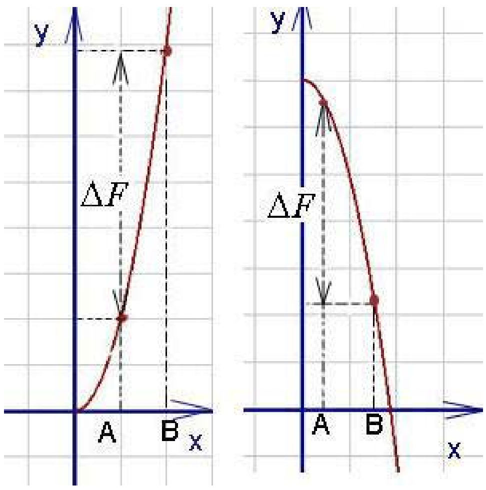


Рисунок 5.2.5. Приращение первообразной функции

Числа a и b называются соответственно нижним и верхним пределами интегрирования, а отрезок $[a, b]$ – отрезком интегрирования.

Таким образом, если $F(x)$ – какая-нибудь первообразная функция для $f(x)$, то, согласно определению,

$$\int_b^a f(x)dx = F(b) - F(a)$$

Это равенство называется формулой Ньютона-Лейбница. Разность $F(b) – F(a)$ кратко записывают так:

$$F(x)\,\Big|_a^b$$

Поэтому формулу Ньютона-Лейбница будем записывать и так:

$$\int_a^b f(x)dx = F(x)\Big|_a^b$$

Замена переменной и интегрирование по частям в определённом интеграле. Интеграл от периодических, чётных и нечётных функций

Теорема. Пусть дан интеграл

$$\int_a^b f(x)dx$$

где $f(x)$ непрерывна на $[a, b]$. Введем новую переменную z, связанную с x равенством $x = \varphi(z)$. Если:

1) $\varphi(a)=a,\ \varphi(\beta)=b,$

2) $\varphi(z)$ и $\varphi'(z)$ непрерывны на $[a, \beta]$,

3) при изменении z от α до β значения $\varphi(z)$ не выходят за пределы отрезка $a \leq x \leq b$, то

$$\int_a^b f(x)dx = \int_\alpha^\beta f(\varphi(z)) \cdot \varphi'(z)dz$$

Доказательство. Пусть $F(x)$ – первообразная для функции $f(x)$, то есть $F'(x) = f(x)$. Тогда по формуле Ньютона–Лейбница

$$\int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a)$$

покажем, что функция $F(\varphi(z))$ является первообразной для функции $f(\varphi(z)) \cdot \varphi'(z)$: $(F(\varphi(z)))' =$ [по правилу дифференцирования сложной функции] $= F'(x) \cdot x' = f(x) \cdot \varphi'(z) = f(\varphi(z)) \cdot \varphi'(z)$. Тогда по формуле Ньютона–Лейбница

$$\int_{\alpha}^{\beta} f\big(\varphi(z)\big)\cdot\varphi'(z)dz = F(\varphi(z))\Big|_{\alpha}^{\beta} = F\big(\varphi(\beta)\big) - F\big(\varphi(\alpha)\big) = F(b) - F(a)$$

Пример.

$\int_0^{\ln 2}\sqrt{e^x-1}dx = $ [замена: $e^x - 1 = z^2, e^x = z^2+1, x = \ln(z^2+1)$

$dx = \dfrac{2zdz}{z^2+1}$;]

при $x = 0, z = \sqrt{e^0-1} = 0$;

при $x = ln2, z = \sqrt{e^{ln2}-1} = \sqrt{2-1} = 1$

$= \int_0^{\ln 2}\frac{2z^2dz}{z^2+1} = 2\int_0^{\ln 2}\frac{z^2+1-1}{z^2+1}dz = 2\int_0^{\ln 2}\left(1-\frac{1}{z^2+1}\right)dz = 2z\Big|_0^1 -$
$2arctgz\Big|_0^1 = 2 - 2(arctg1 - arctg0) = 2 - 2\frac{\pi}{4} = 2 - \frac{\pi}{2}$

Определение. Формула интегрирования по частям в определенном интеграле выводится так же, как и для неопределенного интеграла, и имеет вид

$$\int_a^b udv = uv\Big|_a^b - \int_a^b vdu$$

Пример.

$$\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{2}}\frac{xdx}{\sin^2 x} = [u = x, dv = \frac{dx}{\sin^2 x}; du = dx, v$$

$$= \int\frac{dx}{\sin^2 x} = -ctgx] = -xctgx\Big|_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{2}}$$

$$-\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{2}}(-ctgx)dx = -\left(\frac{\pi}{2}ctg\frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{2}ctg\frac{\pi}{6}\right) + \int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{2}}\left(\frac{\cos x}{\sin x}\right)dx$$

$$= \frac{\pi}{6}\sqrt{3} + \int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{2}}\frac{dsinx}{sinx} = \frac{\pi\sqrt{3}}{6} + \ln|sinx|\Big|_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{2}}$$

$$= \frac{\pi\sqrt{3}}{6} + lnsin\frac{\pi}{2} - lnsin\frac{\pi}{6} = \frac{\pi\sqrt{3}}{6} - (ln1 - ln2) = \frac{\pi\sqrt{3}}{6} + ln2$$

Теорема. Пусть $f(x)$ – интегрируемая на промежутке [$-a$, a] четная функция:

$$f(-x) = f(x).$$

Тогда интеграл от $f(x)$ в симметричных пределах равен удвоенному интегралу по половинному промежутку:

$$\int_{-a}^{a} f(x)dx = 2\int_{0}^{a} f(x)dx$$

Для доказательства представим исходный интеграл в виде суммы двух интегралов:

$$\int_{-a}^{a} f(x)dx = \int_{-a}^{0} f(x)dx + \int_{0}^{a} f(x)dx$$

Преобразуем первый интеграл в правой части этого равенства, выполнив подстановку $x = -t$:

$$\int_{-a}^{0} f(x)dx = -\int_{a}^{0} f(-t)dt = \int_{0}^{a} f(t)dt$$

Утверждение доказано.

Теорема. Пусть $f(x)$ – интегрируемая на промежутке [$-a$, a] нечетная функция:

$$f(-x) = -f(x).$$

Тогда интеграл от $f(x)$ в симметричных пределах равен нулю:

$$\int_{-a}^{a} f(x)dx = 0$$

Теорема доказывается аналогичным образом:

$$\int_{-a}^{a} f(x)dx = \int_{-a}^{0} f(x)dx + \int_{0}^{a} f(x)dx$$

$$\int_{-a}^{0} f(x)dx = -\int_{a}^{0} f(-t)dt = -\int_{0}^{a} f(t)dt$$

Пример.

Пусть $f(z)$ – непрерывная на промежутке [0, 1] функция. Показать, что

$$\int_{0}^{\pi} xf(sinx)dx = \frac{\pi}{2}\int_{0}^{\pi} f(\sin x)dx$$

Решение:

Выполним подстановку $x = \pi - t$

$$\int_0^{\pi} xf(\sin x)dx$$

$$= -\pi \int_{\pi}^{0} f(\sin t)dt$$

$$+ \int_{\pi}^{0} tf(\sin t)dt$$

$$= \pi \int_0^{\pi} f(\sin t)dt$$

$$- \int_0^{\pi} tf(\sin t)dt \;=\gg 2\int_0^{\pi} xf(\sin x)dx = \pi \int_0^{\pi} f(\sin x)dx$$

Геометрические приложения определённых интегралов: вычисление площадей плоских фигур, объёмов тел и нечётных функций

Формула. Вычисление площадей плоских фигур:

$$S = \int_a^b f_2(x)dx - \int_a^b f_1(x)dx = \int_a^b (f_2(x) - f_1(x))dx$$

Формула. Вычисление длины дуги плоской кривой:

$$l = \int_a^b \sqrt{1 + (f'(x))^2 dx}$$

Формула. Вычисление площади поверхности вращения:

$$S_x = 2\pi \int_a^b y\sqrt{1 + (y_x')^2 dx}$$

Вычисление объема тела

Формула. Вычисление объема тела по известным площадям параллельных сечений:

$$V = \int_a^b S(x)dx$$

Формула. Объем тела вращения:

$$V_x = \pi \int_a^b y^2 dx\,, V_y = \pi \int_c^d x^2 dy.$$

Несобственные интегралы 1-го и 2-го рода. Исследование на сходимость: признаки сравнения для интеграла от неотрицательных функций. Абсолютная и условная сходимость. Главное значение

Определение. Предположим, что функция *f(x)* задана на бесконечном промежутке вида [1, $+\infty$) и интегрируема на любом конечном отрезке [*a, b*], где $b \geq a$. Таким образом, можно рассмотреть функцию, зависящую от верхнего предела, как от переменной:

$$F(b) = \int_a^b f(x)dx$$

Если эта функция имеет предел при $b \rightarrow \infty$, то число

$$\lim_{b\to+\infty} F(b)$$

называется значением несобственного интеграла первого рода:

$$\int_a^{+\infty} f(x)dx = \lim_{b\to+\infty} \int_a^b f(x)dx$$

а сам определенный интеграл называется сходящимся. Если же предела не существует, то интеграл называется расходящимся и не имеет никакого числового значения.

Пусть на полуинтервале [*a, b*) задана функция *f*(*x*), интегрируемая на любом отрезке, принадлежащем данному интервалу, однако не нтегрируемая на отрезке [*a, b*]. В точке b эта функция может быть вовсе не определена и стремиться к ∞, либо вовсе не иметь никакого предела. Рассмотрим функцию

$$F(b_1) = \int_a^{b_1} f(x)dx$$

она определена при $x \in [a,\ b)$. Эта функция может иметь предел при $b_1 \to b - 0$ (левосторонний предел). Этот предел будем называть значением интеграла от $f(x)$ по всему полуинтервалу $[a,\ b)$ и обозначать в точности:

$$\int_a^b f(x)dx$$

Определение. Пусть функция $f(x)$ удовлетворяет, указанным выше, условиям на $[a,\ b)$. Несобственным интегралом второго рода назовём определенный интеграл

$$\int_a^b f(x)dx$$

значение, которого равняется левостороннему пределу

$$\lim_{b_1 \to b-0} \int_a^{b_1} f(x)dx$$

Если этот предел существует, то несобственный интеграл называется сходящимся, а если предела не существует, то расходящимся. Расходящемуся интегралу не приписывается никакого числового значения.

Определение. Абсолютная и условная сходимость несобственных интегралов от разрывных функций определяется аналогично тому, как это было сделано для несобственных интегралов по бесконечному промежутку, а именно: несобственный интеграл от неограниченной функций

$$\int_a^b f(x)dx$$

называется абсолютно сходящимся, если сходится интеграл

$$\int_a^b |f(x)|dx$$

и условно сходящимся, если интеграл

$$\int_a^b f(x)dx$$

сходится, а интеграл

$$\int_a^b |f(x)|dx$$

расходится (если сходится

$$\int_a^b |f(x)|dx$$

то

$$\int_a^b f(x)dx$$

тоже обязательно сходится).

Пример. Исследовать на сходимость интеграл:

$$J = \int_0^1 \frac{cos\left(\frac{1}{x}\right) dx}{\sqrt[3]{x}}$$

Решение: Так как

$$f(x) = \frac{\cos\frac{1}{x}}{\sqrt[3]{x}}, |f(x)| = \frac{\left|\cos\frac{1}{x}\right|}{\sqrt[3]{x}} \leq \frac{1}{\sqrt[3]{x}},$$

то исходный интеграл сходится абсолютно.

При отсутствии абсолютной сходимости установить условную сходимость можно с помощью признаков Абеля и Дирихле:

Признак Дирихле. Интеграл

$$\int_a^b F(x)g(x)dx$$

сходится, если:

1) функция *f(x)* непрерывна и имеет ограниченную первообразную на (*a*, *b*];

2) функция *g(x)* непрерывно дифференцируема и монотонна на (*a*, *b*], причём

$$\lim_{x\to a+0} g(x) = 0$$

Признак Абеля. Интеграл

$$\int_a^b f(x)g(x)dx$$

сходится, если:

2) функция *f*(*x*) непрерывна на (*a*, *b*] и интеграл

$$\int_a^b F(x)dx$$

сходится;

3) функция $g(x)$ ограничена, непрерывно дифференцируема и монотонна на $(a, b]$, то есть имеет конечный предел:

$$\lim_{x \to a+0} g(x) = A < \infty$$

5.3. Двойные интегралы

Определение двойного интеграла

Пусть G — плоская область, которую будем считать замкнутой (она содержит свою границу) и ограниченной (её можно накрыть некоторым кругом). Под ***диаметром*** области G будем понимать наибольшее расстояние между двумя её точками и обозначать $\operatorname{diam} G$.

Пусть в области G задана непрерывная функция $z = f(x, y)$.

Разобьем G на n частей $G_1, \ldots, G_n$ так, чтобы любая пара (G_i, G_j) не имела общих внутренних, т. е. не лежащих на границе, точек (рис. 1). Пусть символ ΔS_i обозначает площадь G_i, а d_i — её диаметр. Через d обозначим наибольший из d_i, т. е.

$$d = \max_{1 \leqslant i \leqslant n} d_i.$$

В каждой части G_i произвольным образом выберем точку $M_i(x_i, y_i)$ и образуем сумму

$$\sigma = \sum_{i=1}^{n} f(x_i, y_i)\Delta S_i.$$

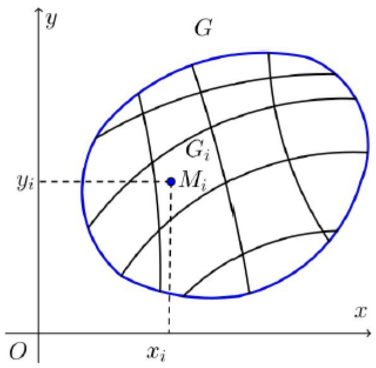


Рисунок 5.3.1. Определение двойного интеграла

Эта сумма называется ***интегральной суммой*** функции $f(x, y)$ в области G.

Предел интегральной суммы определяется так же, как и для определенного интеграла.

Определение. *Предел интегральной суммы σ при $d \to 0$ называется* ***двойным интегралом*** *от функции $f(x, y)$ по области G и обозначается*

$$\iint_G f(x, y)\, dx\, dy.$$

Таким образом, двойной интеграл определяется равенством

$$\iint_G f(x, y)\, dx\, dy = \lim_{d \to 0} \sum_{i=1}^{n} f(x_i, y_i)\Delta S_i.$$

В этом случае функция $f(x,y)$ называется ***интегрируемой*** *в области G, G —* ***областью интегрирования****, а x и y —* ***переменными интегрирования****.*

Можно доказать, что если функция $f(x,y)$ непрерывна на G, то она и интегрируема в этой области.

Геометрический смысл двойного интеграла

Рассмотрим тело T рис.5.3.2, которое ограничено сверху графиком непрерывной и неотрицательной функции $z = f(x,y)$, определенной в G, снизу самой областью G, лежащей в плоскости Oxy, с боков — цилиндрической поверхностью, образующая которой параллельна оси Oz, а её направляющая — граница G. Такое тело называется ***цилиндрическим*** или ***криволинейным цилиндром***.

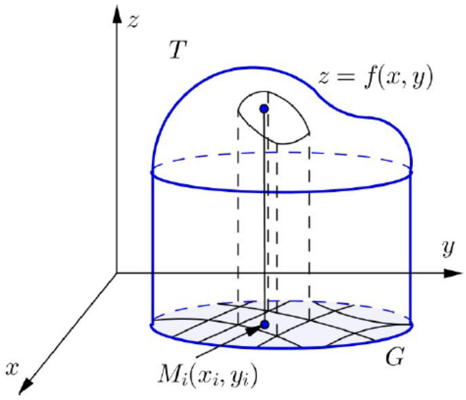


Рисунок 5.3.2.

Найдем объем V этого тела. Для этого разобьем область G произвольным образом на n частей G_i, $i = 1, \ldots, n$, ΔS_i — площадь G_i. В каждой области G_i выберем любую точку $M_i(x_i, y_i)$ и составим интегральную сумму

$$\tau = \sum_{i=1}^{n} f(x_i, y_i)\Delta S_i.$$

С геометрической точки зрения каждое слагаемое в интегральной сумме τ представляет объём V_i цилиндра с основанием ΔS_i и высотой $f(x_i, y_i)$. Тогда всю сумму τ можно принять за приближенное значение объема тела T.

$$V_{\text{прибл}} \approx \sum_{i=1}^{n} f(x_i, y_i)\Delta S_i.$$

При $d \to 0$ это приближенное равенство становится точным:

$$V = \lim_{d\to 0} \sum_{i=1}^{n} f(x_i, y_i)\Delta S_i = \iint\limits_{G} f(x,y)\,dx\,dy$$

Отсюда следует геометрический смысл двойного интеграла: двойной интеграл от непрерывной, неотрицательной функции равен объему криволинейного цилиндра.

Свойства двойного интеграла

1. *Аддитивность двойного интеграла.* Пусть область G разбита на две области G_1 и G_2, не имеющих общих внутренних точек. Тогда

$$\iint\limits_{G} f(x,y)\,dx\,dy = \iint\limits_{G_1} f(x,y)\,dx\,dy + \iint\limits_{G_2} f(x,y)\,dx\,dy.$$

2. Пусть $f(x,y)$, $g(x,y)$ интегрируемые в области G функции, тогда для любых чисел α, β функция $\alpha f(x,y)+\beta g(x,y)$ интегрируема в G, и

$$\iint\limits_G (\alpha f(x,y)+\beta g(x,y))\,dx\,dy = \alpha\iint\limits_G f(x,y)\,dx\,dy + \beta\iint\limits_G g(x,y)\,dx\,dy.$$

3. Если функции $f(x,y)$ и $g(x,y)$ интегрируемы в G, то $f(x,y)\cdot g(x,y)$ также интегрируема в G.

4. Если функции $f(x,y)$ и $g(x,y)$ интегрируемы в G и $f(x,y)\leqslant g(x,y)$ для $(x,y)\in G$, то

$$\iint\limits_G f(x,y)\,dx\,dy \leqslant \iint\limits_G g(x,y)\,dx\,dy.$$

5. Если $f(x,y)$ интегрируема в G, то функция $|f(x,y)|$ также интегрируема и

$$\left|\iint\limits_G f(x,y)\,dx\,dy\right| \leqslant \iint\limits_G |f(x,y)|\,dx\,dy.$$

6. Интеграл $\iint\limits_G dx\,dy$ равен площади области G.

Вычисление двойного интеграла

Допустим, что граница области G образована отрезками прямых $x=a$, $x=b$, $a<b$ и графиками непрерывных на $[a,b]$ функций $y=\varphi_1(x)$ и $y=\varphi_2(x)$, причем $\varphi_1(x)\leqslant\varphi_2(x)$ на всем отрезке (рис. 3). Такую область условимся называть ***правильной относительно оси*** Oy. Она обладает удобным для нас свойством: для любого числа c прямая $x=c$ пересекает границу области G не более двух раз.

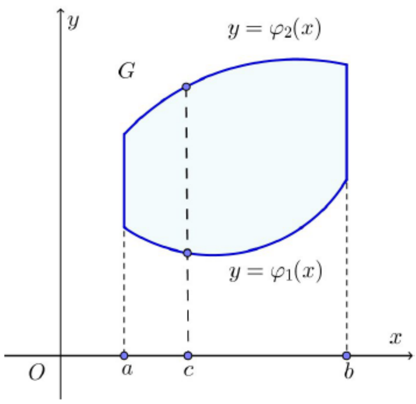


Рисунок 5.3.3.

Пусть на правильной области G относительно оси Oy определена непрерывная функция $f(x,y)$. Тогда справедливо равенство

$$\iint\limits_G f(x,y)\,dx\,dy = \int\limits_a^b dx\int\limits_{\varphi_1(x)}^{\varphi_2(x)} f(x,y)\,dy. \qquad (1)$$

Формула (1) представляет собой способ вычисления двойного интеграла. Правую часть этой формулы называют ***повторным интегралом*** от функции $f(x,y)$ в области G.

Если область интегрирования G является ***правильной относительно оси*** Ox, т. е. она ограничена прямыми $y = c$, $y = d$ и графиками непрерывных функций $x = \psi_1(y)$, $x = \psi_2(y)$, $\psi_1(y) \leqslant \psi_2(y)$ для $y \in [c, d]$ (рис. 4), а функция $f(x, y)$ — непрерывная в G, то справедлива формула

$$\iint\limits_G f(x,y)\,dx\,dy = \int\limits_c^d dy \int\limits_{\psi_1(y)}^{\psi_2(y)} f(x,y)\,dx. \qquad (2)$$

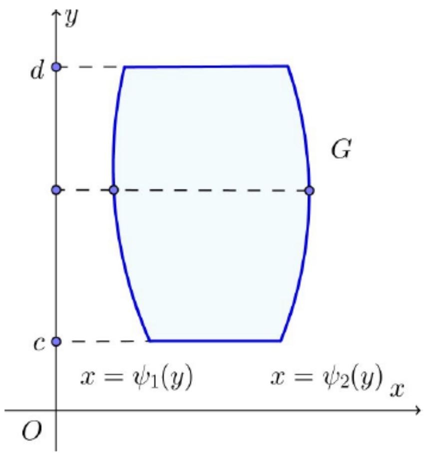


Рисунок 5.3.4.

Область более сложного вида часто удается разбить на правильные области относительно оси Oy и правильные области относительно оси Ox, к которым применимы формулы (1) и (2).

Замена переменных в двойном интеграле

Рассмотрим двойной интеграл $\iint\limits_G f(x,y)\,dx\,dy$. Замена переменных в двойном интеграле состоит в переходе от переменных x, y к новым переменным u, v по формулам

$$x = \varphi(u, v), \qquad y = \psi(u, v), \qquad (u, v) \in g. \qquad (3)$$

При этом каждая точка (x, y) области G соответствует некоторой точке (u, v) области g, а каждая точка (u, v) области g переходит в некоторую точку (x, y) в области G (рисунок 5.3.5).

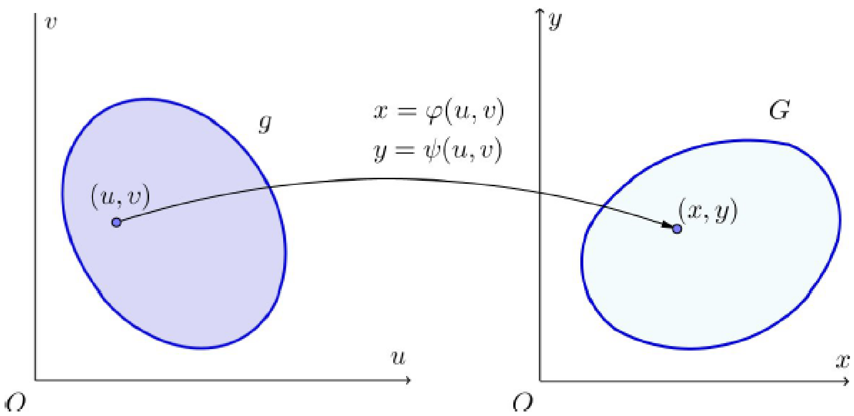


Рисунок 5.3.5.

Функции (3) называют также *отображением области g* плоскости (u, v) *на область G* плоскости (x, y). Область G называется *образом* области g, а область g — *прообразом* области G при отображении (3).

Пусть отображение (3) удовлетворяет следующим условиям:

1. Отображение (3) взаимно однозначно, т. е. различным точкам (u, v) области g соответствуют различные точки (x, y) области G.

2. Функции $\varphi(u, v)$, $\psi(u, v)$ имеют в области g непрерывные частные производные 1-го порядка.

3. **Якобиан** отображения (или определитель матрицы Якоби[1])

$$\frac{D(x,y)}{D(u,v)} = \begin{vmatrix} \varphi_u & \varphi_v \\ \psi_u & \psi_v \end{vmatrix}$$

отличен от нуля во всех точках области g.

Рисунок 5.3.6. Карл Якоби

Теорема 1. *Если преобразование (3) переводит замкнутую ограниченную область g в замкнутую ограниченную область G и удовлетворяет условиям 1)-3), а функция $f(x, y)$ непрерывна в области G, то справедлива* ***формула замены переменных***

$$\iint\limits_G f(x,y)\,dx\,dy = \iint\limits_g f(\varphi(u,v),\psi(u,v)) \left|\frac{D(x,y)}{D(u,v)}\right| du\,dv. \qquad (4)$$

Геометрические приложения двойных интегралов

1. Объем тела

Как было уже показано ранее, объем цилиндрического тела T, ограниченного сверху графиком непрерывной и неотрицательной функции $z = f(x, y)$, определенной в G, снизу областью G, лежащей в плоскости Oxy, с боков — цилиндрической поверхностью, находится по формуле

$$V = \iint\limits_G f(x,y)dx\,dy. \qquad (7)$$

2. Площадь плоской фигуры

Если в формуле (7) положить $f(x, y) = 1$, то получим цилиндр с высотой $H = 1$, объем которого численно равен площади S основания G. Отсюда следует, что площадь S плоской, замкнутой, ограниченной области G можно найти по формуле

$$S = \iint\limits_G dx\,dy. \qquad (8)$$

Если в (8) перейти к новым координатам u и v, то

$$S = \iint\limits_{g} \left| \frac{D(x,y)}{D(u,v)} \right| du\, dv.$$

В частности, в полярных координатах площадь S области G вычисляется по формуле

$$S = \iint\limits_{g} r\, dr\, d\varphi.$$

ТЕМА 6. ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ

6.1. Обыкновенные дифференциальные уравнения

Обыкновенным дифференциальным уравнением n–го порядка называется уравнение вида

$$F\,(x, y(x), y'(x), y''(x)\ldots y^{(n)}(x)) = 0, \tag{6.1.1}$$

где F – известная функция $(n\ +2)$-х переменных, x – независимая переменная из интервала (a, b), $y(x)$ – неизвестная функция.

Число n называется порядком дифференциального уравнения (6.1.1).

Действительная функция $y(x)$ называется решением (или интегралом) дифференциального уравнения (6.1.1) на промежутке (a, b), если она n раз дифференцируема на (a, b) и при подстановке в уравнение (6.1.1) обращает его в тождество.

Дифференциальное уравнение

$$F(x,y,y') = 0 \tag{6.1.2}$$

называется дифференциальным уравнением первого порядка.

Действительная функция y(x) называется решением (или интегралом) дифференциального уравнения (6.1.2) на промежутке (a, b), если она дифференцируема на (a, b) и при подстановке в уравнение (6.1.2) обращает его в тождество.

Дифференциальное уравнение обычно имеет бесконечно много решений. Чтобы выделить нужное решение, используют дополнительные условия.

Чтобы выделить единственное решение уравнения 1–го порядка обычно задают начальное условие:

$$y(x_0) = y_0.$$

Задачей Коши (или начальной задачей) называется задача отыскания решения $y = y(x)$ уравнения $F\,(x, y, y') = 0$, удовлетворяющее условию:

$$y(x_0) = y_0.$$

Любое конкретное решение $y = \varphi(x)$ уравнения 1-го порядка $F\,(x, y,y')= 0$ называется частным решением.

Общим решением дифференциального уравнения 1-го порядка (6.1.2) называется функция $y = \Phi\ (x,\ C),$ содержащая некоторую постоянную (параметр) С и обладающая следующими свойствами:

1) $y = \Phi\ (x,\ C)$ является решением уравнения при любом допустимом значении С;

2) при любом начальном условии $y(x_0) = y_0$, для которого задача Коши имеет единственное решение, существуют значения постоянной $C = A$, такое что решение $y = \Phi\ (x,\ A)$ удовлетворяет заданному начальному условию.

Иногда частное или общее решение уравнения удается найти только в неявной форме: $f\,(x, y) = 0$.

Такие неявно заданные решения называются частным интегралом или общим интегралом уравнения.

Если задачу об отыскании всех решений дифференциального уравнения удается свести к алгебраическим операциям и к вычислению конечного числа интегралов и производных от известных функций, то уравнение называется интегрируемым в квадратурах. Класс таких уравнений относительно узок.

Для решения уравнений, которые не интегрируются в квадратурах, применяются приближенные или численные методы.

Задача теории обыкновенных дифференциальных уравнений – исследование общих свойств решений, развитие точных, асимптотических и численных методов интегрирования уравнений.

Основные классы ДУ 1-го порядка, интегрируемые в квадратурах: с разделяющимися переменными, однородные, линейные, Бернулли, в полных дифференциалах

Уравнения с разделяющимися переменными

Обыкновенное дифференциальное уравнение первого порядка $y' = f(x,y)$ называется уравнением с разделяющимися переменными, если функцию $f(x, y)$ можно представить в виде произведения двух функций, зависящих только от x и y, т.е. $f(x,y) = p(x)h(y)$, где $p(x)$ и $h(y)$ − непрерывные функции. Таким образом, уравнением с разделяющимися переменными имеет:

$$y'=p(x)h(y) \qquad (6.1.3)$$

Рассматривая производную y' как отношение дифференциалов $\frac{dy}{dx}$, умножим обе части уравнения (6.1.3) на dx и разделим полученное уравнение на $h(y)$, тогда получим:

$$\frac{dy}{dx} = p(x)h(y) \Rightarrow \frac{dy}{h(y)} = p(x)dx.$$

Разумеется, нужно убедиться, что $h(y) \neq 0$. Если найдется число y_0, при котором $h(y_0) = 0$, то функция $y = y_0$ является решением дифференциального уравнения (6.1.3) Деление уравнения (6.1.3) на $h(y)$ может привести к потере указанного решения.

Обозначив $q(y) = \frac{1}{h(y)}$, запишем уравнение в форме: $q(y)dy = p(x)dx$.

Теперь переменные разделены, и мы можем проинтегрировать дифференциальное уравнение:

$$\int q(y)dy = \int p(x)dx + C,$$

где C − постоянная интегрирования.

Вычисляя интегралы, получаем выражение $Q(y) = P(x)+C$, описывающее общее решение уравнения с разделяющимися переменными.

Уравнения в полных дифференциалах

Определение. Дифференциальное уравнение первого порядка вида $P(x, y)\,dx + Q(x, y)\,dy = 0$ называется уравнением в полных дифференциалах, если существует такая функция двух переменных $u(x, y)$ с непрерывными частными производными, что справедливо выражение:

$$du(x,y) = P(x,y)dx + Q(x,y)dy.$$

Тогда общее решение уравнения в полных дифференциалах определяется формулой $u(x, y) = C$, где C − произвольная постоянная.

Теорема. Пусть функции $P(x, y)$ и $Q(x, y)$ имеют непрерывные частные производные в некоторой области D.

Дифференциальное уравнение $P(x, y)\,dx + Q(x, y)\,dy = 0$ будет являться уравнением в полных дифференциалах тогда и только тогда, если справедливо равенство $\frac{\partial Q}{\partial x} = \frac{\partial P}{\partial y}$.

Однородное дифференциальное уравнение

Определение. Дифференциальное уравнение первого порядка

$$\frac{dy}{dx} = f(x, y)$$

называется однородным, если правая часть удовлетворяет соотношению $f(tx, ty) = f(x, y)$ для всех действительныхзначений t.

Другими словами, правая часть должна являться однородной функцией нулевого порядка по отношению к переменным x и y: $f(tx, ty) = t^0 f(x, y) = f(x, y)$.

Однородное дифференциальное уравнение можно также записать в виде $y'=f(xy)$, или через дифференциалы: $P(x, y)\,dx + Q(x, y)\,dy = 0$, где $P(x, y)$ и $Q(x, y)$ − однородные функции одинакового порядка.

Функция $f(x, y)$ называется однородным n-го порядка, если правая часть удовлетворяет соотношению $f(tx, ty) = t^n f(x, y)$ для всех действительных значений t.

Однородное уравнение преобразуется в уравнение с разделяющимися переменными при помощи замены переменной $y = ux$.

Линейное уравнение первого порядка

Определение. Дифференциальное уравнение вида

$$y'+a(x)y = f(x),$$

где $a(x)$ и $f(x)$ − непрерывные функции, называется линейным неоднородным дифференциальным уравнением первого порядка.

Мы рассмотрим два метода решения указанных уравнений:

Сначала необходимо найти общее решение однородного уравнения: $y'+a(x)y = 0$.

Общее решение однородного уравнения содержит постоянную интегрирования C. Далее мы заменяем константу C на некоторую (пока еще неизвестную) функцию $C(x)$. Подставляя это решение в неоднородное дифференциальное уравнение, можно определить функцию $C(x)$. Описанный алгоритм называется методом вариации постоянной.

Во втором методе решение линейного уравнения ищется в виде произведения двух других функций $y = u(x)v(x)$.

Разумеется, оба метода приводят к одинаковому результату.

Уравнение Бернулли

Уравнение Бернулли является одним из наиболее известных нелинейных дифференциальных уравнений первого порядка. Оно записывается в виде

$$y'+a(x)y = b(x)y^m,$$

где $a(x)$ и $b(x)$ − непрерывные функции.

Если $m=0$, то уравнение Бернулли становится линейным дифференциальным уравнением. В случае, когда $m=1$, уравнение преобразуется в уравнение с разделяющимися переменными.

В общем случае, когда $m \neq 0,1$, уравнение Бернулли сводится к линейному дифференциальному уравнению с помощью подстановки $z=y^{1-m}$.

Основные понятия о ДУ высших порядков. Задача Коши. Уравнения, допускающие понижение порядка

Дифференциальное уравнение n-го порядка имеет вид $F(x, y, y', y'', \ldots, y^{(n)}) = 0$ или, если оно разрешено относительно $y^{(n)}$, то

$$y^{(n)} = f(x, y, y' \ldots y^{(n-1)}). \qquad (6.1.4)$$

Задача нахождения решения $y=\varphi(x)$ уравнения (6.1.4) удовлетворяющего начальным условиям

$$y(x_0)=y_0, y'(x_0)=y'_0, \ldots, y^{(n-1)}(x_0)=y^{(n-1)}{}_0, \qquad (6.1.5)$$

называется задачей Коши для уравнения (6.1.4).

Теорема существования и единственности решения задачи Коши

Если в уравнении 6.1.4 функция $f(x, y, y', y'', \ldots, y^{(n-1)})$

а) непрерывна по всем своим аргументам $x, y, y', y'', \ldots, y^{(n-1)}$ в некоторой области D их изменения;

б) имеет ограниченные в области D частные производные $\frac{\partial f}{\partial y}, \frac{\partial f}{\partial y'}, \frac{\partial f}{\partial y''}, \dots, \frac{\partial f}{\partial y^{(n-1)}}$ по аргументам $y, y', y'', \dots, y^{(n-1)}$,

то найдется интервал $x_0-h < x < x_0+h$, на котором существует единственное решение $y=\varphi(x)$ уравнения (9.3.1), удовлетворяющее условиям $y(x_0)=y_0$, $y'(x_0)=y'_0$, $y^{(n-1)}(x_0)=y^{(n-1)}{}_0$, где значения $x=x_0$, $y=y_0$, $y'=y'_0$, …, $y^{(n-1)}=y^{(n-1)}{}_0$ содержатся в области D.

Для уравнения второго порядка $y''=f(x, y, y')$ начальные условия имеют вид $y(x_0)=y_0$, $y'(x_0)=y'_0$, где x_0, y_0, y'_0 – данные числа. В этом случае теорема существования и единственности геометрически означает, что через данную точку $M_0(x_0, y_0)$ плоскости Oxy с данным тангенсом угла наклона касательной y'_0 проходит единственная кривая.

Общим решением дифференциального уравнения n-го порядка (6.1.4) называется множество всех его решений, определяемое формулой $y=\varphi(x, C_1, C_2, \dots, C_n)$, содержащей n произвольных постоянных $C_1, C_2, \dots, C_n$ таких, что если заданы начальные условия, то найдутся такие значения $C_1, C_2, \dots, C_n$, что функция $y=\varphi(x, C_1, C_2, \dots, C_n)$ будет являться решением уравнения (6.1.4), удовлетворяющим этим начальным условиям.

Любое решение, получаемое из общего решения при конкретных значениях произвольных постоянных $C_1, C_2, \dots, C_n$ называется **частным решением** дифференциального уравнения (6.1.4).

Уравнение вида $\Phi(x, y, C_1, C_2, \dots, C_n)=0$, которое определяет неявно общее решение дифференциального уравнения, называется общим интегралом уравнения.

Давая постоянным $C_1, C_2, \dots, C_n$, конкретные допустимые числовые значения, получим частный интеграл дифференциального уравнения. График частного решения или частного интеграла называется интегральной кривой данного дифференциального уравнения.

Линейные однородные дифференциальные уравнения высших порядков и свойства их решений. Структура общего решения линейного однородного дифференциального уравнения. Линейные однородные дифференциальные уравнения с постоянными коэффициентами

Линейное однородное дифференциальное уравнение n-го порядка имеет вид:

$$y^{(n)}+a_1(x)\,y^{(n-1)}+\dots+a_{n-1}(x)\,y'+a_n(x)\,y=0,$$

где $a_1(x), a_2(x), \dots, a_n(x)$ – непрерывные функции на некотором отрезке $[a, b]$.

Рассмотрим его частный случай: линейное однородное дифференциальное уравнение n-го порядка с постоянными коэффициентами $y^{(n)}+a_1y^{(n-1)}+\dots+a_{n-1}y'+a_ny = 0$, где $a_1, a_2, \dots, a_n$ – постоянные числа. Для каждого дифференциального уравнения с постоянными коэффициентами можно ввести характеристический многочлен $L(\lambda) = \lambda^n+a_1\lambda^{n-1}+\dots+a_{n-1}\lambda+a_n$.

Алгебраическое уравнение

$$\lambda^n+a_1\lambda^{n-1}+\dots+a_{n-1}\lambda+a_n = 0$$

называется характеристическим уравнением дифференциального уравнения.

Согласно основной теореме алгебры, многочлен степени n имеет ровно n корней с учетом их кратности. При этом корни уравнения могут быть как действительными, так и комплексными (даже если все коэффициенты $a_1, a_2, \dots, a_n$ – действительные).

Случай 1. Все корни характеристического уравнения действительные и различные

Предположим, что характеристическое уравнение $L(\lambda)= 0$ имеет n корней $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$. В этом случае общее решение дифференциального уравнения записывается в простом виде:

$$y(x) = C_1e^{\lambda_1 x}+C_2e^{\lambda_2 x}+\dots+C_ne^{\lambda_n x},$$

где $C_1, C_2, \dots, C_n$ – постоянные, зависящие от начальных условий.

Случай 2. Корни характеристического уравнения действительные и кратные

Пусть характеристическое уравнение $L(\lambda)=0$ степени n имеет m корней $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_m$, кратность которых, соответственно, равна $k_1, k_2, \dots, k_m$. Ясно, что выполняется условие $k_1+k_2+\dots+k_m = n$.Тогда общее решение однородного дифференциального уравнения с постоянными коэффициентами имеет вид $y(x) = C_1e^{\lambda_1 x} + C_2xe^{\lambda_1 x} + \dots + C_{k1}x^{k_1-1}e^{\lambda_1 x} + \dots + C_{n-km+1}e^{\lambda_m x} + C_{n-km+2}xe^{\lambda_m x} + \dots + C_nx^{k_m-1}e^{\lambda_m x}$.

Видно, что в формуле общего решения каждому корню λ_i кратности k_i соответствует ровно k_i членов, которые образуются умножением x в определенной степени на экспоненциальную функцию $e^{\lambda_i x}$. Степень x изменяется в интервале от 0 до k_i-1, где k_i – кратность корня λ_i.

Случай 3. Корни характеристического уравнения комплексные и различные

Если коэффициенты дифференциального уравнения являются действительными числами, то комплексные корни характеристического уравнения будут представляться в виде пар комплексно-сопряженных чисел:

$$\lambda_{1,2}=\alpha \pm i\beta,\ \lambda_{3,4}=\gamma \pm i\delta \dots$$

В этом случае общее решение записывается как:

$$y(x) =e^{\alpha x}(C_1\cos\beta x+C_2\sin\beta x) + e^{\gamma x}(C_3\cos\delta x+C_4\sin\delta x) + \cdots$$

Случай 4. Корни характеристического уравнения комплексные и кратные

Здесь каждой паре комплексно-сопряженных корней $\alpha \pm i\beta$ кратности k соответствует $2k$ частных решений:

$$e^{\alpha x}\cos\beta x,\ e^{\alpha x}\sin\beta x,\ e^{\alpha x}x\cos\beta x,\ e^{\alpha x}x\sin\beta x, \ldots, e^{\alpha x}x^{k-1}\cos\beta x,\ e^{\alpha x}x^{k-1}\sin\beta x.$$

Тогда часть общего решения дифференциального уравнения, соответствующая данной паре комплексно-сопряженных корней, конструируется следующим образом:

$$y\ (x)\ = e^{\alpha x}\ (C_1\cos\beta x + C_2\sin\beta x)\ +\ e^{\alpha x}x\ (C_3\cos\beta x + C_4\sin\beta x)\ + \cdots +\ x^{k-1}e^{\alpha x}\ (C_{2k-1}\cos\beta x + \ldots + C_{2k}\sin\beta x).$$

Линейные неоднородные дифференциальные уравнения высших порядков. Структура общего решения, принцип суперпозиции решений. Метод вариации произвольных постоянных. Линейные неоднородные дифференциальные уравнения с постоянными коэффициентами и правой частью специального вида

Линейное неоднородное дифференциальное уравнение n-го порядка имеет вид:

$$y^{(n)} + a_1(x)\, y^{(n-1)} + \cdots + a_{n-1}(x)\, y' + a_n(x)\, y = 0,$$

где $a_1(x),\ a_2(x),\ \ldots,\ a_n(x),\ f(x)$ − непрерывные функции на некотором отрезке $[a,\ b]$.

Общее решение $y(x)$ неоднородного уравнения представляется в виде суммы общего решения $y_0(x)$ соответствующего однородного уравнения и частного решения $y_1(x)$ неоднородного уравнения: $y(x) = y_0(x) + y_1(x)$.

При произвольной правой части $f\,(x)$ для поиска общего решения неоднородного уравнения используется метод вариации постоянных. В случае если правая часть представляет собой произведение многочлена и экспоненциальной функции, частное решение удобнее искать методом неопределенных коэффициентов.

Метод вариации постоянных

Предположим, что общее решение однородного дифференциального уравнения n-го порядка известно и представляется формулой:

$$y\ (x) = C_1Y_1(x) + C_2Y_2(x) + \cdots + C_nY_n(x).$$

Метод вариации постоянных (или метод Лагранжа) заключается в том, что вместо постоянных чисел $C_1,\ C_2,\ \ldots,\ C_n$ мы рассматриваем функции $C_1(x)$, $C_2(x),\ \ldots,\ C_n(x)$. Эти функции подбираются таким образом, чтобы решение

$y=C_1(x)Y_1(x)+C_2(x)Y_2(x)+\cdots+C_n(x)Y_n(x)$ удовлетворяло исходному неоднородному уравнению.

Метод неопределенных коэффициентов

Правая часть $f(x)$ неоднородного дифференциального уравнения часто представляет собой многочлен, экспоненциальную или тригонометрическую функцию, или некоторую комбинацию указанных функций. В этом случае решение удобнее искать с помощью метода неопределенных коэффициентов.

Подчеркнем, что данный метод работает лишь для ограниченного класса функций в правой части, таких как $f(x)=P_n(x)e^{\alpha x}$;

$f(x)=[P_n(x)cos(\beta x)+Q_m(x)sin(\beta x)]e^{\alpha x}$, где $P_n(x)$ и $Q_m(x)$ − многочлены степени n и m,соответственно.

В обоих случаях выбор частного решения должен соответствовать структуре правой части неоднородного дифференциального уравнения. В случае 1, если число α в экспоненциальной функции совпадает с корнем характеристического уравнения, то частное решение будет содержать дополнительный множитель x^s, где s − кратность корня α в характеристическом уравнении.

В случае 2, если число $\alpha+\beta i$ совпадает с корнем характеристического уравнения, то выражение для частного решения будет содержать дополнительный множитель x.

Неизвестные коэффициенты можно определить подстановкой найденного выражения для частного решения в исходное неоднородное дифференциальное уравнение.

Принцип суперпозиции

Если правая часть неоднородного уравнения представляет собой сумму нескольких функций вида $P_n(x)e^{\alpha x}$ и $[P_n(x)cos(\beta x) +Q_m(x)sin(\beta x)]e^{\alpha x}$, то частное решение дифференциального уравнения также будет являться суммой частных решений, построенных отдельно для каждого слагаемого в правой части.

Задачи, приводящие к системам дифференциальных уравнений. Нормальные системы. Задача Коши, общее решение. Связь между нормальной системой n уравнений и дифференциальным уравнением порядка n. Интегрирование линейных однородных и линейных неоднородных систем дифференциальных уравнений с постоянными коэффициентами методом исключения

Для решения многих задач математики, физики, техники (задач динамики криволинейного движения; задач электротехники для нескольких электрических цепей; определения состава системы, в которой протекают несколько последовательных химических реакций 1 порядка; отыскания векторных линий поля и других) нередко требуется несколько функций.

Нахождение этих функций может привести к нескольким ДУ, образующим систему.

Системой ДУ называется совокупность ДУ, каждое из которых содержит независимую переменную, искомые функции и их производные.

Общий вид системы ДУ первого порядка, содержащей n искомых функций $y_1, y_2, \ldots, y_n$, следующий:

Система ДУ первого порядка, разрешенных относительно производной, т. е. система вида

$$\begin{cases} F_1(x, y_1, y_2, \ldots, y_n, y_1', y_2', \ldots, y_n') = 0, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ F_n(x, y_1, y_2, \ldots, y_n, y_1', y_2', \ldots, y_n') = 0, \end{cases}$$

$$\begin{cases} \frac{dy_1}{dx} = f_1(x, y_1, y_2, \ldots, y_n), \\ \frac{dy_2}{dx} = f_2(x, y_1, y_2, \ldots, y_n), \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ \frac{dy_n}{dx} = f_n(x, y_1, y_2, \ldots, y_n) \end{cases} \qquad (6.1.6)$$

называется **нормальной системой ДУ**. При этом предполагается, что число уравнений равно числу искомых функций.

Замечание. Во многих случаях системы уравнений и уравнения высших порядков можно привести к нормальной системе вида (6.1.6).

Так, система трех дифференциальных уравнений второго порядка

$$\begin{cases} \frac{d^2x}{dt^2} = F_1(x, y, z, t, x', y', z'), \\ \frac{d^2y}{dt^2} = F_2(x, y, z, t, x', y', z'), \\ \frac{d^2z}{dt^2} = F_3(x, y, z, t, x', y', z'), \end{cases}$$

описывающая движение точки в пространстве, путем введения новых переменных:

$$\frac{dx}{dt} = u, \frac{dy}{dt} = v, \frac{dz}{dt} = w,$$

приводится к нормальной системе ДУ:

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = u, \\ \frac{dy}{dt} = v, \\ \frac{dz}{dt} = w, \\ \frac{du}{dt} = F_1(x, y, z, t, u, v, w), \\ \frac{dv}{dt} = F_2(x, y, z, t, u, v, w), \\ \frac{dw}{dt} = F_3(x, y, z, t, u, v, w). \end{cases}$$

Уравнение третьего порядка $y''' = f(x, y, y', y'')$ путем замены $y'=p$, $y'' = p' = q$ сводится к нормальной системе ДУ:

$$\begin{cases} y' = p, \\ p' = q, \\ q' = f(x, y, p, q). \end{cases}$$

Из сказанного выше следует полезность изучения именно нормальных систем.

Решением системы (6.1.6) называется совокупность из n функций удовлетворяющих каждому из уравнений этой системы.

Начальные условия для системы (9.6.1) имеют вид

$$y_1(x_0) = y_1^0,\ y_2(x_0) = y_2^0,\ y_n(x_0) = y_n^0. \qquad (6.1.7)$$

Задача Коши для системы (9.6.1) ставится следующим образом: найти решение системы (9.6.1), удовлетворяющее начальным условиям (6.1.7).

Условия существования и единственности решения задачи Коши описывает следующая теорема, приводимая здесь без доказательства.

Теорема 9.1 (Коши). Если в системе (6.1.6) все функции $f_i(x, y_1, \dots, y_n)$ непрерывны вместе со всеми своими частными производными по y_i в некоторой области D ((n+1)–мерного пространства), то в каждой точке $M_0(x_0, y_1^0, y_2^0, \dots, y_n^0)$ этой области существует, и притом единственное, решение $y_1 = \varphi_1(x), y_2 = \varphi_2(x), \dots, y_n = \varphi_n(x)$ системы, удовлетворяющее начальным условиям (6.1.7)

Меняя в области D точку M_0 (т. е. начальные условия), получим бесчисленное множество решений, которое можно записать в виде решения, зависящего от n произвольных постоянных:

$$y_1 = \varphi_1(x, C_1, C_2, \dots, C_n), \dots,\ y_n = \varphi_n(x, C_1, C_2, \dots, C_n).$$

Это решение является общим, если по заданным начальным условиям (6.1.7) можно однозначно определить постоянные C_1, C_2, …, C_n из системы уравнений:

$$\begin{cases} \varphi_1(x, C_1, C_2, \dots, C_n) = y_1^0, \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ \varphi_n(x, C_1, C_2, \dots, C_n) = y_n^0. \end{cases}$$

Решение, получающееся из общего при конкретных значениях постоянных C_1, C_2, …, C_n, называется частным решением системы (6.1.6).

Интегрирование нормальных систем

Одним из основных методов интегрирования нормальной системы ДУ является метод сведения системы к одному ДУ высшего порядка (обратная задача – переход от ДУ к системе – рассмотрена выше на примере). Техника этого метода основана на следующих соображениях. Пусть задана нормальная система (6.1.6). Продифференцируем по x любое, например первое, уравнение:

$$\frac{d^2y_1}{dx^2}=\frac{\partial f_1}{\partial x}+\frac{\partial f_1}{\partial y_1}\cdot\frac{\partial y_1}{\partial x}+\frac{\partial f_1}{\partial y_2}\cdot\frac{\partial y_2}{\partial x}+\cdots+\frac{\partial f_1}{\partial y_n}\cdot\frac{\partial y_n}{\partial x}.$$

Подставив в это равенство значения производных $\frac{dy_1}{dx},\frac{dy_2}{dx},\dots,\frac{dy_n}{dx}$ из системы (9.6.1), получим

$$\frac{d^2y_1}{dx^2}=\frac{\partial f_1}{\partial x}+\frac{\partial f_1}{\partial y_1}\cdot f_1+\frac{\partial f_1}{\partial y_2}\cdot f_2+\cdots+\frac{\partial f_1}{\partial y_n}\cdot f_n,$$

или, коротко,

$$\frac{d^2y_1}{dx^2}=F_2(x,y_1,y_2,\dots,y_n).$$

Продифференцировав полученное равенство еще раз и заменив значения производных $\frac{dy_1}{dx},\dots,\frac{dy_n}{dx}$ из системы (6.1.6), получим

$$\frac{d^3y_1}{dx^3}=F_3(x,y_1,y_2,\dots,y_n).$$

Продолжая этот процесс (дифференцируем – подставляем – получаем), находим:

$$\frac{d^ny_1}{dx^n}=F_n(x,y_1,y_2,\dots,y_n).$$

Соберем полученные уравнения в систему:

$$\begin{cases}\frac{dy_1}{dx}=f_1(x,y_1,y_2,\dots,y_n),\\ \frac{d^2y_1}{dx^2}=F_2(x,y_1,y_2,\dots,y_n),\\ \frac{d^3y_1}{dx^3}=F_3(x,y_1,y_2,\dots,y_n),\\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\\ \frac{d^ny_1}{dx^n}=F_n(x,y_1,y_2,\dots,y_n).\end{cases}\qquad(6.1.8)$$

Из первых *(n-1)* уравнений системы (6.1.8) выразим функции $y_2,y_3,\dots,y_n$ через x, функцию y_1 и ее производные $y_1',y_1'',\dots,y_1^{(n-1)}$. Получим:

$$\begin{cases} y_2 = \psi_2\left(x, y_1, y_1', \dots, y_1^{(n-1)}\right), \\ y_3 = \psi_3\left(x, y_1, y_1', \dots, y_1^{(n-1)}\right) \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ y_n = \psi_n\left(x, y_1, y_1', \dots, y_1^{(n-1)}\right). \end{cases} \qquad (6.1.9)$$

Найденные значения $y_2, y_3, \dots, y_n$ подставим в последнее уравнение системы (6.1.8). Получим одно ДУ n-го порядка относительно искомой функции y_1: $\frac{d^n y_1}{dx} = ф\left(x, y_1, y_1', \dots, y_1^{(n-1)}\right)$. Пусть его общее решение есть $y_1 = \varphi_1(x, C_1, C_2, \dots, C_n)$.

Продифференцировав его *(n-1)* раз и подставив значения производных $y_1', y_1'', \dots, y_1^{(n-1)}$ в уравнения системы (9.6.4), найдем функции $y_2, y_3, \dots, y_n$:

$y_2 = \varphi_2(x, C_1, C_2, \dots, C_n), \dots, y_n = \varphi_n(x, C_1, C_2, \dots, C_n)$.

Системы линейных ДУ с постоянными коэффициентами

Рассмотрим еще один метод интегрирования нормальной системы уравнений (6.1.6) в случае, когда она представляет собой систему линейных однородных ДУ с постоянными коэффициентами, т. е. систему вида:

$$\begin{cases} \frac{dy_1}{dx} = a_{11}y_1 + a_{12}y_2 + \dots + a_{1n}y_n, \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ \frac{dy_n}{dx} = a_{n1}y_1 + a_{n2}y_2 + \dots + a_{nn}y_n. \end{cases}$$

Для простоты ограничимся рассмотрением системы трех уравнений с тремя неизвестными функциями y_1, y_2 и y_3:

$$\begin{cases} \frac{dy_1}{dx} = a_{11}y_1 + a_{12}y_2 + a_{13}y_3, \\ \frac{dy_2}{dx} = a_{21}y_1 + a_{22}y_2 + a_{23}y_3, \\ \frac{dy_3}{dx} = a_{31}y_1 + a_{32}y_2 + a_{33}y_3. \end{cases} \qquad (6.1.10)$$

Будем искать частное решение системы (9.6.5) в виде

$$y_1 = \alpha \cdot e^{kx}, y_2 = \beta \cdot e^{kx},\ y_3 = \gamma \cdot e^{kx} \qquad (6.1.11)$$

где α, β, γ, k – постоянные, которые надо подобрать (найти) так, чтобы функции 6.1.11 удовлетворяли системе (6.1.10).

Подставив эти функции в систему (6.1.10) и сократив на множитель $e^{kx} \neq 0$, получим:

$$\begin{cases} \alpha k = a_{11}\alpha + a_{12}\beta + a_{13}\gamma, \\ \beta k = a_{21}\alpha + a_{22}\beta + a_{23}\gamma, \\ \gamma k = a_{31}\alpha + a_{32}\beta + a_{33}\gamma. \end{cases}$$

или

$$\begin{cases}(a_{11}-k)\alpha + a_{12}\beta + a_{13}\gamma = 0,\\ a_{21}\alpha + (a_{22}-k)\beta + a_{23}\gamma = 0,\\ a_{31}\alpha + a_{32}\beta + (a_{33}-k)\gamma = 0.\end{cases} \qquad (6.1.12)$$

Систему (6.1.12 можно рассматривать как однородную систему трех алгебраических уравнений с тремя неизвестными α, β, γ.

Чтобы эта система имела ненулевое решение, необходимо и достаточно, чтобы определитель системы был равен нулю:

$$\begin{vmatrix} a_{11}-k & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22}-k & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33}-k \end{vmatrix} = 0. \qquad (6.1.13)$$

ТЕМА 7. ЧИСЛОВЫЕ И ФУНКЦИОНАЛЬНЫЕ РЯДЫ

7.1. Числовые ряды

Определение. Числовым рядом называется выражение вида

$$a_1 + a_2 + a_3 + \cdots + a_n + \cdots = \sum_{n=1}^{\infty} a_n$$

где $a_1, a_2, \ldots, a_n \ldots$ – действительные числа, называемые членами ряда, образуют бесконечную последовательность; член a_n называется общим членом ряда.

Каждому натуральному n сопоставляется сумма первых n членов последовательности $\{a_n\}$:

$$S_1 = a_1, S_2 = a_1 + a_2 + \cdots, S_n = \sum_{k=1}^{n} a_k = a_1 + a_2 + a_3 + \cdots + a_n$$

Значения S_n называют **частичными суммами ряда**. Они образуют последовательность $\{S_n\}$ последовательность частичных сумм числового ряда.

Если последовательность частичных сумм данного ряда имеет предел S, то есть $\lim_{n\to\infty} S_n = S$, то ряд сходится, а число S называется его **суммой**.

Таким образом, если существует число

$$S = \lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} a_i$$

то в этом случае пишут:

$$a_1 + a_2 + a_3 + \ldots + a + \ldots = S$$

Или

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n = S$$

Если предел частичных сумм не существует или бесконечен, то ряд называется **расходящимся**.

Таким образом, сумма ряда – это, по определению, предел последовательности его частичных сумм.

Пусть есть геометрическая прогрессия $\{b_n = b_1 q^{n-1}\}$, знаменатель которой q по абсолютной величине меньше единицы $(-1 < q < 1)$. Вычислим сумму первых n членов геометрической прогрессии:

$$S_n = b_1 + b_1 q^n + b_1 q^2 + \ldots + b_1 q^{n-1} = b_1 \frac{1-q^n}{1-q}$$

Очевидно, что при $|q| < 1$ с ростом n значение q^n стремится к нулю. Тогда значение S_n стремится к $\frac{b_1}{1-q}$ и это число называется суммой всех членов бесконечной убывающей геометрической прогрессии.

Таким образом,

$$b_1 + b_1q^n + b_1q^2 + \ldots + b_1q^{n-1} = \lim_{n\to\infty} \frac{b1}{1-q}$$

Действия над рядами. Простейшие свойства числовых рядов

Свойство 1. Если числовой ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty} u_n = u_1 + u_2 + u_3 + u_4 + \ldots \quad (7.1.1)$$

сходится, и его сумма равна S, то ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty} cu_n = cu_1 + cu_2 + cu_3 + cu_4 + \ldots \quad (7.1.2)$$

где c – произвольное число, также сходится и его сумма равна cS. Если же ряд (7.1.1) расходится и $c \neq 0$, то ряд расходится.

Свойство 2. Если сходится числовой ряд (7.1.1 и сходится ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty} v_n$$

а их суммы равны S_1 и S_2 соответственно, то сходятся и ряды

$$\sum_{n=1}^{\infty} (u_n \pm v_n)$$

причём сумма каждого равна соответственно $S_1 \pm S_2$.

Необходимое условие сходимости ряда

Теорема. Если числовой ряд $u_1 + u_2 + u_3 + \ldots + u_n + \ldots$ сходится, то предел общего члена ряда u_n стремится к нулю:

$\lim_{n\to\infty} u_n = 0.$

Это **необходимый** признак сходимости ряда (но не достаточный!). Если же общий член числового ряда не стремится к нулю, то ряд расходится – это достаточный признак расходимости.

Признаки сходимости знакоположительных числовых рядов: интегральный признак, признаки сравнения, признаки Даламбера и Коши. Знакочередующиеся ряды, признак Лейбница. Оценка остатка ряда. Знакопеременные ряды, абсолютная и условная сходимость

Знакоположительные числовые ряды

Рассмотрим один из частных случаев числовых рядов, так называемых, **знакоположительных числовых рядов.** Для них верно следующее неравенство $a_n \geq 0$.

Теорема (**критерий сходимости знакоположительных рядов**). Знакоположительный ряд:

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n$$

сходится тогда и только тогда, когда последовательность его частичных сумм S_n ограничена.

Теорема (первый признак сравнения).

Пусть

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n \text{ и } \sum_{n=1}^{\infty} b_n - \text{знакоположительные ряды, и } 0 \le a_n \le b_n$$

Тогда:

1.

$$\text{Если ряд } \sum_{n=1}^{\infty} b_n \text{ сходится, то } \sum_{n=1}^{\infty} a_n \text{ сходится.}$$

2.

$$\text{Если ряд } \sum_{n=1}^{\infty} a_n \text{ расходится, то } \sum_{n=1}^{\infty} b_n \text{ расходится.}$$

Теорема (второй признак сравнения).

Пусть

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n \text{ и } \sum_{n=1}^{\infty} b_n - \text{знакоположительные ряды, причём } a_n \sim b_n \text{ при } n \to \infty.$$

Тогда эти два ряда сходятся или расходятся одновременно.

Теорема (признак Даламбера).

Пусть

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n - \text{знакоположительные ряды и } \lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = q$$

Тогда:

1. Если $0 \le q < 1$, то ряд сходится.
2. Если $q > 1$, то ряд расходится.

Теорема (радикальный признак Коши).

Пусть

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n - \text{знакоположительный ряд и существует предел:}$$

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n} = q, (q \ \geq 0)$$

Тогда:

1. Если $q < 1$, то ряд сходится.
2. Если $q > 1$, то ряд расходится.

Теорема (интегральный признак Коши). Пусть функция $f(x) > 0$ определена на [1; ∞], непрерывна там и является невозрастающей. Тогда ряд: $\sum_{n=1}^{\infty} f(n)$ сходится тогда и только тогда, когда сходиться несобственный интеграл:

$$\int_1^{\infty} f(x)dx$$

Пример: Исследование ряда Дирихле:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^a}, (a > \ 0).$$

Функция $f(x) = \frac{1}{x^a}$ монотонно убывает, непрерывна [1; ∞].

$$\int_1^{\infty} \frac{dx}{x^a} \text{ сходится при } \alpha > 1 \text{ и расходится при } \alpha \leq 1 .$$

Оценить частичные суммы ряда можно следующим способом (следует из доказательства теоремы об интегральном признаке Коши):

$$\int_1^{N+1} f(x)dx \leq \sum_{n-1}^{N} f(n) \leq f(1) + \int_1^{N} f(x)dx$$

Знакопеременные и знакочередующиеся ряды

Рассмотрим ещё два интересных частных случая числовых рядов –это **знакопеременные и знакочередующиеся ряды**.

Определение. Ряд называется **знакочередующимся**, если он имеет вид:

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n a_n, \text{где } a_n > \ 0.$$

Определение. Числовой ряд, содержащий бесконечное множество положительных и бесконечное множество членов, называется **знакопеременным**.

Пример знакочередующегося ряда:

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{1}{n^3}$$

Пример знакопеременного ряда:

$$\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{\frac{n(n+1)}{2}}\frac{1}{n^3}$$

Замечание. Признак Даламбера и оба признака Коши в случае знакопеременных и знакочередующихся рядов не работают!

Определение. Числовой ряд

$\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ называется абсолютно сходящимся, если сходится ряд $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|$

Определение. Ряд называется **условно сходящимся**, если он сходится, но не является абсолютно сходящимся.

Теорема. Абсолютно сходящийся ряд сходится.

Теорема (**признак Лейбница**).

Пусть числовая последовательность $a_1, a_2, \dots, a_n, \dots (a_n > 0)$ монотонно убывает и

$$\lim_{n\to\infty} a_n = 0\,.$$

Тогда сходится знакочередующейся ряд:

$$\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n a_n\,.$$

7.2. Функциональные и степенные ряды

Функциональные ряды, область сходимости и сумма ряда. Равномерная сходимость функциональных рядов. Признак Вейерштрасса равномерной сходимости. Свойства равномерно сходящихся функциональных рядов: теоремы о непрерывности суммы, о почленном дифференцировании и почленном интегрировании

Определение. Ряд, членами которого являются функции от x, называется **функциональным**:

$$\sum_{i=1}^{\infty} f_i(x) = f_1(x) + f_2(x) + \dots + f_n(x) + \dots \quad (7.2.1)$$

Придавая x определённое значение x_o, мы получим числовой ряд

$f_1(x_0) + f_2(x_0) + \dots + f_n(x_0) + \dots$, который может быть как сходящимся, так и расходящимся.

Определение. Если полученный числовой ряд сходится, то точка x_o называется **точкой сходимости ряда** (7.2.1).

Определение. Множество всех числовых значений x, при которых функциональный ряд (7.2.1) сходится, называется его **областью сходимости**.

В области сходимости функционального ряда (7.2.1) его сумма является некоторой функцией от x: $S = S(x)$

Определение. Областью сходимости ряда называется множество точек сходимости функционального ряда, т.е. множество значений аргумента x, для которых ряд:

$$f_1(x) + f_2(x) + \cdots + f_n(x) + \cdots = \sum_{i=1}^{\infty} f_i(x)$$

сходится, т.е.

$$\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x) = \lim_{n\to\infty} s_n(x)$$

Определение. Функциональная последовательность $f_1(x), f_2(x) \ldots, f_n(x)$, называется **равномерно сходящейся** к функции $f(x)$ на множестве X, если для любого $\varepsilon > 0$ существует такой номер n_0, что для всех точек $x \in X$ и всех номеров $n > n_0$ выполняется неравенство

$$| f_n(x) - f(x)| < \varepsilon.$$

Признак Вейерштрасса является признаком равномерной сходимости рядов.

Рассмотрим функциональный ряд:

$$\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x) \ .$$

Пусть существует такая числовая последовательность a_n, что для любого $x \in X$ выполняется неравенство $|u_n(x)| < a_n$, кроме того, сходится числовой ряд:

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n$$

Тогда функциональный ряд

$\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x)$ сходится на множестве X абсолютно и равномерно.

Для доказательства признака Вейерштрасса достаточно проверить справедливость критерия Коши.

Обычный числовой ряд состоит из чисел:

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n = a_1 + a_2 + a_3 + a_4 + \cdots$$

Функциональный же ряд состоит из функций:

$$\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x) = u_1(x) + u_2(x) + u_3(x) + u_4(x) + \cdots$$

Приведём пример функционального ряда:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin x}{(n+1)\cdot 2^n}$$

Как и числовой ряд, любой функциональный ряд можно записать в развернутом виде:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin x}{(n+1)\cdot 2^n} = \frac{\sin x}{2\cdot 2^1} + \frac{\sin x}{3\cdot 2^2} + \frac{\sin x}{4\cdot 2^3} + \frac{\sin x}{5\cdot 2^4} + \frac{\sin x}{6\cdot 2^5} + \ldots$$

Как видно, все члены функционального ряда:

$$u_1(x), u_2(x), u_3(x), u_4(x), u_5(x), \ldots$$

являются функциями, причем $\left|\frac{sinx}{(n+1)2^n}\right| \le \frac{1}{(n+1)2^n}$ на множестве R.

Очевидно, что сходится числовой ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(n+1)2^n}$$

Тогда по признаку Вейерштрасса данный функциональный ряд сходится равномерно на множестве R.

Степенные ряды, теорема Абеля. Радиус, интервал и область сходимости степенного ряда. Свойства степенных рядов

Наиболее популярной разновидностью функционального ряда является степенной ряд.

Определение. Степенным рядом называется функциональный вида

$$\sum_{n=1}^{\infty} c_n x^n, \text{ где } c_n - \text{ действительные числа.}$$

Простейший степенного пример:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n} = x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} + \frac{x^4}{4} + \frac{x^5}{5} + \cdots$$

Очень часто степенной ряд можно встретить в следующих «модификациях»:

$$\sum_{n=1}^{\infty} c_n (x-a)^n \text{ или } \sum_{n=1}^{\infty} c_n (x+a)^n, \text{ где } a - \text{ константа.}$$

Например,

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2^n(x+2)^n}{n}=2(x+2)+\frac{2^2(x+2)^2}{2^2}+\frac{2^3(x+2)^3}{3^2}+\frac{2^4(x+2)^4}{4^2}+\frac{2^5(x+2)^5}{5^2}+\dots$$

Замечание. Строго говоря, упрощенные записи степенного ряда $\sum_{n=1}^{\infty}c_nx^n$, $\sum_{n=1}^{\infty}c_n(x-a)^n$ или $\sum_{n=1}^{\infty}c_n(x+a)^n$ не совсем корректны.

В показателе степени вместо одинокой буквы «*n*» может располагаться более сложное выражение, например,

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^{2n}}{n!}=x^2+\frac{x^4}{2!}+\frac{x^6}{3!}+\frac{x^8}{4!}+\frac{x^{10}}{5!}+\cdots$$

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sqrt{n}\cdot(x-1)^{3n-2}}{3^n}=\frac{(x-1)}{3}+\frac{\sqrt{2}\cdot(x-1)^4}{3^2}+\frac{\sqrt{3}\cdot(x-1)^7}{3^3}+\frac{\sqrt{4}\cdot(x-1)^{10}}{3^4}+\frac{\sqrt{5}\cdot(x-1)^{13}}{3^5}+\cdots$$

Сходимость степенного ряда. Интервал сходимости, радиус сходимости и область сходимости

Расмотрим степенной ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^n}{n^2}$$

Переменная x может принимать любое действительное значение от «минус бесконечности» до «плюс бесконечности». Подставим в общий член ряда несколько произвольных значений x:

Если $x=1$, то $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1^n}{n^2}=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}$

Если $x=-1$, то $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n^2}$

Если $x=3$, то $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{3^n}{n^2}$

Если $x=\frac{1}{5}$, то $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-\frac{1}{5})^n}{n^2}=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\frac{(-1)^n}{5^n}}{n^2}=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n^2\cdot5^n}$ и так далее.

Очевидно, что, подставляя в:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n^2}$$

то или иное значение x, мы получаем различные числовые ряды. Некоторые числовые ряды будут сходиться, а некоторые расходиться. И наша задача найти множество значений x, при котором степенной ряд:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n^2}$$

будет сходиться.

Такое множество и называется **областью сходимости** степенного ряда.

Для любого степенного ряда возможны три случая:

1) Степенной ряд сходится абсолютно на некотором интервале (a,b). Иными словами, если мы выбираем любое значение x из интервала (a,b) и подставляем его в общий член степенного ряда, то у нас получается абсолютно сходящийся числовой ряд. Такой интервал (a,b) и называется **интервалом сходимости** степенного ряда.

Радиусом сходимости степенного ряда

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$$

Называется такое число R, при котором ряд сходится, если $|x| < R$, и расходится, если $|x| > R$.

Для нахождения радиуса сходимости R составим ряд и абсолютных величин членов ряда

$$\sum_{n=0}^{\infty} |a_n x^n| \text{ и } \lim_{n\to\infty}\left|\frac{u_{n+1}}{u_n}\right| = \lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_{n+1}x^{n+1}}{a_n x^n}\right| = |x| \lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right|$$

В соответствии с признаком Даламбера ряда сходится, есои этот предел меньше единицы, т.е.

$$|x| \lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| < 1 \iff |x| \lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_n}{a_{n+1}}\right|$$

И расходится, если

$$|x| \lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| > 1 \iff |x| \lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_n}{a_{n+1}}\right|$$

Отсюда следует, что радиус сходимости равен

$$R = \lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_n}{a_{n+1}}\right|$$

С помощью радиуса сходимости можно найти интервал сходимости степенного ряда. При $x \in (-R; R)$ степенной ряд сходится. Для того чтобы найти область сходимости, необходимо дополнительно исследовать сходимость ряда в граничных точках интервала сходимости.

А что будет происходить на концах интервала (a,b)? В точках $x = a$, $x = b$ степенной ряд может как сходиться, так и расходится и для выяснения этого необходимо проводить дополнительное исследование. После такого исследования речь идёт уже об области сходимости ряда:

– Если установлено, что степенной ряд расходится на обоих концах интервала, то область сходимости ряда совпадает с интервалом сходимости: (a,b).

– Если установлено, что степенной ряд сходится на одном конце интервала и расходится на другом, то область сходимости ряда представляет собой полуинтервал: $[a,b)$ или $(a,b]$.

– Если установлено, что степенной ряд сходится на обоих концах интервала, то область сходимости ряда представляет собой отрезок: $[a; b]$.

Термины очень похожи, область сходимости ряда – это чуть более детализированный интервал сходимости ряда.

2) Степенной ряд сходится абсолютно при любом значении x. То есть, какое бы значение x мы не подставили в общий член степенного ряда, в любом случае у нас получится абсолютно сходящийся числовой ряд. Интервал сходимости и область сходимости в данном случае совпадают: $(-\infty;+\infty)$. Радиус сходимости: $R = +\infty$.

3) Степенной ряд сходится в единственной точке. Если ряд имеет вид:

$$\sum_{n=1}^{\infty} c_n x^n,$$

то он будет сходиться в единственной точке $x = 0$. В этом случае, интервал сходимости и область сходимости ряда тоже совпадают и равны нулю: $x = 0$. Если ряд имеет вид:

$$\sum_{n=1}^{\infty} c_n (x-a)^n,$$

то он будет сходиться в единственной точке $x = a$, если ряд имеет вид:

$$\sum_{n=1}^{\infty} c_n (x+a)^n$$

то, понятно, что в точке $x = -a$. Радиус сходимости ряда во всех случаях, естественно, нулевой: $R = 0$. Других вариантов нет. Область сходимости степенного ряда – это всегда либо единственная точка, либо любое x, либо интервал (a,b) (возможно полуинтервал, отрезок).

Пример. Найти область сходимости степенного ряда

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n^2}$$

Решение:

$$\lim_{n\to\infty}\left|\frac{u_{n+1}}{u_n(x)}\right| = \lim_{n\to\infty}\frac{\frac{x^{n+1}}{(n+1)^2}}{\frac{x^n}{n^2}} = \lim_{n\to\infty}\left|\frac{n^2\cdot x^{n+1}}{(n+1)^2\cdot x^n}\right| =$$

$$\lim_{n\to\infty}\left|\frac{n^2\cdot x\cdot x^n}{(n^2+2n+1)\cdot x^n}\right| =$$

$$= \lim_{n\to\infty}|x|\ \frac{n^2}{n^2+2n+1} = \frac{\infty}{\infty} = |x|\ \lim_{n\to\infty}\frac{\frac{n^2}{n^2}}{\frac{n^2+2n+1}{n^2}} = |x|\cdot 1 = |x|,$$ составим неравенство $|x| < 1$.

$-1 < x < 1$ – интервал сходимости исследуемого степенного ряда.

$$\text{При } x = -1 \Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n^2}$$

Исследуем данный ряд на сходимость:

$$\lim_{n\to\infty}|a_n| = \lim_{n\to\infty}\frac{1}{n^2} = 0$$

– члены ряда убывают по модулю. Каждый следующий член ряда по модулю меньше, чем предыдущий, значит, убывание монотонно. Ряд знакочередующийся.

Вывод: ряд сходится.

С помощью ряда, составленного из модулей, выясним, как именно:

$$\sum_{n=1}^{\infty}|a_n|$$

$$= \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}$$ – сходится (случай обобщенного гармонического ряда).

Таким образом, полученный числовой ряд сходится абсолютно.

Далее рассматриваем правый конец интервала $x = 1$, подставляем это значение в наш степенной ряд:

$$\text{при } x = 1 \ \Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1^n}{n^2} = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}$$ – сходится

Таким образом, степенной ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^n}{n^2}$$

сходится, причём абсолютно, на обоих концах найденного интервала.

Ответ: Область сходимости исследуемого степенного ряда: $-1 < x < 1$

Ряды Тейлора. Достаточные условия представления функции рядом Тейлора. Разложение основных функций в ряд Маклорена. Применение рядов в приближенных вычислениях. Приложение степенных рядов к решению дифференциальных уравнений и вычислению определённых интегралов

Ряд Тейлора

Если функция $f(x)$ в некотором интервале раскладывается в степенной ряд по степеням $(x\text{-}a)$, то это разложение единственно и задается формулой:

$$f(x) = f(a) + \frac{f'(a)}{1!}(x-a) + \frac{f''(a)}{2!}(x-a)^2 + \frac{f'''(a)}{3!}(x-a)^3 + \cdots = \\ = \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n + \cdots$$

Примечание. Вместо буквы «a» в литературе часто можно встретить букву x_0.

Данная формула носит фамилию англичанина Тейлора (ударение на первый слог).

Достаточные условия представления функции рядом Тейлора

Если функция f имеет производные всех порядков на промежутке $(x_0 - R, x_0 + R)$ и все эти производные ограничены в совокупност, т.е. существует такое число $L > 0$, что для всех $x \in (x_0 - R, x_0 + R)$ и всех $n = 0, 1, 2, \ldots$ выполняется:

$$\left|f^{(n)}(x)\right| \le L,$$

(где L не зависит от n), то функция f представляется рядом Тейлора:

$$f(x) = f(x_0) + \frac{f'(x_0)}{1!}(x-x_0) + \frac{f''(x_0)}{2!}(x-x_0)^2 + \cdots + \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n \\ + \cdots, |x-x_0| \le R$$

Ряд Маклорена

На практике процентах в 95-ти приходится иметь дело с частным случаем формулы Тейлора, когда $a = 0$:

$$f(x) = f(0) + \frac{f'(0)}{1!}x + \frac{f''(0)}{2!}x^2 + \frac{f'''(0)}{3!}x^3 + \cdots + \frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n + \cdots$$

Этот ряд получил известность благодаря шотландцу Маклорену. Разложение Маклорена также называют разложением Тейлора по степеням x.

Вернемся к таблице разложений элементарных функций и выведем разложение экспоненциальной функции:

$$e^x = 1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \cdots + \frac{x^n}{n!} + \cdots$$

Как это получилось? По формуле Маклорена:

$$f(x) = f(0) + \frac{f'(0)}{1!}x + \frac{f''(0)}{2!}x^2 + \frac{f'''(0)}{3!}x^3 + \cdots + \frac{f^{(n)}(0)}{3!}x^n + \cdots$$

Рассмотрим функцию $f(x)=e^x$, тогда:

$$f(0) = e^0 = 1$$

Теперь начинаем находить производные в точке ноль: первую производную, вторую производную, третью производную и т.д. Это просто, поскольку при дифференцировании экспонента превращается в саму себя:

$f'(x) = (e^x)' = e^x;$
$f'(0) = e^0 = 1;$
$f''(x) = \left(f'(x)\right)' = (e^x)' = e^x;$
$f''(0) = e^0 = 1;$
$f'''(x) = \left(f''(x)\right)' = (e^x)' = e^x;$
$f'''(0) = e^0 = 1.$

И так далее.

Совершенно очевидно, что

$$f(0) = f'(0) = f''(0) = f'''(0) = \cdots = f^{(n)}(0) = \cdots = 1.$$

Подставляем единицы в формулу Маклорена и получаем наше табличное разложение. Аналогично можно вывести некоторые другие табличные разложения.

Разложение основных функций в Ряд Маклорена

$$e^x = 1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \cdots + \frac{x^n}{n!} + \cdots = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n!}, |x| < \infty,$$

$$\sin x = \frac{x}{1!} - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \cdots + \frac{(-1)^{n+1}x^{2n-1}}{(2n-1)!} - \cdots = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}x^{2n-1}}{(2n-1)!}, |x| < \infty,$$

$$cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + \cdots + \frac{(-1)^{n+1}x^{2n}}{(2n)!} - \cdots = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n x^{2n}}{(2n)!}, |x| < \infty,$$

$$\ln(1+x) = \frac{x}{1!} - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} - \cdots + \frac{(-1)^{n+1}x^n}{n!} - \cdots = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n x^{2n}}{n!}, x \in (-1; 1],$$

$$(1+x)^{\alpha} = 1 + \frac{\alpha}{1!}x + \frac{\alpha(\alpha-1)}{2!}x^2 + \frac{\alpha(\alpha-1)(\alpha-2)}{3!}x^3 + \dots +$$
$$+\frac{\alpha(\alpha-1)\dots(\alpha-n+1)x^n}{n!} + \dots = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{\alpha(\alpha-1)\dots(\alpha-n+1)x^n}{n!}, |x|<1,$$
$$\frac{1}{1-x} = 1 + x + x^2 + \dots + x^n + \dots = \sum_{n=0}^{\infty} x^n, |x|<1,$$

Применение рядов в приближенных вычислениях

Обычно в задачах на приближенные вычисления используются ряды Маклорена для следующих функций:

$$e^x = 1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \dots + \frac{x^n}{n!},$$

Область сходимости этого степенного ряда к своей функции – $(-\infty; +\infty)$.

$$sinx = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \dots = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^{2n-1}}{(2n-1)!}\cdot(-1)^{n+1}$$
$$cosx = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + \dots = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^{2n}}{(2n)!}\cdot(-1)^{n}$$

Области сходимости послдених двух рядов также $(-\infty; +\infty)$.

$$ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4!} + \dots = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^n}{n}\cdot(-1)^{n+1}$$
$$(1+x)^m = 1 + mx + \frac{m(m-1)}{2!}x^2 + \frac{m(m-1)(m-2)}{3!}x^3 + \dots$$
$$+\frac{m(m-1)(m-2)\dots(m-n+1)}{n!}x^n + \dots$$

Можно показать, что область сходимости последних двух рядов $|x| < 1$.

При $m = -1$, из последней формулы получим:

$$\frac{1}{1+x} = 1 - x + x^2 - x^3 + \dots$$

Если же x заменить на $(- x)$, то получим формулу суммы бесконечно убывающей геометрической прогрессии:

$$\frac{1}{1-x} = 1 + x + x^2 + x^3 + \dots + x^n + \dots$$

Приложение степенных рядов к решению дифференциальных уравнений и вычислению определённых интегралов

На практике встречается великое множество дифференциальных уравнений, неразрешимых аналитически точно (по крайне мере, известными на сегодняшний день способами). Иными словами, как ни крути такое уравнение – проинтегрировать его не удастся. А закавыка состоит в том, что общее решение (семейство линий на плоскости) может существовать. И тогда на помощь приходят методы вычислительной математики.

Типовая задача формулируется следующим образом:

Найти приближённо частное решение *y=y(x)* дифференциального уравнения …, удовлетворяющее начальному условию $y(x_0) = y_0$, в виде трёх (реже – четырёх-пяти) отличных от нуля членов ряда Тейлора.

Искомое частное решение *y=y(x)* раскладывается в данный ряд по известной формуле:

$$y(x) = y(x_0) + \frac{y'(x_0)}{1!}(x - x_0) + \frac{y''(x_0)}{2!}(x - x_0)^2 + \dots + \frac{y^{(n)}(x_0)}{n!}(x - x_0)^n$$

Единственное, здесь вместо буквы «эф» используется «игрек».

Ряд Фурье – в математике – способ представления произвольной сложной функции суммой более простых. В общем случае количество таких функций может быть бесконечным, при этом чем больше таких функций учитывается при расчете, тем выше оказывается конечная точность представления исходной функции. В большинстве случаев в качестве простейших используются тригонометрические функции синуса и косинуса, в этом случае ряд Фурье называется тригонометрическим, а вычисление такого ряда часто называют разложением на гармоники.

ТЕМА 8. ТЕОРИЯ ВЕРОЯТНОСТЕЙ

8.1. Основные понятия и теоремы теории вероятностей

Предмет и метод теории вероятностей

Теория вероятностей – это математическая наука, изучающая закономерности в случайных явлениях.

Одна из основных **задач** теории вероятностей состоит в выяснении закономерностей, возникающих при взаимодействии большого числа случайных факторов.

Предметом теории вероятностей является изучение вероятностных закономерностей массовых однородных случайных событий.

Знание закономерностей, которым подчиняются массовые случайные события, позволяет предвидеть, как эти события будут протекать.

Методы теории вероятностей широко применяются в различных отраслях естествознания и техники: в теории надежности, теории массового обслуживания, теории стрельбы, теории автоматического управления, во многих теоретических и прикладных науках.

Теория вероятностей служит также для обоснования математической и прикладной статистики, которая в свою очередь используется при планировании и организации производства.

Классификация событий

Событием называется любой факт, который в результате опыта может произойти или не произойти.

Под ***опытом*** понимается некоторая воспроизводимая совокупность условий, в которой наблюдается то или иное явление.

Опыт может представлять как одно испытание, так и серию испытаний.

С событиями связываются некоторые ***числа***, характеризующие степень объективной возможности появления этих событий, называемые ***вероятностями событий***.

Достоверным называется событие, которое происходит в каждом опыте.

Невозможным называется событие, которое в результате опыта произойти не может.

Случайным называют событие, которое при осуществлении совокупности условий может произойти либо не произойти.

Каждое случайное событие – следствие некоторых случайных причин.

Несколько событий образуют ***полную группу***, если в результате испытания появится хотя бы одно из них. Другими словами, появление хотя бы одного из событий полной группы есть достоверное событие.

Несовместные события – появление одного события исключает возможность появления другого. Два несовместных события, из которых одно должно обязательно произойти, называются ***противоположными.***

Равновозможные события – появление одного из них не является более возможным, чем другое.

Алгебра событий

Для упрощения записи и возможности логического построения рассуждений в теории вероятностей вводятся операции над событиями. И на их основе строится ***алгебра событий*** - алгебра подмножеств пространства элементарных событий, элементами которого служат элементарные события.

Приведем ***теоретико-множественную трактовку*** основных понятий теории вероятностей.

Множество всех взаимоисключающих исходов эксперимента называется ***пространством элементарных событий***. Пространство элементарных событий будем обозначать буквой Ω, а его исходы – буквой ω, т.е. $\Omega \in \omega$.

Пример 1. Выпадение на игральной кости: одного очка ω_1,….., выпадение шести очков ω_6. Это элементарные события и их уже нельзя разбить на более мелкие.

На практике интересуют события *неэлементарные.*

Событие может быть определено как произвольное подмножество из пространства элементарных событий Ω.

Суммой двух событий A и B (обозначается $A+B$ или $A \cup B$) называется событие, состоящее из всех исходов, входящих либо в A, либо в B. Другими словами, под А+В понимают следующее событие: произошло или событие A, или событие B, либо ,если это возможно, они произошли одновременно, т.е. произошло хотя бы одно из событий A или B.

В примере 1 событие B, состоящее в выпадении нечетного числа очков, есть $B = \omega_1 + \omega_3 + \omega_5$.

Произведением двух событий A и B (обозначается AB *или* $A \cap B$) называется событие, состоящее из тех исходов, которые входят как в A, так и в B. Иными словами, AB означает событие, при котором события A и B наступают одновременно.

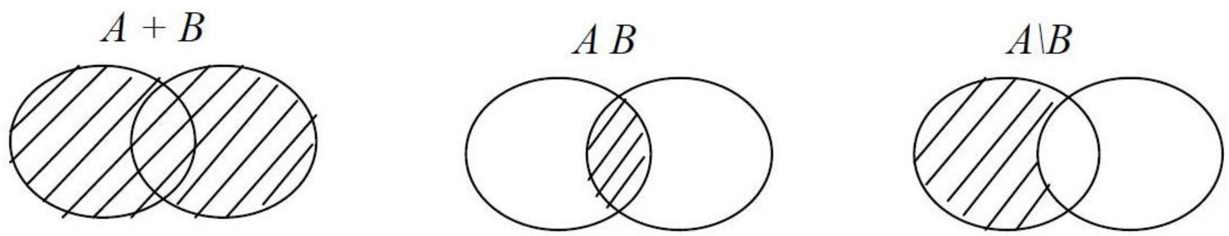
Пример 2. Если событие A состоит в том, что из колоды карт извлечена карта пиковой масти, а событие B – в том, что из колоды вынута дама, то событием AB будет извлечение из колоды дамы пик.

Разностью двух событий A и B (обозначается А – В или А\В) называется событие, состоящее из исходов, входящих в A, но не входящих в B.

Смысл события состоит в том, что событие A наступает, но при этом не наступает событие B.

В **<u>примере 2</u>** $A\backslash B$ – извлечение из колоды любой карты пиковой масти, кроме дамы. Наоборот, $B\backslash A$ – извлечение дамы любой масти, кроме пик.

Геометрическая интерпретация основных действий над событиями с помощью *диаграмм Эйлера-Венна*



<u>Классическое определение вероятности</u>

Для практической деятельности важно уметь сравнивать события по степени возможности их наступления.

Численная мера степени объективной возможности наступления события называется ***<u>вероятностью события.</u>***

Это определение, *качественно* отражающее понятие вероятности события, не является математическим.

Чтобы оно таковым стало, необходимо определить его *количественно*. Пусть число возможных исходов опыта равно n (общее число элементарных исходов), а при т из них происходит некоторое событие А (число благоприятных исходов), тогда при сделанных ранее предположениях на испытание, вероятность Р(А) случайного события А, наступившего в данном испытании вычисляется по формуле:

$$P(A) = \frac{m}{n}.$$

Это ***<u>классическое определение вероятности.</u>***

<u>Свойства вероятности</u>

Свойство 1. *<u>Вероятность достоверного события равна единице.</u>*

Действительно, если событие достоверно, то каждый элементарный исход испытания благоприятствует событию. В этом случае $m = n$, следовательно,

$P(A) = m / n = n / n = 1.$

Свойство 2. *<u>Вероятность невозможного события равна нулю.</u>*

Действительно, если событие невозможно, то ни один из элементарных исходов испытания не благоприятствует событию. В этом случае $m = 0$, следовательно,

$P(A) = m/n = 0/n = 0.$

Свойство 3. *Вероятность случайного события есть положительное число, заключенное между нулем и единицей.*

Действительно, случайному событию благоприятствует лишь часть из общего числа элементарных исходов испытания. В этом случае $0 < m < n$, значит, $0 < m / n < 1$, следовательно,

$0 < P(A) < 1$.

Элементы комбинаторики

При вычислении вероятностей часто приходится использовать некоторые формулы ***комбинаторики*** – раздела математики, изучающего комбинации, которые можно составить по определенным правилам из элементов заданного, обычно конечного, множества.

Определим основные такие комбинации:

1. **Правило суммы.**

Если объект *A* можно выбрать *m* способами, а другой объект *B* можно выбрать *n* способами, то выбор «*A или B*» можно осуществить $m+n$ способами.

2. **Правило умножения.**

Если объект *A* можно выбрать *m* способами и если после каждого такого выбора объект *B* можно выбрать *n* способами, то выбор «*A и B*» в указанном порядке можно осуществить *mn* способами.

Эти правила дают удобные универсальные методы решения многих комбинаторных задач.

Перестановки – это комбинации, составленные из всех *n* элементов данного множества и отличающиеся только порядком их расположения.

Число всех возможных перестановок:

$$P_n = n!$$

Пример 3. Сколько различных списков (отличающихся порядком фамилий) можно составить из 7 различных фамилий?

Решение. $P_7 = 7! = 2\cdot3\cdot4\cdot5\cdot6\cdot7 = 5040$.

Размещения – комбинации из *m* элементов множества, содержащего *n* различных элементов, отличающиеся либо составом элементов, либо их порядком.

Число всех возможных размещений:

$$A_n^m = n(n-1)(n-2)...(n-m+1).$$

Пример 4. Сколько возможно различных вариантов пьедестала почета (первое, второе, третье места), если в соревнованиях принимают участие 10 человек?

Решение. $A_{10}^3 = 10 \cdot 9 \cdot 8 = 720.$

Сочетания **–** неупорядоченные наборы из m элементов множества, содержащего n различных элементов (то есть наборы, отличающиеся только составом элементов).

Число сочетаний:

$$C_n^m = \frac{n!}{m!(n-m)!}.$$

Пример 5. В отборочных соревнованиях принимают участие 10 человек, из которых в финал выходят трое. Сколько может быть различных троек финалистов?

Решение. В отличие от предыдущего примера, здесь не важен порядок финалистов, следовательно, ищем число сочетаний из 10 по 3:

$$C_{10}^3 = \frac{10!}{3!\cdot 7!} = \frac{8\cdot 9\cdot 10}{6} = 120.$$

Теоремы сложения и умножения вероятностей

Теорема 1 (теорема сложения).

Вероятность P(A + B) суммы событий A и B равна

$$\boldsymbol{P(A+B) = P(A) + P(B) - P(AB).}$$

Доказательство. Докажем теорему сложения для схемы случаев. Пусть n – число возможных исходов опыта, m_A – число исходов, благоприятных событию A, m_B – число исходов, благопри-ятных событию B, а m_{AB} – число исходов опыта, при которых происходят оба события (то есть исходов, благоприятных произведению AB). Тогда число исходов, при которых имеет место событие $A + B$, равно $m_A + m_B - m_{AB}$ (так как в сумме $(m_A + m_B)$ число m_{AB} учтено дважды: как исходы, благоприятные A, и исходы, благоприятные B). Следовательно, вероятность суммы можно определить по формуле (1.1):

$$P(A+B) = \frac{m_A + m_B - m_{AB}}{n} = \frac{m_A}{n} + \frac{m_B}{n} - \frac{m_{AB}}{n} = P(A) + P(B) - P(AB),$$

что и требовалось доказать.

Следствие 1. Теорему 1 можно распространить на случай суммы любого числа событий. Например, для суммы трех событий A, B и C

$P(A + B + C) =$

$= P(A) + P(B) + P(C) - P(AB) - P(AC) - P(BC) + P(ABC)$

Следствие 2. Если события A и B несовместны, то $m_{AB} = 0$, и, следовательно, вероятность суммы несовместных событий равна сумме их вероятностей:

$P(A + B) = P(A) + P(B)$

Следствие 3. Сумма вероятностей противоположных событий равна 1:

$P(A) + P(\overline{A}) = 1$

Доказательство. Так как А и $\overline{A}$ образуют полную группу, то одно из них обязательно произойдет в результате опыта, то есть событие $A+\overline{A}$

является достоверным. Следовательно, $P(A+\overline{A})=1$. Но, так как A и $\overline{A}$ несовместны, из следствия 2 следует, что $P(A+\overline{A})=P(A)+P(\overline{A})$. Значит, $P(A)+P(\overline{A})=1$, что и требовалось доказать.

Замечание. В ряде задач проще искать не вероятность заданного события, а вероятность события, противоположного ему, а затем найти требуемую вероятность по формуле следствия 3.

Пример 6. Из урны, содержащей 2 белых и 6 черных шаров, случайным образом извлекаются 5 шаров. Найти вероятность того, что вынуты шары разных цветов.

Решение. Событие $\overline{A}$, противоположное заданному, заключается в том, что из урны вынуто 5 шаров одного цвета, а так как белых шаров в ней всего два, то этот цвет может быть только черным. Множество возможных исходов опыта найдем по формуле сочетания:

$$n=C_8^5=\frac{8!}{5!\cdot 3!}=\frac{6\cdot 7\cdot 8}{6}=56,$$

а множество исходов, благоприятных событию $\overline{A}$ – это число возможных наборов по 5 шаров только из шести черных:

$$m_{\overline{A}}=C_6^5=6.$$

Тогда $P(\overline{A})=\dfrac{6}{56}=\dfrac{3}{28}$, а $P(A)=1-\dfrac{3}{28}=\dfrac{25}{28}$.

При изучении реальных случайных явлений иногда возникает или искусственно создается ситуация, когда мы получаем **дополнительную информацию о возможных исходах опыта Ω.**

Пример 7. Допустим, что студент из 30 билетов успел выучить билеты с 1-го по 3-й и с 28-го по 30-й. На экзамен он пришел одиннадцатым, и оказалось, что к его приходу остались только билеты с 1-го по 20-й (событие А). Вероятность события В={студент получил выученный билет} без дополнительной информации о том, что событие А произошло, может быть вычислена по классическому определению с Ω={1,2,…,30}. Согласно формуле вероятности:

$$P(B)=\frac{6}{30}=\frac{1}{5}.$$

При дополнительной информации (событие А произошло) множество возможных исходов А состоит из 20 элементарных исходов, а событие В вместе с А наступает в 3 случаях.

Следовательно, в данном примере естественно определить ***условную вероятность события В при условии, что событие А произошло, как***

$$P(B\mid A)=P_A(B)$$

$$P_A(B) = \frac{3}{20}.$$

Замечание. Понятие **условной вероятности** используется в основном в случаях, когда осуществление события *A* изменяет вероятность события *B*.

Теорема 2 (теорема умножения).

Вероятность произведения двух событий равна произведению вероятности одного из них на условную вероятность другого при условии, что первое событие произошло:

$$\boldsymbol{P(AB) = P(A) \cdot P_A(B)}$$

Доказательство. Воспользуемся обозначениями теоремы 1. Тогда для вычисления $P_A(B)$ множеством возможных исходов нужно считать m_A (так как *A* произошло), а множеством благоприятных исходов – те, при которых произошли и *A*, и *B* (m_{AB}). Следовательно,

$$P_A(B) = \frac{m_{AB}}{m_A} = \frac{m_{AB}}{n} \cdot \frac{n}{m_A} = \frac{P(AB)}{P(A)},$$ откуда следует утверждение теоремы.

Пример 10. Для поражения цели необходимо попасть в нее дважды. Вероятность первого попадания равна 0,2, затем она не меняется при промахах, но после первого попадания увеличивается вдвое. Найти вероятность того, что цель будет поражена первыми двумя выстрелами.

Решение. Пусть событие *A* – попадание при первом выстреле, а событие *B* – попадание при втором. Тогда $P(A) = 0{,}2$, $P_A(B) = 0{,}4$, $P(AB) = 0{,}2 \cdot 0{,}4 = 0{,}08$.

Следствие. Если подобным образом вычислить вероятность события *BA*, совпадающего с событием *AB*, то получим, что $P(BA) = P(B) \cdot P_B(A)$. Следовательно,

$$\boldsymbol{P(A) \cdot P_A(B) = P(B) \cdot P_B(A).}$$

Событие *B* называется ***независимым*** от события *A*, если появление события *A* не изменяет вероятности *B*, то есть

$$\boldsymbol{P_A(B) = P(B).}$$

Замечание. Если событие *B* не зависит от *A*, то и *A* не зависит от *B*. Действительно, при этом следует, что $P(A) \cdot P(B) = P(B) \cdot P_B(A)$, откуда $P_B(A) = P(A)$.

Значит, ***свойство независимости событий взаимно***.

Теорема умножения для независимых событий имеет вид:

$$\boldsymbol{P(AB) = P(A) \cdot P(B)}$$

то есть вероятность произведения независимых событий равна произведению их вероятностей.

При решении задач теоремы сложения и умножения обычно применяются вместе.

Пример 11. Два стрелка делают по одному выстрелу по мишени. Вероятности их попадания при одном выстреле равны соответственно 0,6 и 0,7. Найти вероятности следующих событий:

A – хотя бы одно попадание при двух выстрелах;

B – ровно одно попадание при двух выстрелах;

C – два попадания;

D – ни одного попадания.

Решение. Пусть событие H_1 – попадание первого стрелка, H_2 – попадание второго. Тогда

$A = H_1 + H_2$, $B = H_1*\overline{H}_2 + \overline{H}_1*H_2$, $C = H1*H2$, $D = \overline{H}_1*\overline{H}_2$.

События H_1 и H_2 совместны и независимы, поэтому теорема сложения применяется в общем виде, а теорема умножения – в виде теоремы умножения для независимых событий. Следовательно, $P(C) = 0{,}6\cdot 0{,}7 = 0{,}42$, $P(A) = 0{,}6 + 0{,}7 - 0{,}42 = 0{,}88$,

$P(B) = 0{,}6\cdot 0{,}3 + 0{,}7\cdot 0{,}4 = 0{,}46$ (так как события $H_1*\overline{H}_2$ и $\overline{H}_1*H_2$ несовместны), $P(D) = 0{,}4\cdot 0{,}3 = 0{,}12$.

События A и D являются противоположными, поэтому

$P(A) = 1 - P(D)$.

<u>Относительная частота. Статистическое определение вероятности</u>

Классическое определение вероятности применимо только для очень узкого класса задач, где все исходы опыта удовлетворяют жестким условиям, и не является пригодным для изучения произвольных случайных событий. В большинстве реальных задач эта схема неприменима. Так, она неприемлема, если результаты **испытания не равновозможны**.

Для таких ситуаций существует понятие ***относительной частоты W(A)*** события A как отношения числа опытов, в которых наблюдалось событие A, к общему количеству проведенных испытаний:

$$W(A) = \frac{M}{N},$$

где N – общее число опытов, M – число опытов, в которых появилось событие A.

Большое количество экспериментов показало, что если опыты проводятся в одинаковых условиях, то для большого количества испытаний относительная частота ***W(A)*** изменяется мало, колеблясь около некоторого постоянного числа ***P*(A)***. Это число ***P*(A)*** = ***W(A)*** можно считать вероятностью рассматриваемого события.

В отличие от «математической» вероятности ***P(A)***, рассматриваемой в классическом определении, статистическая вероятность ***P*(A)*** является характеристикой ***опытной, экспериментальной***.

Таким образом, ***статистической вероятностью события*** считают его относительную частоту или число, близкое к ней.

Замечание 1. Из формулы относительной частоты следует, что свойства вероятности, доказанные для ее классического определения, справедливы и для статистического определения вероятности.

Статистическое определение вероятности применимо не к любым событиям с неопределенными исходами, которые в житейской практике считаются случайными, а только к тем из них, которые обладают определенными **свойствами**:

1) Рассматриваемые события должны быть исходами только тех испытаний, которые могут быть воспроизведены неограниченное число раз при одном и том же комплексе условий;

2) События должны обладать, так называемой, статистической устойчивостью или устойчивостью относительных частот. Это означает, что в различных сериях испытаний относительная частота события изменяется незначительно (тем меньше, чем больше число испытаний), колеблясь около постоянного числа.

Замечание 2. Недостатком статистического определения является неоднозначность статистической вероятности.

Пример 12. Если в задаче задается вероятность попадания в мишень для данного стрелка (например, p=0,7), то эта величина получена в результате изучения статистики большого количества серий выстрелов, в которых этот стрелок попадал в мишень, например, около семидесяти раз из каждой сотни выстрелов.

Геометрическая вероятность

Одним из недостатков классического определения вероятности является то, что оно неприменимо к испытаниям с бесконечным количеством исходов. В некоторых случаях можно воспользоваться понятием ***геометрической вероятности***.

Пусть на отрезок ***MN*** наудачу брошена точка. Это означает, что точка обязательно попадет на отрезок ***MN*** (событие ***Ω)*** и с равной возможностью может совпасть с любой точкой этого отрезка. При этом вероятность попадания точки на любую часть отрезка ***MN*** не зависит от расположения этой части на отрезке и пропорциональна его длине. Тогда вероятность того, что брошенная точка попадет на отрезок ***CD*** (событие ***A)***, являющийся частью отрезка ***MN***, вычисляется по формуле:

$$P(A) = \frac{l_{CD}}{L_{MN}},$$

где l – длина отрезка CD, а L – длина отрезка MN.

Можно дать аналогичную постановку задачи для точки, брошенной на **плоскую область G** и вероятности того, что она попадет на часть этой области g:

$$P(A) = \frac{s_g}{S_G},$$

где s – площадь части g области G, а S – площадь всей области G.

В трехмерном случае вероятность того, что **точка**, случайным образом **расположенная в теле**, попадет в его часть, задается формулой:

$$P(A) = \frac{v}{V},$$

где v – объем части тела, а V – объем всего тела.

Обобщение формул геометрической вероятности

Пусть событие Ω означает, что точка случайным образом попадает во множество Ω и, аналогично, A– точка попадет в подмножество A⊂Ω, причем точка наверняка попадает во множество Ω, т.е. событие A– достоверно. Пусть далее вероятность P(A) события A пропорциональна ***геометрической мере*** mes(A) (от французского mesure–мера) и мера mes(Ω) множества Ω конечна. Тогда естественно определить P(A) соотношением:

$$P(A) = \frac{mes(A)}{mes(\Omega)}$$

Формула полной вероятности, формула Байеса

Следствием двух основных теорем теории вероятностей – теоремы сложения и умножения – являются формулы полной вероятности и формулы Байеса.

Теорема (Формула полной вероятности). *Если событие А может произойти только при условии появления одного из событий (гипотез) H_i, $i = \overline{1,n}$, образующих полную группу, то вероятность события А равна*

$$P(A) = \sum_{i=1}^{n} P(H_i) \cdot P_{H_i}(A).$$

Пример 10. Экспортно-импортная фирма собирается заключить контракт на поставку сельскохозяйственного оборудования в одну из развивающихся стран. Если основной конкурент фирмы не станет одновременно претендовать на заключение контракта, то вероятность получения контракта оценивается в 0,45; в противном случае – в 0,25. По оценкам экспертов компании вероятность того, что конкурент выдвинет свои предложения по заключению контракта, равна 0,40. Чему равна вероятность заключения контракта?

Решение. A = «фирма заключит контракт». H_1 –«конкурент выдвинет свои предложения». H_2 –« конкурент не выдвинет свои предложения». По условию задачи $P(H_1) = 0{,}4$, $P(H_2) = 1 - 0{,}4 = 0{,}6$. Условные вероятности по заключению контракта для фирмы $P_{H_1}(A) = 0{,}25$, $P_{H_2}(A) = 0{,}45$. По формуле полной вероятности

$$P(A) = P(H_1) \cdot P_{H_1}(A) + P(H_2) \cdot P_{H_2}(A).$$

$$P(A) = 0{,}4 \cdot 0{,}25 + 0{,}6 \cdot 0{,}45 = 0{,}1 + 0{,}27 = 0{,}37.$$

Следствием теоремы умножения и формулы полной вероятности является **формула Байеса.**

Теорема (Формула Байеса). *Если событие A произошло, то апостериорные условные вероятности гипотез H_i, $\left(i=\overline{1,n}\right)$ вычисляются по формуле, которая носит название формулы Байеса:*

$$P_A(H_i)=\frac{P(H_i)\cdot P_{H_i}(A)}{P(A)}=\frac{P(H_i)\cdot P_{H_i}(A)}{\sum\limits_{i=1}^{n}P(H_i)\cdot P_{H_i}(A)}$$

Значение формулы Байеса состоит в том, что при наступлении события *A,* т.е. по мере получения новой информации, мы можем проверять и корректировать выдвинутые до испытания гипотезы. Такой подход, называемый байесовским, дает возможность корректировать управленческие решения в экономике, оценки неизвестных параметров распределения изучаемых признаков в статистическом анализе и т.п.

Пример 11. Экономист-аналитик условно подразделяет экономическую ситуацию в стране на «хорошую», «посредственную» и «плохую» и оценивает их вероятности для данного момента времени в 0,15; 0,70 и 0,15 соответственно. Некоторый индекс экономического состояния возрастает с вероятностью 0,60, когда ситуация «хорошая»; с вероятностью 0,30, когда ситуация посредственная, и с вероятностью 0,10, когда ситуация «плохая». Пусть в настоящий момент индекс экономического состояния возрос. Чему равна вероятность того, что экономика страны на подъеме?

Решение. A = «индекс экономического состояния страны возрастет», H_1 = «экономическая ситуация в стране «хорошая»», H_2 = «экономическая ситуация в стране «посредственная»», H_3 = «экономическая ситуация в стране «плохая»». По условию: $P(H_1)=0{,}15$, $P(H_2)=0{,}70$, $P(H_3)=0{,}15$. Условные вероятности: $P_{H_1}(A)=0{,}60$, $P_{H_2}(A)=0{,}30$, $P_{H_3}(A)=0{,}10$. Требуется найти вероятность $P_A(H_1)$. Находим ее по формуле Байеса:

$$P_A(H_1)=\frac{P(H_1)\cdot P_{H_1}(A)}{P(H_1)\cdot P_{H_1}(A)+P(H_2)\cdot P_{H_2}(A)+P(H_3)\cdot P_{H_3}(A)};$$

$$P_A(H_1)=\frac{0{,}15\cdot 0{,}6}{0{,}15\cdot 0{,}6+0{,}7\cdot 0{,}3+0{,}15\cdot 0{,}1}=\frac{0{,}09}{0{,}09+0{,}21+0{,}015}=\frac{0{,}09}{0{,}315}\approx 0{,}286.$$

8.2. Схема повторных независимых испытаний

<u>Последовательность независимых повторных испытаний (схема Бернулли)</u>

На практике часто приходится сталкиваться с задачами, которые можно представить в виде многократно повторяющихся испытаний при данном комплексе условий, в которых представляет интерес вероятность числа m наступлений некоторого события A в n испытаниях.

Последовательные испытания называются ***независимыми относительно события*** *A*, если вероятность осуществления любого исхода в *n*-м по счету испытании не зависит от реализации исходов предыдущих испытаний.

Если независимые повторные испытания проводятся при одном и том же комплексе условий, то вероятность наступления события *A* в каждом испытании одна и та же.

Простейшим классом повторных независимых испытаний является ***последовательность независимых испытаний с двумя исходами*** («успех» и «неуспех») *и* ***с неизменными вероятностями «успеха» p и «неуспеха» q = 1 – p в каждом испытании.***

Описанная последовательность независимых испытаний получила название ***схемы Бернулли.***

Примерами повторных независимых испытаний с двумя исходами могут служить:

- многократное подбрасывание монеты;
- стрельба по цели *n* раз одиночными выстрелами, если нас интересует только попадание или промах;
- массовый контроль деталей, при котором требуется только установить, какой является деталь – стандартной или нестандартной.

Пример. Производятся три независимых выстрела по мишени с вероятностью попадания p при каждом выстреле. Найти вероятность ровно двух попаданий при трех выстрелах.

Р е ш е н и е. Событие $B_2 = \{\text{в мишени ровно два попадания}\}$ может произойти тремя способами:

1) попаданием в первом и втором выстрелах, промахом в третьем;
2) попаданием в первом и третьем выстрелах, промахом во втором;
3) попаданием во втором и третьем выстрелах, промахом в первом.

Событие B_2 есть сумма трех несовместных вариантов:

$$B_2 = A_1A_2\overline{A}_3 + A_1\overline{A}_2A_3 + \overline{A}_1A_2A_3,$$

где A_i – попадание в i-м выстреле, $\overline{A}_i$ – промах.

Учитывая, что все три варианта события B_2 несовместны, а события, входящие в произведения, независимы, по правилам сложения и умножения вероятностей

$$P(B_2) = pp(1-p) + p(1-p)p + (1-p)pp.$$

Обозначив $q = 1 - p$, получаем

$$P(B_2) = 3p^2q.$$

Формула Бернулли

Теорема 1. *Если вероятность p наступления события A в каждом испытании постоянна, то вероятность $P_n(m)$ того, что событие A наступит ровно m раз в n независимых испытаниях вычисляется по формуле, называемой* ***формулой Бернулли****:*

$$P_n(m) = C_n^m p^m (1-p)^{n-m} = C_n^m p^m q^{n-m}$$

Пример. Изделия некоторого производства содержат 5% брака. Найти вероятность того, что среди пяти взятых наугад изделий: а) нет ни одного испорченного; б) два испорченных.

Решение.

а) По условию задачи n = 5, p = 0,05. Так как вероятность наступления события A (появление бракованной детали) постоянна для каждого испытания, то задача подходит под схему Бернулли. Находим вероятность того, что среди пяти взятых наудачу изделий нет ни одного испорченного n = 5, m = 0, p = 0,05.

По формуле Бернулли:

$P_5(0) = C_5^0 \cdot 0{,}05^0 \cdot 0{,}95^5 = 1 \cdot 1 \cdot 0{,}774 = 0{,}774$.

б) $n = 5,\ m = 2,\ p = 0{,}05$:

$$P_5(2) = C_5^2 \cdot 0{,}05^2 \cdot 0{,}95^3 = \frac{5 \cdot 4}{2} \cdot 0{,}0025 \cdot 0{,}857 = 0{,}021.$$

Число m_0 наступления события A в n независимых испытаниях называется ***наивероятнейшим***, если вероятность осуществления этого события $P_n(m_0)$ по крайней мере не меньше вероятностей других событий $P_n(m)$ при любом m.

Можно доказать, что наивероятнейшее число наступлений события A в n испытаниях заключено между числами $np - q$ и $np + p$:

$$np - q \le m_0 \le np + p\ .$$

Пример. По данным предыдущего примера найти наивероятнейшее число появления бракованных деталей из 5 отобранных и вероятность этого числа.

Решение. По формуле (3.3) $5 \cdot 0{,}05 - 0{,}95 \le m_0 \le 5 \cdot 0{,}05 + 0{,}05$ или $-0{,}7 \le m_0 \le 0{,}3$. Единственное целое число, удовлетворяющее полученному неравенству, $m_0 = 0$, а его вероятность $P_5(0) = 0{,}774$ была получена в примере 1.

Теорема Пуассона

Предположим, что мы хотим вычислить вероятность $P_n(m)$ появления события A при большом числе испытаний n, например, $P_{500}(300)$. По формуле Бернулли (3.1) имеем: $P_{500}(300) = C_{500}^{300} p^{300} q^{200}$. Ясно, что в этом случае непосредственное вычисление по формуле Бернулли технически сложно, тем более, если учесть, что сами p и q – числа дробные. Поэтому возникает естественное желание иметь более простые, пусть даже и приближенные, формулы для вычисления $P_n(m)$ при больших n. Такие формулы, называемые ***асимптотическими***, существуют, среди которых наиболее известны теорема Пуассона, локальная и интегральная теоремы Лапласа.

Теорема 2. *Если вероятность p наступления события A в каждом испытании стремится к 0 ($p \to 0$) при неограниченном увеличении числа n испытаний ($n \to \infty$), причем произведение np стремится к постоянному числу λ ($np \to \lambda$), то вероятность $P_n(m)$ того, что событие A появится m раз в n независимых испытаниях, удовлетворяет предельному равенству*

$$\lim_{n\to\infty} P_n(m) = \frac{\lambda^m e^{-\lambda}}{m!}$$

Строго говоря, условие теоремы Пуассона $p \to 0$ при $n \to \infty$, так что $np \to \lambda$, противоречит исходной предпосылке схемы испытаний Бернулли, согласно которой вероятность наступления события в каждом испытании $p = const$. Однако, если вероятность p–постоянна и мала ($p < 0{,}1$), число испытаний n–велико ($n > 100$) и число $\lambda = np \le 10$, то из предельного равенства (3.4) вытекает приближенная формула Пуассона:

$$P_n(m) \approx \frac{\lambda^m e^{-\lambda}}{m!}$$

Пример. На факультете насчитывается 1825 студентов. Какова вероятность того, что 1 сентября является днем рождения одновременно четырех студентов факультета?

Решение. Вероятность того, что день рождения студента 1 сентября, равна $p = 1/365 \approx 0{,}027 < 0{,}1$. Число $n = 1825 > 100$ – велико и $\lambda = np = 1825 \cdot 1/365 = 5 \le 10$. По формуле Пуассона:

$$P_{1825}(4) \approx \frac{5^4 e^{-5}}{4!} \approx 0{,}1755.$$

Таким образом, искомая вероятность составляет 17,5%.

Если в схеме Бернулли вероятность p появления события A близка к 1, а число испытаний n велико, для вычисления вероятности $P_n(m)$ также можно использовать формулу Пуассона. При этом находят вероятность того, что событие $\overline{A}$ произойдет $n-m$ раз.

Локальная и интегральная теорема Муавра-Лапласа

Теорема 3. *Если в схеме Бернулли вероятность p появления события A в каждом из n испытаний существенно отличается от 0 ($p \geq 0{,}1$) и 1 ($p \leq 0{,}9$), то вероятность $P_n(m)$ того, что событие A произойдет m раз в n независимых испытаниях при достаточно большом числе n ($n > 100$) приближенно равна:*

$$P_n(m) \approx \frac{\varphi(x)}{\sqrt{npq}},$$

где $\varphi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \cdot e^{-x^2/2}$ – функция Гаусса, $x = \frac{m-np}{\sqrt{npq}}$.

Таблица значений функции $\varphi(x)$ приведена в приложении любого учебника по теории вероятности. Пользуясь этой таблицей, необходимо иметь в виду очевидные свойства функции $\varphi(x)$:

1. Функция $\varphi(x)$ является четной, т.е. $\varphi(-x) = \varphi(x)$
2. Функция $\varphi(x)$–монотонно убывающая при положительных значениях x, причем при $x \to \infty$, $\varphi(x) \to 0$. Практически можно считать, что уже при $x > 4$ $\varphi(x) \approx 0$.

Приближенную формулу (3.6) называют *локальной формулой Муавра-Лапласа.*

Пример 5. Вероятность найти белый гриб среди прочих равна $\frac{1}{4}$. Какова вероятность того, что среди 300 грибов белых будет 75?

Решение. По условию задачи $p = \frac{1}{4}$, $m = 75$, $n = 300$, $q = 1 - p = 1 - \frac{1}{4} = \frac{3}{4}$.

Находим $x = \frac{m-np}{\sqrt{npq}} = \frac{75 - 300 \cdot \frac{1}{4}}{\sqrt{300 \cdot \frac{1}{4} \cdot \frac{3}{4}}} = 0$. По таблице находим $\varphi(0) = 0{,}3989$.

$$P_{300}(75) = \frac{\varphi(x)}{\sqrt{npq}} = \frac{0{,}3989}{\sqrt{\frac{900}{16}}} = \frac{4 \cdot 0{,}3989}{30} \approx 0{,}053.$$

Вычислить каждое слагаемое можно по локальной формуле Муавра-Лапласа, но большое количество слагаемых делает расчет весьма громоздким. В таких случаях используется следующая теорема.

Теорема 4. *Если вероятность p наступления события A в каждом из n независимых испытаниях постоянна и отлична от нуля и единицы, а число*

испытаний достаточно велико, то вероятность того, что число m наступления события A в n испытаниях заключено между m_1 и m_2 включительно при достаточно большом числе n приближенно равна

$$P_n(m_1 \le m \le m_2) \approx \frac{1}{2}\left(\Phi\left(\frac{m_2 - np}{\sqrt{npq}}\right) - \Phi\left(\frac{m_1 - np}{\sqrt{npq}}\right)\right),$$

где p – вероятность появления успеха в каждом испытании, $q = 1 - p$, $\Phi(x) = \frac{2}{\sqrt{2\pi}} \cdot \int_0^x e^{\frac{-t^2}{2}} dt$ – функция (или интеграл вероятностей) Лапласа, значения $\Phi(x)$ приведены в приложениях любого учебника по теории вероятностей.

Приближенную формулу называют *интегральной формулой Муавра-Лапласа.* Чем больше n, тем точнее эта формула. При выполнении условия $npq \ge 20$ интегральная формула (3.7), также как и локальная дает незначительную погрешность вычисления вероятности.

Отметим свойства функции $\Phi(x)$:

3. Функция $\Phi(x)$ является нечетной, т.е. $\Phi(-x) = -\Phi(x)$
4. Функция $\Phi(x)$–монотонно возрастающая при положительных значениях x, причем при $x \to +\infty, \Phi(x) \to 1$. Практически можно считать, что уже при $x > 4$ $\Phi(x) \approx 1$.

Пример 6. В партии из 768 арбузов каждый арбуз оказывается неспелым с вероятностью $\frac{1}{4}$. Найти вероятность того, что количество спелых арбузов будет в пределах от 564 до 600.

Решение. По условию $n = 768, p = 0{,}75, m_1 = 564, m_2 = 600$. По интегральной теореме Лапласа

$$P(564 \le m \le 600) \approx \frac{1}{2}\left(\Phi\left(\frac{600 - 768 \cdot 0{,}75}{\sqrt{768 \cdot 0{,}25 \cdot 0{,}75}}\right) - \Phi\left(\frac{564 - 768 \cdot 0{,}75}{\sqrt{768 \cdot 0{,}25 \cdot 0{,}75}}\right)\right) =$$

$$= \frac{1}{2}\left(\Phi\left(\frac{600 - 576}{12}\right) - \Phi\left(\frac{564 - 576}{12}\right)\right) = \frac{1}{2}(\Phi(2) + \Phi(1)) \approx \frac{1}{2}(0{,}9545 + 0{,}6827) = 0{,}8186.$$

Пример 7. Город ежедневно посещает 1000 туристов, которые днем идут обедать. Каждый из них выбирает для обеда один из двух городских ресторанов с равными вероятностями и независимо друг от друга. Владелец одного из ресторанов желает, чтобы с вероятностью приблизительно 0,99 все пришедшие в его ресторан туристы могли там одновременно пообедать. Сколько мест должно быть для этого в его ресторане?

Решение. Пусть A = «турист пообедал у заинтересованного владельца». Наступление события A будем считать «успехом», $p = P(A) = 0{,}5$, $n = 1000$. Нас интересует такое наименьшее число k, что вероятность наступления не менее чем k «успехов» в последовательности из $n = 1000$ независимых испытаний с вероятностью успеха p = 0,5 приблизительно равна 1 – 0,99 = 0,01. Это как раз вероятность переполнения ресторана. Таким образом, нас интересует такое наименьшее число k, что $P_{1000} = (k, 1000) \approx 0{,}01$. Применим интегральную теорему Муавра-Лапласа:

$$P_{1000}(k \le m \le 1000) \approx 0{,}01 \approx \frac{1}{2}\left(\Phi\left(\frac{1000-500}{\sqrt{250}}\right) - \Phi\left(\frac{k-500}{\sqrt{250}}\right)\right) \approx$$

$$= \frac{1}{2}\left(\Phi\left(\frac{100}{5\sqrt{10}}\right) - \Phi\left(\frac{k-500}{5\sqrt{10}}\right)\right) \approx \frac{1}{2}\left(1 - \Phi\left(\frac{k-500}{5\sqrt{10}}\right)\right).$$

Откуда следует, что $\Phi\left(\frac{k-500}{5\sqrt{10}}\right) \approx 0{,}98$.

Используя таблицу для $\Phi(x)$, находим $\frac{k-500}{5\sqrt{10}} \approx 2{,}33$, значит $k = 2{,}33 \cdot 5\sqrt{10} + 500 \approx 536{,}8$. Следовательно, в ресторане должно быть 537 мест.

8.3. Случайные величины и их основные законы распределения

Случайные величины (дискретные и непрерывные)

Наряду с понятием случайного события в теории вероятности используется понятие ***случайной величины***.

Случайной величиной называется переменная величина, которая в результате испытания в зависимости от случая принимает одно из возможного множества своих значений, причем заранее неизвестно, какое именно.

Будем обозначать случайные величины заглавными буквами латинского алфавита ($X, Y, Z, \ldots$), а их возможные значения – соответствующими строчными буквами ($x, y, \ldots$).

Примеры:

- число очков, выпавших при броске игральной кости;
- число появлений герба при 10 бросках монеты;
- число выстрелов до первого попадания в цель;
- расстояние от центра мишени до пробоины при попадании.

Можно заметить, что множество возможных значений для перечисленных случайных величин имеет разный вид: для первых двух величин оно конечно (соответственно 6 и 10 значений), для третьей величины множество значений бесконечно, но счетно и представляет собой множество натуральных чисел, а для четвертой – все точки отрезка, длина которого равна радиусу мишени.

Таким образом, для первых трех величин множество значений из отдельных (дискретных), изолированных друг от друга значений, а для четвертой оно представляет собой непрерывную область.

Случайные величины подразделяются на две группы: ***дискретные и непрерывные***.

Случайная величина называется ***дискретной (ДСВ)***, если множество $\{x_1, x_2, \ldots, x_n, \ldots\}$ ее возможных значений конечно или счетно (т.е. если все ее значения можно занумеровать).

Случайная величина называется ***непрерывной (НСВ)***, если множество ее возможных значений целиком заполняет некоторый конечный или бесконечный интервал или системы интервалов на числовой оси.

Закон распределения случайной величины

Законом распределения случайной величины называется всякое соотношение, устанавливающее связь между возможными значениями случайной величины и вероятностями, с которыми она принимает эти значения.

В этом случае про случайную величину говорят, что она распределена по данному закону распределения или подчинена этому закону распределения.

Для задания дискретной случайной величины нужно знать все ее возможные значения и вероятности, с которыми принимаются эти значения, т.е. задать ее ***закон распределения,*** который может иметь вид таблицы, формулы или графика.

Таблица, в которой перечислены все ее возможные значения дискретной случайной величины и соответствующие им вероятности, называется ***рядом распределения***. Для удобства возможные значения дискретной случайной величины располагают в таблицу в порядке их возрастания:

x_i	x_1	x_2	…	x_n	…
p_i	p_1	p_2	…	p_n	…

где $p_i = P(X = x_i)$, $i = 1, 2, \ldots, n, \ldots$.

Заметим, что события $X = x_1, X = x_2, \ldots, X_n = x_n$ образуют полную группу, следовательно, сумма вероятностей этих событий равна единице

$$\sum_{i=1}^{n(\infty)} p_i = 1.$$

Пример 1. Два стрелка делают по одному выстрелу по мишени. Вероятности их попадания при одном выстреле равны соответственно 0,6 и 0,7. Составить ряд распределения случайной величины X – числа попаданий после двух выстрелов.

Решение. Очевидно, что X может принимать три значения: 0, 1 и 2. Найдем их вероятности:

Пусть события A_1 и A_2 – попадание по мишени соответственно первого и второго стрелка. Тогда

$$P(X=0) = P(\bar{A}_1\bar{A}_2) = 0,4 \cdot 0,3 = 0,12$$

$$P(X=1) = P(\bar{A}_1 A_2 + A_1\bar{A}_2) = 0,4 \cdot 0,7 + 0,6 \cdot 0,3 = 0,46$$

$$P(X=2) = P(A_1 A_2) = 0,6 \cdot 0,7 = 0,42$$

Следовательно, ряд распределения имеет вид:

x_i	0	1	2
p_i	0,12	0,46	0,42

Ряд распределения дискретной случайной величины можно изобразить графически в виде ***полигона*** или ***многоугольника распределения вероятностей***.

Для этого по горизонтальной оси в выбранном масштабе нужно отложить значения случайной величины, а по вертикальной – вероятности этих значений.

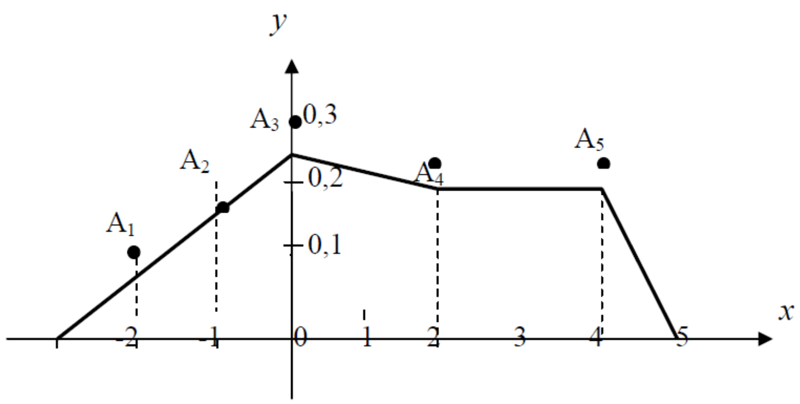
Тогда точки с координатами (x_i, p_i) будут изображать полигон распределения вероятностей, соединив же эти точки отрезками прямой, получим многоугольник распределения вероятностей.

Пример 2. Пусть X – дискретная случайная величина, заданная рядом распределения

x_i	-2	-1	0	2	4
p_i	0,1	0,2	0,3	0,2	0,2

Построить полигон и многоугольник распределения вероятностей.

Решение. На оси X откладываем значения x_i, равные $-2, -1, 0, 2, 4$, а по вертикальной оси вероятности этих значений:



Точки A_1, A_2, A_3, A_4, A_5 изображают полигон распределения, а ломаная $A_1\,A_2\,A_3\,A_4\,A_5$ – многоугольник распределения вероятностей.

Пример 3. В лотерее разыгрывается: автомобиль стоимостью 5000 ден.ед., 4 телевизора стоимостью 250 ден. ед., 5 видеомагнитофонов стоимостью 200 ден.ед. Всего продается 1000 билетов по 7 ден.ед. Составить закон распределения чистого выигрыша, полученного участником лотереи, купившим один билет.

Решение. Возможные значения случайной величины X–чистого выигрыша на один билет равны $0-7=-7$ ден.ед. (если билет не выиграл), $200-7=193$, 250-7=243, 5000-7=4993 ден.ед.(если на билет выпал выигрыш соответственно видеомагнитофона, телевизора или автомобиля). Учитывая, что из 1000 билетов число невыигравших составляет 990, а указанных выигрышей соответственно 5, 4 и 1, используя классическое определение вероятности, получим:

$$P(X=-7)={}^{990}\!/_{1000}=0,990$$

$$P(X=193)={}^{5}\!/_{1000}=0,005$$

$$P(X=243)={}^{4}\!/_{1000}=0,004$$

$$P(X=4993)={}^{1}\!/_{1000}=0,001$$

Ряд распределения имеет вид:

x_i	-7	193	243	4993
p_i	0,990	0,005	0,004	0,001

До сих пор в качестве описания ДСВ мы рассматривали ее закон распределения, представляющий собой ряд распределения.

Однако такое описание случайной величины X не является единственным, а главное, не универсально.

Так оно не применимо для непрерывной случайной величины (НСВ), т.к.

- во-первых, нельзя перечислить все бесконечное несчетное множество ее значений;
- во-вторых, вероятности каждого отдельно взятого значения НСВ равны нулю.

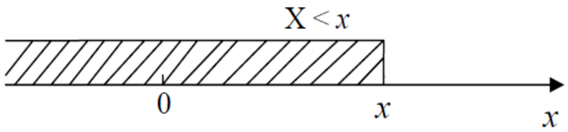
Функция распределения случайной величины и ее свойства

Для описания закона распределения случайной величины X возможен и другой подход: рассматривать не вероятности событий $X = x$ для разных x, как это имеет место в ряде распределения для ДСВ, а вероятности события $X < x$, где x –текущая переменная. Вероятность $P(X < x)$, очевидно, зависит от x, т.е. является некоторой функцией от x.

Функцией распределения случайной величины X называется функция $F(x)$, выражающая для каждого x вероятность того, что случайная величина X примет значение меньшее x:

$$F(x) = P(X < x)$$

Если значения случайной величины – точки на числовой оси, то геометрически функция распределения интерпретируется как вероятность того, что случайная величина X попадает левее заданной точки x:



Свойства функции распределения.

1) $0 \le F(x) \le 1$.

Действительно, так как функция распределения представляет собой вероятность, она может принимать только те значения, которые принимает вероятность $(0 \le p \le 1)$.

2) Функция распределения является неубывающей функцией на всей числовой оси, то есть $F(x_2) \ge F(x_1)$ при $x_2 > x_1$. Это следует из того, что

$$F(x_2)=P(X<x_2)=P((X<x_1)+(x_1 \le X<x_2))=P(X<x_1)+P(x_1 \le X<x_2)=$$
$$=F(x_1)+P(x_1 \le X<x_2).$$

Т.к. вероятность $P(x_1 \le X < x_2) \ge 0$, то из (4.3) вытекает $F(x_2) \ge F(x_1)$.

3) Функция $F(x)$ в точке x_0 непрерывна слева, т.е.

$$\lim_{x \to x_0 - 0} F(x) = F(x_0) \text{ или } F(x_0 - 0) = F(x_0)$$

4) $\lim\limits_{x \to -\infty} F(x) = 0,\ \lim\limits_{x \to +\infty} F(x) = 1$. В частности, если все возможные значения X лежат на интервале $[a,\ b]$, то $F(x)=0$ при $x \le a$ и $F(x)=1$ при $x \ge b$. Действительно, $X < a$ – событие невозможное, а $X < b$ – достоверное.

5) $P(X = x_0) = F(x_0 + 0) - F(x_0 - 0) = F(x_0 + 0) - F(x_0)$

6) Вероятность того, что случайная величина примет значение из интервала $[a,\ b)$, равна приращению ее функции распределения на этом интервале:

$$P(a \le X < b) = F(b) - F(a).$$

Таким образом, каждая функция распределения является неубывающей, непрерывной слева и удовлетворяющей условиям $F(-\infty)=0,\ F(+\infty)=1$ функцией. Верно и обратное: каждая функция, удовлетворяющая перечисленным условиям 1)-6), может рассматриваться как функция распределения некоторой случайной величины.

Законом распределения СВ называется любое правило, позволяющее определить ее функцию распределения.

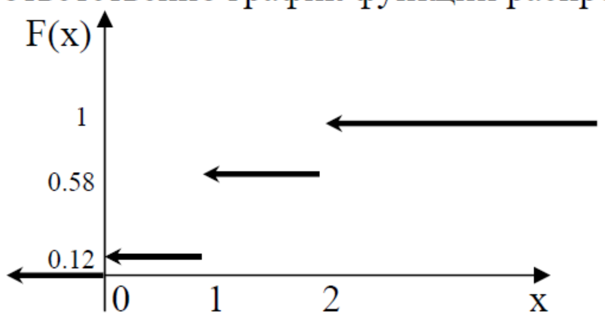
Для дискретной случайной величины значение $F(x)$ в каждой точке представляет собой сумму вероятностей тех ее возможных значений, которые меньше аргумента функции.

$$F(x)=\sum_{x_k<x} P(X=x_k)$$

Пример 4. Найдем $F(x)$ для примера 1:

$$F(x)=\begin{cases} 0, & x\le 0 \\ 0{,}12, & 0<x\le 1 \\ 0{,}12+0{,}46=0{,}58, & 1<x\le 2 \\ 0{,}58+0{,}42=1, & x>2 \end{cases}$$

Соответственно график функции распределения имеет ступенчатый вид:



Основные числовые характеристики дискретных и непрерывных случайных величин

Закон распределения (функция распределения и ряд распределения или плотность вероятности) полностью описывают поведение случайной величины. Однако такой закон распределения бывает трудно обозримым, не всегда удобным и даже необходимым для анализа.

В ряде задач достаточно знать некоторые ***числовые характеристики*** исследуемой величины (например, ее среднее значение и возможное отклонение от него), чтобы ответить на интересующий вопрос.

Рассмотрим основные числовые характеристики дискретных и непрерывных случайных величин.

Начнем с примера…

Пример 3. Известны законы распределения случайных величин X и Y – числа очков, выбиваемых первым и вторым стрелками.

x_i	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
p_i	0,1	0,1	0,05	0,03	0,05	0,12	0,11	0,04	0,05	0,13	0,22

y_j	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
p_j	0,01	0,02	0,06	0,09	0,1	0,25	0,2	0,1	0,1	0,05	0,02

Необходимо выяснить, какой из двух стрелков стреляет лучше.
Изучая ряды распределения случайных величин X и Y, ответить на этот вопрос далеко не просто из-за обилия числовых значений. К тому же у первого стрелка достаточно большие вероятности имеют крайние значения числа выбиваемых очков, а у второго стрелка – промежуточные значения. Очевидно, что из двух стрелков лучше стреляет тот, кто в *среднем* выбивает большее количество очков. Таким средним значением СВ является ее математическое ожидание.

Математическое ожидание ДСВ

Математическим ожиданием ДСВ называется сумма произведений ее возможных значений на соответствующие им вероятности:

$$M(X) = x_1p_1 + x_2p_2 + \ldots + x_np_n = \sum_{i=1}^{n} x_ip_i$$

Если число возможных значений случайной величины бесконечно, но счетно, то $M(X) = \sum_{i=1}^{\infty} x_ip_i$, если полученный ряд сходится абсолютно. Так как данный ряд может и расходиться, то соответствующая СВ может и не иметь математического ожидания.

Пример 6. Найдем математическое ожидание случайных величин и из примера 5.

Решение.

$$M(X) = \sum_{i=1}^{11} x_ip_i = 0\cdot 0,1 + 1\cdot 0,1 + \ldots 9\cdot 0,13 + 10\cdot 0,22 = 5,8$$

$$M(Y) = \sum_{j=1}^{11} y_jp_j = 0\cdot 0,01 + 1\cdot 0,02 + \ldots 9\cdot 0,05 + 10\cdot 0,02 = 5,41$$

Таким образом, сравнивая $M(X)$ и $M(Y)$, можно утверждать, что первый стрелок в среднем стреляет лучше второго.

Замечание. Математическое ожидание называют иногда *взвешенным средним*, так как оно приближенно равно среднему арифметическому наблюдаемых значений случайной величины при большом числе опытов.

Пример 7. Найдем математическое ожидание случайной величины X – числа стандартных деталей среди трех, отобранных из партии в 10 деталей, среди которых 2 бракованных.

Решение. Составим ряд распределения для X. Из условия задачи следует, что X может принимать значения 1, 2, 3. $p(X=1)=\frac{C_8^1\cdot C_2^2}{C_{10}^3}=\frac{1}{15}$, $p(X=2)=\frac{C_8^2\cdot C_2^1}{C_{10}^3}=\frac{7}{15}$, $p(X=3)=\frac{C_8^3}{C_{10}^3}=\frac{7}{15}$.

Тогда $M(X)=1\cdot\frac{1}{15}+2\cdot\frac{7}{15}+3\cdot\frac{7}{15}=2{,}4$.

Свойства математического ожидания.

1) Из определения математического ожидания следует, что его значение не меньше наименьшего возможного значения случайной величины и не больше наибольшего.

Действительно, обозначая a и b наименьшее и наибольшее значение среди $x_1, x_2,\ldots,x_n$ имеем:

$a(p_1+p_2+\ldots+p_n)\le M(X)=x_1p_1+x_2p_2+\ldots+x_np_n\le b(p_1+p_2+\ldots+p_n)$

Учитывая, что $p_1+p_2+\ldots+p_n=1$, получаем $a\le M(X)\le b$.

2) Математическое ожидание постоянной равно самой постоянной:

$$M(C) = C.$$

3) Постоянный множитель можно выносить за знак математического ожидания:

$$M(CX) = C\,M(X).$$

4) Математическое ожидание произведения двух *независимых* случайных величин равно произведению их математических ожиданий:

$$M(XY) = M(X)M(Y).$$

5) Математическое ожидание суммы двух случайных величин (зависимых или независимых) равно сумме математических ожиданий слагаемых:

$$M(X+Y) = M(X) + M(Y).$$

Замечание. Из свойства 4 следует, что сумма любого числа случайных величин равна сумме математических ожиданий слагаемых.

Пример 8. Найти математическое ожидание суммы числа очков, выпавших при броске пяти игральных костей.

Решение. Найдем математическое ожидание числа очков, выпавших при броске одной кости:

$M(X_1) = (1+2+3+4+5+6)\cdot\frac{1}{6}=\frac{7}{2}$.

Тому же числу равно математическое ожидание числа очков, выпавших на любой кости.

Следовательно, по свойству 5) $M(X_1+X_2+\ldots+X_5)=5\cdot\frac{7}{2}=\frac{35}{2}$.

Математическое ожидание НСВ

Введем понятие математического ожидания для непрерывной случайной величины.

$$M(X) = \int_a^b xp(x)dx$$

Этот определенный интеграл называют математическим ожиданием рассматриваемой НСВ X.

Если значения НСВ X принадлежат бесконечному интервалу $(-\infty, +\infty)$, то ее математическое ожидание определяется формулой

$$M(X) = \int_{-\infty}^{+\infty} xp(x)dx$$

при условии, что несобственный интеграл первого рода сходится абсолютно.

Замечание. Математическое ожидание НСВ обладает теми же свойствами, что и математическое ожидание ДСВ.

Разность $X - M(X)$ называется *отклонением* случайной величины X от ее математического ожидания $M(X)$. Отклонение является случайной величиной. Покажем, что математическое ожидание отклонения равно нулю. Действительно,

$$M(X - M(X)) = M(X) - M(M(X)) = M(X) - M(X) = 0$$

Это равенство объясняется тем, что отклонения могут быть как положительными, так и отрицательными; в результате их взаимного погашения среднее значение отклонения равно нулю.

Дисперсия

Для того чтобы иметь представление о поведении случайной величины, недостаточно знать только ее математическое ожидание: зная математическое ожидание, нельзя сказать, какие значения принимает случайная величина и как они отклоняются от среднего значения. Чтобы знать, как рассеяны значения случайной величины вокруг ее математического ожидания, вводят другую числовую характеристику, называемую дисперсией. За меру рассеяния нельзя принять отклонение СВ от ее математического ожидания. Вследствие этого рассматривают их квадраты.

Пример 9. Рассмотрим две случайные величины: X и Y, заданные рядами распределения вида

x_i	49	50	51
p_i	0,1	0,8	0,1

y_j	0	100
p_j	0,5	0,5

Найдем $M(X) = 49·0,1 + 50·0,8 + 51·0,1 = 50$, $M(Y) = 0·0,5 + 100·0,5 = 50$. Как видно, математические ожидания обеих величин равны, но если для X $M(X)$ хорошо описывает поведение случайной величины, являясь ее наиболее вероятным возможным значением (причем остальные значения ненамного отличаются от 50), то значения Y существенно отстоят от $M(Y)$. Следовательно, наряду с математическим ожиданием желательно знать, насколько значения случайной величины отклоняются от него. Для характеристики этого показателя служит дисперсия.

Дисперсией (рассеянием) случайной величины называется математическое ожидание квадрата ее отклонения от математического ожидания:

$$D(X) = M\,(X - M(X))^2.$$

Пример 9. Найдем дисперсию случайной величины X (числа стандартных деталей среди отобранных) в примере 6 данной лекции. Вычислим значения квадрата отклонения каждого возможного значения от математического ожидания:$(1 - 2,4)^2 = 1,96$; $(2 - 2,4)^2 = 0,16$; $(3 - 2,4)^2 = 0,36$. Следовательно,

$$D(X) = 1,96 \cdot \frac{1}{15} + 0,16 \cdot \frac{7}{15} + 0,36 \cdot \frac{7}{15} = \frac{28}{75} \approx 0,373.$$

Замечание. Из определения дисперсии следует, что эта величина принимает только неотрицательные значения.

Замечание. Из определения дисперсии следует, что эта величина принимает только неотрицательные значения.

Для вычисления дисперсии существует также формула:

$$D(X) = M(X^2) - M^2(X).$$

Доказательство. Используя то, что $M(X)$ – постоянная величина, и свойства математического ожидания, преобразуем формулу (5.10) к виду:
$D(X) = M(X - M(X))^2 = M(X^2 - 2X·M(X) + M^2(X)) = M(X^2) - 2M(X)·M(X) + M^2(X) = M(X^2) - 2M^2(X) + M^2(X) = M(X^2) - M^2(X)$, что и требовалось доказать.

Пример 10. Вычислим дисперсии случайных величин X и Y, рассмотренных в примере 9.

$D(X) = (49^2·0,1 + 50^2·0,8 + 51^2·0,1) - 50^2 = 2500,2 - 2500 = 0,2$.

$D(Y) = (0^2·0,5 + 100^2·0,5) - 50^2 = 5000 - 2500 = 2500$.

Итак, дисперсия второй случайной величины в несколько тысяч раз больше дисперсии первой. Таким образом, даже не зная законов распределения этих величин, по известным значениям дисперсии мы можем утверждать, что X мало отклоняется от своего математического ожидания, в то время как для Y это отклонение весьма существенно.

Свойства дисперсии.

1) Дисперсия постоянной величины C равна нулю:

$$D(C) = 0.$$

2) Постоянный множитель можно выносить за знак дисперсии, возведя его в квадрат:

$$D(CX) = C^2D(X).$$

3) Дисперсия суммы двух независимых случайных величин равна сумме их дисперсий:

$$D(X + Y) = D(X) + D(Y).$$

Следствие 1. Дисперсия суммы нескольких взаимно независимых случайных величин равна сумме их дисперсий.

Следствие 2. Дисперсия суммы постоянной и случайной величин равна дисперсии случайной величины.

4) Дисперсия разности двух независимых случайных величин равна сумме их дисперсий:

$$D(X - Y) = D(X) + D(Y).$$

Дисперсия дает среднее значение квадрата отклонения случайной величины от среднего; для оценки самого отклонения служит величина, называемая средним квадратическим отклонением.

Среднее квадратическое отклонение

Средним квадратическим отклонением σ случайной величины X называется квадратный корень из дисперсии:

$$\sigma = \sqrt{D(X)}\,.$$

Очевидно, размерность дисперсии равна квадрату размерности случайной величины, поэтому среднее квадратическое отклонение имеет ту же размерность, что и СВ X. Среднее квадратическое отклонение применяется тогда, когда желательно получить оценку рассеяния СВ в тех же единицах, в которых выражены значения самой величины.

Пример 11. В примере 11 средние квадратические отклонения X и Y равны соответственно $\sigma_x = \sqrt{0{,}2} \approx 0{,}447;\quad \sigma_y = \sqrt{2500} = 50.$

Интерпретация математического ожидания и дисперсии в финансовом анализе

Пусть, например, известно распределение доходности X некоторого актива (например, акции), т.е. известны значения доходности x_i и соответствующие им вероятности p_i за рассматриваемый промежуток времени. Тогда, очевидно, математическое ожидание $M(X)$ выражает среднюю (прогнозную) доходность актива, а дисперсия $D(X)$ или среднее квадратическое отклонение $\sigma(X)$ – меру отклонения, колеблемости доходности от ожидаемого среднего значения, т.е. риск данного актива.

Замечание. Обратим внимание на то, что сама величина X – случайная, а ее числовые характеристики (математическое ожидание, дисперсия, среднее квадратическое отклонение и др.), призванные в сжатой форме выразить наиболее существенные черты распределения, есть величины *неслучайные* (постоянные).

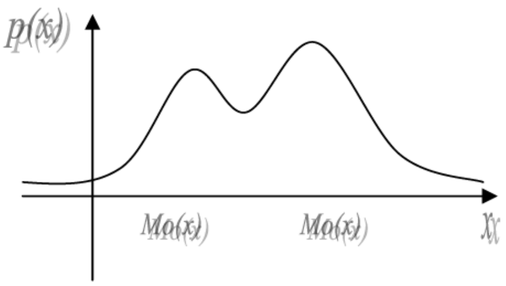
В теории вероятностей числовые характеристики играют большую роль. Часто удается решать вероятностные задачи, оперируя лишь числовыми характеристиками СВ. Применение вероятностных методов для решения практических задач в значительной мере определяется умением пользоваться числовыми характеристиками СВ, оставляя в стороне законы распределения.

Мода и медиана. Квантили. Моменты случайной величины. Асимметрия и аксцесс

Кроме математического ожидания и дисперсии в теории вероятностей применяется еще ряд числовых характеристик, отражающих те или иные особенности распределения.

Модой $Mo(X)$ случайной величины X называется ее наиболее вероятное значение (для которого вероятность p_i или плотность $p(x)$ достигает максимума).

Если вероятность p_i или плотность $p(x)$ достигает максимума не в одной, а в нескольких точках, распределение называется ***полимодальным***.



Медианой $Me(X)$ непрерывной случайной величины X называется такое ее значение, для которого справедливо равенство

$$P(x < Me(X)) = P(x > Me(X)) = \frac{1}{2}$$

Очевидно равенство $P(x < Me(X)) = F(x = Me(X)) = \dfrac{1}{2}$.

Квантилем уровня q (или q***-квантилем***) называется такое значение x_q случайной величины, при котором функция ее распределения принимает значение, равное q, т.е.

$$F(x_q) = P(x < x_q) = q$$

Введенное выше понятие медианы СВ есть квантиль уровня 0,5. Квантили $x_{0,25}$ и $x_{0,75}$ получили название соответственно *верхнего* и *нижнего квартилей*. В литературе также встречаются термины: *децили*, под которыми понимаются квантили $x_{0,1}, x_{0,2}, \ldots, x_{0,9}$ и *процентили* – квантили $x_{0,01}, x_{0,02}, \ldots, x_{0,99}$.

Среди числовых характеристик СВ особое значение имеют ***моменты***– начальные и центральные.

Начальным ***моментом*** k***-го порядка*** СВ X называется математическое ожидание k-ой степени этой величины:

$$\nu_k = M(X^k)$$

Центральным моментом k***-го порядка*** СВ X называется математическое ожидание k-ой степени отклонения СВ X от ее математического ожидания.

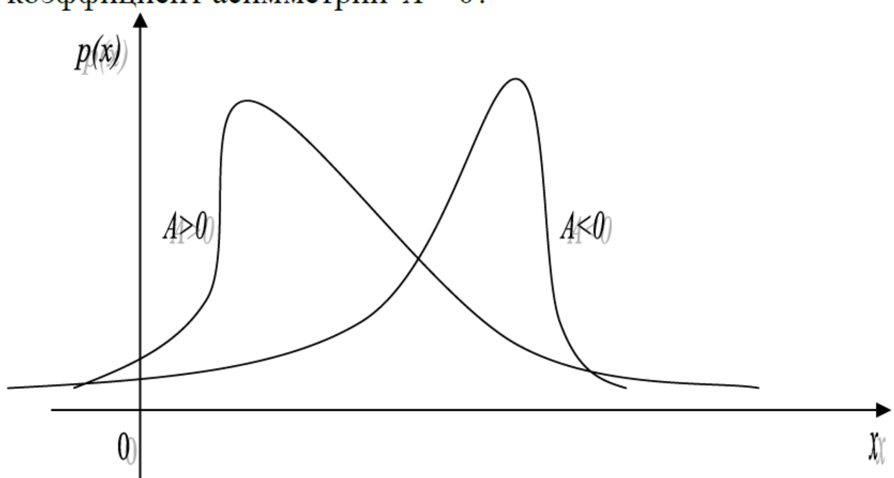
$$\mu_k = M(X - M(X))^k$$

При $k = 1$ первый начальный момент СВ X есть ее математическое ожидание, т.е. $\nu_1 = M(X)$; при $k = 2$ второй центральный момент–дисперсия, т.е. $\mu_2 = D(X)$.

Третий центральный момент μ_3 служит для характеристики ***асимметрии*** (***скошенности***) распределения. Он имеет размерность куба СВ. Чтобы получить безразмерную величину, ее делят на σ^3. Полученная величина A называется *коэффициентом асимметрии* СВ:

$$A = \frac{\mu_3}{\sigma^3} \qquad (\;$$

Если распределение симметрично относительно математического ожидания, то коэффициент асимметрии $A = 0$.

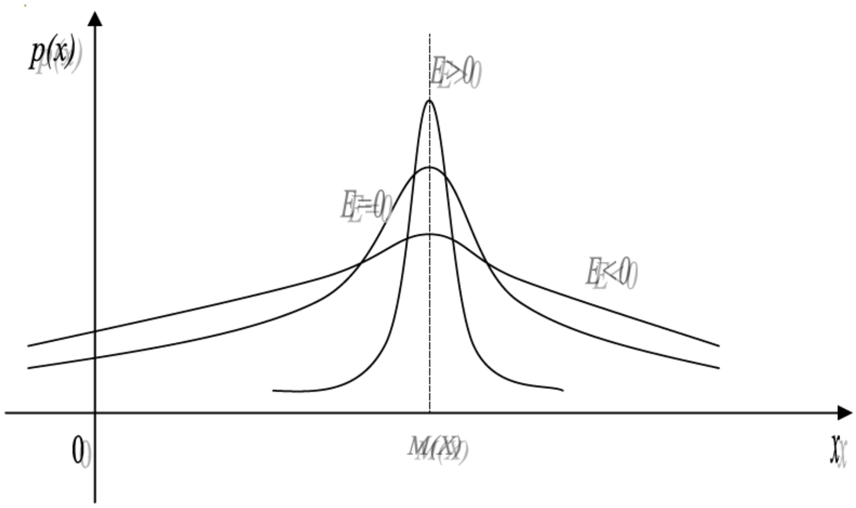


Четвертый центральный момент μ_4 служит для характеристики *крутости* (*островершинности* или *плосковершинности*) распределения.

Эксцессом СВ называется число

$$E = \frac{\mu_4}{\sigma^4} - 3 \qquad (\;$$

Число 3 вычитается из соотношения $\frac{\mu_4}{\sigma^4}$, т.к. для наиболее часто встречающегося нормального распределения, о котором речь пойдет ниже, отношение $\frac{\mu_4}{\sigma^4} = 3$. Кривые, более островершинные, чем нормальная, обладают положительным эксцессом, более плосковершинные – отрицательным эксцессом.



Биномиальный закон распределения

Вернемся к схеме независимых испытаний и найдем закон распределения случайной величины X – числа появлений события A в серии из n испытаний. Возможные значения A: 0, 1,…,m,…,n. Соответствующие им вероятности можно вычислить по формуле Бернулли:

$$p(X=m)=C_n^m p^m q^{n-m}$$

(p – вероятность появления A в каждом испытании).

Ряд распределения биномиального закона имеет вид:

x_i	0	1	2	…	m	…	n
p_i	q^n	$C_n^1 p^1 q^{n-1}$	$C_n^2 p^2 q^{n-2}$	…	$C_n^m p^m q^{n-m}$	…	p^n

Очевидно, что определение биномиального закона распределения корректно, так как основное свойство ряда распределения (выполнено, ибо $\sum_{i=0}^{n} p_i$ есть не что иное, как сумма всех членов разложения бинома Ньютона (отсюда и название закона – ***биномиальный***):

$$C_n^0 q^n + C_n^1 p^1 q^{n-1} \ldots + C_n^m p^m q^{n-m} + \ldots + C_n^{n-1} p^{n-1} q^1 + C_n^n p^n = (q+p)^n = 1^n = 1.$$

Теорема 1. Математическое ожидание и дисперсия случайной величины X, распределенной по биномиальному закону, вычисляются соответственно по формулам:

$$M(X)=np$$

$$D(X)=npq$$

Из определения моды и формулы (3.3) вытекает, что мода случайной величины, распределенной по биномиальному закону, является целым числом, которое находится по формуле:

$$np-q \le Mo(X) \le np+p$$

Пример 1. Составить ряд распределения, найти математическое ожидание и дисперсию случайной величины X – числа попаданий при 5 выстрелах, если вероятность попадания при одном выстреле равна 0,8.

Решение.

$P(X=0)=1\cdot(0,2)^5 = 0,00032$; $P(X=1) = 5\cdot0,8\cdot(0,2)^4 = 0,0064$;

$P(X=2) = 10\cdot(0,8)^2\cdot(0,2)^3 = 0,0512$; $P(X=3) = 10\cdot(0,8)^3\cdot(0,2)^2 = 0,2048$;

$P(X=4) = 5\cdot(0,8)^4\cdot0,2 = 0,4096$; $P(X=5) = 1\cdot(0,8)^5 = 0,32768$.

Таким образом, ряд распределения имеет вид:

x_i	0	1	2	3	4	5
p_i	0.00032	0.0064	0.0512	0.2048	0.4096	0.32768

По формуле (6.3) математическое ожидание случайной величины X равняется $M(X) = np = 5\cdot 0,8 = 4$, по формуле (6.4) вычисляется дисперсия $D(X) = npq = 5\cdot 0,8\cdot 0,2 = 0,8$.

Закон Пуассона

Рассмотрим дискретную случайную величину X, принимающую только целые неотрицательные значения (0, 1, 2,…, m,…), последовательность которых бесконечна, но счетна. Такая случайная величина называется распределенной ***по закону Пуассона***, если вероятность того, что она примет значение m, выражается формулой Пуассона (3.5):

$$P(X=m) = \frac{\lambda^m}{m!}e^{-\lambda},$$

где λ – некоторая положительная величина, называемая *параметром* закона Пуассона.

Ряд распределения закона Пуассона имеет вид:

x_i	0	1	2	…	m	…
p_i	$e^{-\lambda}$	$\lambda e^{-\lambda}$	$\frac{\lambda^2 e^{-\lambda}}{2!}$	…	$\frac{\lambda^m e^{-\lambda}}{m!}$	…

Очевидно, что определение закона Пуассона корректно, так как основное свойство ряда распределения (4.1) выполнено, ибо сумма всех вероятностей равна 1:

$$\sum_{m=0}^{\infty} p(X=m) = e^{-\lambda} + \lambda e^{-\lambda} + \frac{\lambda^2 e^{-\lambda}}{2!} + \frac{\lambda^m e^{-\lambda}}{m!} + \ldots = e^{-\lambda}\sum_{m=0}^{\infty}\frac{\lambda^m}{m!} = e^{-\lambda}\cdot e^{\lambda} = 1$$

(использовано разложение в ряд Тейлора функции e^x при $x=\lambda$).

Теорема 2. Математическое ожидание и дисперсия случайной величины X, распределенной по закону Пуассона, вычисляются соответственно по формулам:

$$M(X) = \lambda$$

$$D(X) = \lambda$$

Теорема 3. Сумма двух независимых случайных величин, подчиняющихся распределению Пуассона с параметрами λ_1 и λ_2, также имеет распределение Пуассона с параметром $\lambda_1 + \lambda_2$.

В начале прошлого столетия в связи с задачами биологии и телефонной связи возникла простая, но весьма полезная схема, получившая наименование процессов гибели и размножения. Например, закону Пуассона подчиняется число α-частиц, достигающих в течение времени t некоторого участка пространства, число клеток с измененными под действием рентгеновского излучения хромосомами, число ошибочных телефонных вызовов в течение суток и т.д.

Геометрическое и гипергеометрическое распределение

Теорема 4. Математическое ожидание и дисперсия случайной величины *X*, распределенной по геометрическому закону, вычисляются соответственно по формулам:

$$M(X) = \frac{1}{p}$$

$$D(X) = \frac{q}{p^2}$$

Пример 2. Определить математическое ожидание и дисперсию случайной величины X – числа бросков монеты до первого появления герба. Эта величина может принимать бесконечное число значений (множество возможных значений есть множество натуральных чисел).

Решение.

Ряд ее распределения имеет вид:

x_i	1	2	…	n	…
p_i	$1/2$	$1/2^2$	…	$1/2^n$	…

Тогда $M(X) = \dfrac{1}{1/2} = 2$. $\qquad D(X) = \dfrac{1/2}{1/4} = 2$.

Теорема 5. Математическое ожидание и дисперсия случайной величины, распределенной по гипергеометрическому закону, определяются формулами:

$$M(X) = n\frac{M}{N},$$

$$D(X) = n\frac{M}{N-1}\left(1-\frac{M}{N}\right)\left(1-\frac{n}{N}\right).$$

Пример 3. В лотерее «Спортлото 6 из 36» денежные призы получают участники, угадавшие 3, 4, 5 и 6 видов спорта из отобранных случайно 6 видов из 36 (размер приза увеличивается с увеличением числа угаданных видов спорта). Определить математическое ожидание и дисперсию случайной величины X – числа угаданных видов спорта среди случайно отобранных шести. Какова вероятность получения денежного приза?

Решение.

Число угаданных видов спорта в лотерее «6 из 36» есть случайная величина, имеющая гипергеометрическое распределение с параметрами $n=6,\ M=6,\ N=36$. Ряд распределения СВ X имеет вид

x_i	0	1	2	3	4	5	6
p_i	$\frac{28275}{92752}$	$\frac{40716}{92752}$	$\frac{19575}{92752}$	$\frac{1450}{34782}$	$\frac{2175}{649264}$	$\frac{15}{162316}$	$\frac{1}{1947792}$

Вероятность получения денежного приза

$$P(3 \le X \le 6) = \sum_{i=3}^{6} P(X=i) = \frac{1450}{34782} + \frac{2175}{649264} + \frac{15}{162316} + \frac{1}{1947792} \approx 0{,}043$$

По формулам (6.10) и (6.11) найдем:

$$M(X) = n\frac{M}{N} = \frac{6\cdot 6}{36} = 1$$

$$D(X) = n\frac{M}{N-1}\left(1-\frac{M}{N}\right)\left(1-\frac{n}{N}\right) = \frac{36}{35}\cdot\frac{30}{36}\cdot\frac{30}{36} = \frac{5}{7}.$$

Таким образом, среднее число угаданных видов спорта из 6 всего 1, а вероятность выигрыша только около 4%.

Равномерный закон распределения

Выше были рассмотрены примеры таких законов распределения для дискретных случайных величин. Для непрерывных случайных величин тоже существуют часто встречающиеся виды законов распределения, и в качестве первого из них рассмотрим равномерный закон.

Непрерывная случайная величина X имеет ***равномерный закон*** распределения на отрезке $[a,b]$, если ее плотность вероятности *p(x)* постоянна на этом отрезке и равна нулю вне его, т.е.

$$p(x) = \begin{cases} c \ \text{ при } a \le x \le b, \\ 0 \text{ при } \ x < a, \quad x > b. \end{cases}$$

Функция распределения случайной величины X, распределенной по равномерному закону, есть

$$F(x) = \begin{cases} 0 & \text{при } \ x \le a, \\ \dfrac{x-a}{b-a} & \text{при } a < x \le b, \\ 1 & \text{при } \ x > b. \end{cases}$$

Математическое ожидание $M(X)=\frac{a+b}{2}$,

дисперсия $D(X)=\frac{(b-a)^2}{12}$,

среднее квадратическое отклонение $\sigma(X)=\frac{b-a}{2\sqrt{3}}$.

Показательный закон распределения

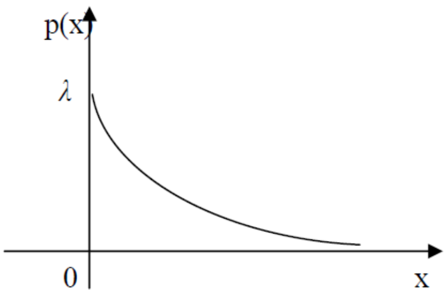
Непрерывная случайная величина X имеет ***показательный (экспоненциальный)*** закон распределения с параметром λ, если ее плотность вероятности имеет вид:

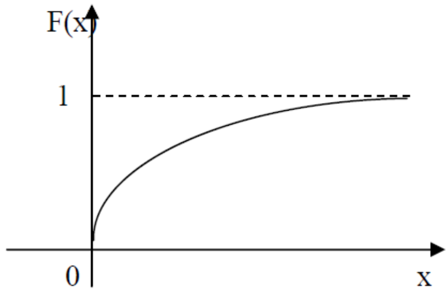
$$p(x)=\begin{cases}0 & \text{при } x<0,\\ \lambda e^{-\lambda x} & \text{при } x\geq 0.\end{cases}$$

Функция распределения случайной величины, распределенной по показательному закону, равна

$$F(x)=\begin{cases}0 & \text{при } x<0\\ 1-e^{-\lambda x} & \text{при } x\geq 0.\end{cases}$$

Кривая распределения *p(x)* и график функции распределения $F(x)$ приведены ниже:





Для случайной величины, распределенной по показательному закону

$$M(X)=\frac{1}{\lambda};\qquad D(X)=\frac{1}{\lambda^2},\qquad \sigma(X)=\frac{1}{\lambda}.$$

Вероятность попадания в интервал $(a;b)$ непрерывной случайной величины X, распределенной по показательному закону,

$$P(a<X<b)=e^{-\lambda a}-e^{-\lambda b}.$$

Замечание. Показательный закон распределения вероятностей встречается во многих задачах, связанных с простейшим потоком событий. Под ***потоком событий*** понимают последовательность событий, наступающих одно за другим в случайные моменты. Например, поток вызовов на телефонной станции, поток заявок в системе массового обслуживания и др.

Часто длительность времени безотказной работы элемента имеет показательное распределение, функция распределения которого

$$F(t)=P(T<t)=1-e^{-\lambda t} \quad (\lambda>0)$$

определяет ***вероятность отказа*** элемента за время длительностью t. Здесь T – длительность времени безотказной работы элемента, λ – интенсивность отказов (среднее число отказов в единицу времени).

Функция надежности

$$R(t)=e^{-\lambda t}$$

определяет вероятность безотказной работы элемента за время длительностью t.

Пример 5. Установлено, что время ремонта магнитофонов есть случайная величина X, распределенная по показательному закону. Определить вероятность того, что на ремонт магнитофона потребуется не менее 15 дней, если среднее время ремонта магнитофонов составляет 12 дней. Найти плотность вероятности, функцию распределения и среднее квадратическое отклонение случайной величины X.

Решение. По условию математическое ожидание $M(X)=\dfrac{1}{\lambda}=12$, откуда параметр $\lambda=\dfrac{1}{12}$ и тогда плотность вероятности и функция распределения имеют вид: $p(x)=\dfrac{1}{12}e^{-\frac{1}{12}x}$; $F(x)=1-e^{-\frac{1}{12}x}$ $(x\geq 0)$. Искомую вероятность $P(X\geq 15)$ можно было найти, используя функцию распределения:

$$P(X\geq 15)=1-P(X<15)=1-F(15)=1-\left(1-e^{-\frac{15}{12}}\right)=e^{-\frac{15}{12}}=0{,}2865.$$

Среднее квадратическое отклонение $\sigma(X)=M(X)=12$ дней.

Пример 6. Испытывают три элемента, которые работают независимо один от другого. Длительность времени безотказной работы элементов распределена по показательному закону: для первого элемента $F_1(t)=1-e^{-0{,}1t}$; для второго $F_2(t)=1-e^{-0{,}2t}$; для третьего элемента $F_3(t)=1-e^{-0{,}3t}$. Найти вероятности того, что в интервале времени $(0;5)$ч. откажут: а) только один элемент; б) только два элемента; в) все три элемента.

Решение. Вероятность отказа первого элемента

$$P_1 = F_1(5) = 1 - e^{-0{,}1\cdot 5} = 1 - e^{-0{,}5} = 1 - 0{,}5957 = 0{,}4043.$$

Вероятность отказа второго элемента

$$P_2 = F_2(5) = 1 - e^{-0{,}2\cdot 5} = 1 - e^{-1} = 1 - 0{,}3779 = 0{,}6321.$$

Вероятность отказа третьего элемента

$$P_3 = F_3(5) = 1 - e^{-0{,}3\cdot 5} = 1 - e^{-1{,}5} = 1 - 0{,}2231 = 0{,}7769.$$

Искомая вероятность

а) $P = p_1 q_2 q_3 + q_1 p_2 q_3 + q_1 q_2 p_3 = 0{,}034 + 0{,}084 + 0{,}1749 = 0{,}2929$.

б) $P = p_1 p_2 q_3 + p_1 q_2 p_3 + q_1 p_2 p_3 = 0{,}057 + 0{,}1187 + 0{,}2925 = 0{,}4682$.

в) $P = p_1 p_2 p_3 = 0{,}1985$.

Нормальный закон распределения

В теории вероятностей и математической статистике важнейшую роль играет так называемое нормальное или гауссовское распределение. Оно также широко применяется и при решении прикладных задач. Значимость нормального распределения определяется тем, что оно служит хорошим приближением для большого числа наборов случайных величин, получаемых при наблюдениях и экспериментах. Нормальное распределение почти всегда имеет место, когда наблюдаемые случайные величины формируются под влиянием большого числа случайных факторов, ни один из которых существенно не превосходит остальные.

Непрерывная случайная величина X имеет ***нормальный закон распределения (закон Гаусса)*** с параметрами a и σ^2, если ее плотность вероятности имеет вид:

$$p(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \cdot e^{-\frac{(x-a)^2}{2\sigma^2}}, \quad -\infty < x < +\infty.$$

Кривую нормального закона распределения называют ***нормальной*** или ***кривой Гаусса***.

Для случайной величины, распределенной по нормальному закону,

$$M(X) = a,$$

$$D(X) = \sigma^2.$$

Сложность непосредственного нахождения функции распределения случайной величины, распределенной по нормальному закону, по формуле
и вероятности ее попадания на некоторый промежуток по формуле
связана с тем, что интеграл от функции не берется в элементарных функциях. Поэтому ее выражают через функцию Лапласа (интеграл вероятностей), для которой составлены таблицы.

$$\Phi(x)=\frac{2}{\sqrt{2\pi}}\cdot\int_0^x e^{\frac{-t^2}{2}}dt$$

Функция распределения случайной величины *X*, распределенной по нормальному закону, выражается через функцию Лапласа *Ф(x)* по формуле

$$F(x)=\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\Phi\left(\frac{x-a}{\sigma}\right)$$

Вероятность попадания значений нормальной случайной величины *X* в интервал $[\alpha,\beta]$ определяется формулой

$$P(\alpha\le x\le\beta)=F(\beta)-F(\alpha)=\frac{1}{2}\left[\Phi\left(\frac{\beta-a}{\sigma}\right)-\Phi\left(\frac{\alpha-a}{\sigma}\right)\right].$$

Вероятность того, что отклонение случайной величины *X*, распределенной по нормальному закону, от математического ожидания *a* не превысит величину $\delta>0$ (по абсолютной величине), равна

$$P(|x-a|\le\delta)=P(a-\delta\le x\le a+\delta)=\frac{1}{2}\left[\Phi\left(\frac{a+\delta-a}{\sigma}\right)-\Phi\left(\frac{a-\delta-a}{\sigma}\right)\right]=\Phi\left(\frac{\delta}{\sigma}\right)$$

«Правило трех сигм»: Если случайная величина *X* имеет нормальный закон распределения с параметрами *a* и σ^2, т.е. $N(a;\sigma^2)$, то практически достоверно, что ее значения заключены в интервале $(a-3\sigma;a+3\sigma)$:

$$P(|x-a|\le3\sigma)=\Phi\left(\frac{3\sigma}{\sigma}\right)=\Phi(3)=0{,}9973.$$

Отклонение по абсолютной величине нормально распределенной СВ X больше, чем на 3σ, является событием практически невозможным, т.к. его вероятность весьма мала:

$$P(|x-a|>3\sigma)=1-\Phi\left(\frac{3\sigma}{\sigma}\right)=1-\Phi(3)=1-0{,}9973=0{,}0027$$

Т.к. кривая Гаусса симметрична относительно математического ожидания, то коэффициент асимметрии нормального распределения $A=0$.

Эксцесс нормального распределения *E*=0 и крутость других распределений определяется по отношению к нормальному.

Пример 7. Определить закон распределения случайной величины *X*, если ее плотность распределения вероятностей задана функцией:

$$p(x)=\frac{1}{6\sqrt{2\pi}}\cdot e^{-\frac{(x-1)^2}{72}}.$$

Найти математическое ожидание, дисперсию и функцию распределения случайной величины X.

Решение. Сравнивая данную функцию *p(x)* с функцией плотности вероятности для случайной величины, распределенной по нормальному закону, заключаем, что случайная величина *X* распределена по нормальному закону с параметрами $a=1$ и $\sigma=6$.

Тогда $M(X)=1$, $\sigma(X)=6$, $D(X)=36$.

Функция распределения случайной величины X имеет вид:

$$F(x)=\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\Phi\left(\frac{x-1}{6}\right).$$

Пример 8. Текущая цена акции может быть смоделирована с помощью нормального закона распределения с математическим ожиданием 15 ден.ед. и средним квадратическим отклонением 0,2 ден. ед.

Найти вероятность того, что цена акции: а) не выше 15,3 ден. ед.; б) не ниже 15,4 ден. ед.; в) от 14,9 до 15,3 ден. ед. Найти границы, в которых будет находиться текущая цена акции.

Решение. Так как $a = 15$ и $\sigma=0{,}2$, то

$$P(X\le 15{,}3)=F(15{,}3)=\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\Phi\left(\frac{15{,}3-15}{0{,}2}\right)=\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\Phi\left(\frac{3}{2}\right)=$$

$$=\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\cdot 0{,}8664=0{,}9332.$$

$$P(X\ge 15{,}4)=1-F(15{,}4)=1-\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\Phi\left(\frac{15{,}4-15}{0{,}2}\right)\right)=\frac{1}{2}-\frac{1}{2}\Phi(2)=$$

$$=\frac{1}{2}-\frac{1}{2}\cdot 0{,}9545=0{,}0228.$$

$$P(14{,}9\le x\le 15{,}3)=\frac{1}{2}\left[\Phi\left(\frac{15{,}3-15}{0{,}2}\right)-\Phi\left(\frac{14{,}9-15}{0{,}2}\right)\right]=\frac{1}{2}\left[\Phi(1{,}5)+\Phi(0{,}5)\right]=$$

$$=\frac{1}{2}(0{,}8664+0{,}3829)=0{,}6246.$$

По правилу трех сигм $P(|X-15|\le 0{,}6)=0{,}9973$ и, следовательно, $15-0{,}6\le X\le 15+0{,}6$. Окончательно $14{,}4\le X\le 15{,}6$.

Пример 9. Автомат изготавливает детали, контролируя их диаметры X. Считая, что случайная величина X распределена нормально с параметрами $\sigma=0{,}1$мм и $a=10$мм, найти интервал, в котором с вероятностью 0,9973 будут заключены диаметры изготовленных деталей.

Решение. Найдем отклонение δ по известным вероятности отклонения и $\sigma=0{,}1$ (по формуле (6.31)):

$$\Phi\left(\frac{\delta}{\sigma}\right)=0{,}9973.$$

По таблице значений функции Лапласа находим, что $\frac{\delta}{\sigma}=3$. Следовательно, $\delta=3\sigma=0{,}3$. Из неравенства $|X-10|<0{,}3$ получаем $-0{,}3<X-10<0{,}3$ или $9{,}7<X<10{,}3$

Пример 10. Рост взрослых мужчин является случайной величиной, распределенной по нормальному закону. Пусть математическое ожидание ее равно 175 см, а среднее квадратическое отклонение – 6 см. Определить вероятность того, что хотя бы один из наудачу выбранных пяти мужчин будет иметь рост от 170 до 180 см.

Решение. Найдем вероятность того, что рост мужчины будет принадлежать интервалу $(170;180)$:

$$P(170 < x < 180) = \frac{1}{2}\left[\Phi\left(\frac{180-175}{6}\right) - \Phi\left(\frac{170-175}{6}\right)\right] =$$

$$= \frac{1}{2}\left[\Phi(0,83) + \Phi(0,83)\right] = \Phi(0,83) = 0,5935 \approx 0,6.$$

Тогда вероятность того, что рост мужчины не будет принадлежать интервалу (170; 180) q=1–0,6=0,4.

Вероятность того, что хотя бы один из 5 мужчин будет иметь рост от 170 до 180 см равна:

$$P = 1 - q^5 = 1 - 0,4^5 = 0,9898.$$

ТЕМА 9. МАТЕМАТИЧЕСКАЯ СТАТИСТИКА

9.1. Основы математической статистики

Математическая статистика (МС) — раздел математики, изучающий методы сбора, систематизации и обработки результатов наблюдений с целью выявления статистических закономерностей. МС опирается на ТВ. Если ТВ изучает закономерности случайных явлений на основе абстрактного определения действительности (теоретической вероятностной модели), то МС оперирует непосредственно результатами наблюдений над случайным явлением, представляющим выборку из некоторой конечной или гипотетической бесконечной генеральной совокупности. Используя результаты, полученные теорией вероятностей, МС позволяет не только оценить значения искомых характеристик, но и выявить степень точности выводов, получаемых при обработке данных. Коротко говоря, ТВ позволяет находить вероятности «сложных» событий через вероятности «простых» событий (связанных с ними каким-то образом), а МС по наблюдаемым значениям (выборке) оценивает вероятности этих событий либо осуществляет проверку предположений (гипотез) относительно этих вероятностей.

Задачи МС:

1. указать способы сбора и группировки статистических сведений, полученных в результате наблюдений или в результате специально поставленных экспериментов;
2. разработать методы анализа статистических данных в зависимости от целей исследования.

Ко второй задаче относятся:

а) оценка неизвестной вероятности события; оценка неизвестной функции распределения; оценка параметров распределения, вид которого известен; оценка зависимости случайной величины от одной или нескольких случайных величин и т.д.

б) проверка статистических гипотез о виде неизвестного распределения или о величине параметров распределения, вид которого известен.

Современная МС разрабатывает способы определения числа необходимых экспериментов до начала исследований (*планирование эксперимента*), в ходе исследования (*последовательный анализ*) и решает другие задачи. Современную МС определяют как ***науку о принятии решений в условиях неопределенности***.

Генеральная совокупность и выборка. Сущность выборочного метода

Исходным материалом для статистического исследования является совокупность результатов наблюдений (опытов, испытаний или экспериментов) относительно некоторого признака. Например, рассматривая партию пирожных типа «Эклер», можно исследовать: вкусовые характеристики пирожных (качественный признак), размер и вес (количественный признак). Каждый такой признак образует СВ, наблюдения над которой мы производим.

║ **Генеральной совокупностью** называется совокупность всех возможных значений, или реализаций, исследуемых объектов, подлежащих изучению относительно качественного или количественного признака.

В дальнейшем можно говорить либо признак, либо случайная величина (СВ).

Но на практике проводить изучение над всеми объектами, так называемое *сплошное обследование*, дорого (перепись населения), экономически нецелесообразно (например – при проверке качества продукции, никто не проверяет каждую единицу товара). В таких случаях случайным образом отбирают из всей совокупности ограниченное число объектов и подвергают их исследованию т.е. пользуются т.н. *выборочным обследованием.*

║ **Выборочной совокупностью** или просто **выборкой** называется совокупность объектов, отобранных случайным образом из генеральной совокупности.

║ **Объемом совокупности** (выборочной или генеральной) называют число объектов этой совокупности.

║ Конкретные значения выборки, полученные в результате наблюдений (испытаний), называют **реализацией выборки** или **вариантами выборки** и обозначают $x_1, x_2, ..., x_n$.

Пример 1

1) Предположим, что имеется партия рыбных консерв в 10000 банок. Потому как исследовать все банки консерв не представляется возможным, чтобы можно было судить хотя бы приблизительно об относительной доле брака, отбирают и контролируют 100 банок. В этом примере генеральной совокупностью является исходная партия консервных банок. Объем генеральной совокупности $N = 10000$. Выборкой является множество банок, взятых из генеральной совокупности для контроля. Объем выборки $n = 100$.

2) Всю партию полученного полимера нет возможности проверять на качество. Поэтому довольствуются случайным образом отобранным числом готового полимера, которое и является выборкой. А вся готовая продукция в данном случае представляет собой генеральную совокупность.

Выбор элементов генеральной совокупности можно организовать двояким способом: *выбор без повторений* (возвращений), при котором отобранный объект в генеральную совокупность не возвращается, и *выбор с повторениями* (возвращениями) – отобранный объект перед отбором следующего возвращается в генеральную совокупность. На практике обычно пользуются бесповторным случайным отбором.

Для получения хороших оценок характеристик генеральной совокупности необходимо, чтобы выборка была *репрезентативной,* т.е. достаточно правильно представляла изучаемые признаки генеральной совокупности. В силу закона больших чисел можно утверждать, что выборка будет репрезентативной, если ее осуществить случайно. Выборка называется *случайной,* если любой объект генеральной совокупности с одинаковой вероятностью может попасть в эту выборку.

Пример 2

Генеральная совокупность –100 ящиков с оборудованием, содержимое которых нужно проверить на соответствие документам. Проще всего отобрать ближайшие 10 ящиков и проверить их, но поставщик мог позаботиться об укомплектовании какого то числа первых и какого то числа последних ящиков, поэтому такая выборка не будет репрезентативной.

Лучше всего по накладной случайно отобрать ящики для проверки. Случайность отбора гарантирует, что поставщики не смогут предугадать, какие ящики будут отобраны для проверки.

Если объем генеральной совокупности конечен, то для обеспечения равной возможности попадания объектов в выборку применяют различные приемы, в частности, используют *генераторы случайных величин* (т.е. таблицы случайных чисел). Для того чтобы отобрать, например, 50 объектов из пронумерованной генеральной совокупности, открывают любую страницу таблицы случайных чисел и выписывают подряд 50 чисел; в выборку попадают те объекты, номера которых совпадают с выписанными случайными числами. Если окажется, что случайное число таблицы превышает число N, то такое случайное число следует пропустить. При осуществлении бесповторной выборки случайные числа таблицы, уже встречавшиеся ранее, следует также пропустить.

Другой способ получения случайной выборки можно осуществить с помощью Excel. Идея заключается в том, чтобы перемешать элементы генеральной совокупности случайным образом, а затем отобрать необходимое количество элементов.

Пример 3

Построим с помощью программы Excel случайную выборку объемом n=5 из генеральной совокупности объемом N=20. В одном столбце расположим числа от 1 до 20. Во втором столбце введем в ячейку B1 формулу (=СЛЧИС ()), а далее протянем вдоль всего столбца получаем столбец случайных чисел.

Затем выделяем оба столбца, выполняем команду (Данные→Сортировка→Значения столбца случайных чисел (2 столбец)→по возрастанию). В результате числа в первом столбце будут упорядочены случайным образом. Для получения искомой выборки нам необходимо взять первые 5 чисел, в нашем случае это 10, 14, 1, 19, 11, (рисунок 1). Полученная таким образом случайная выборка обладает тем же свойством репрезентативности, что и выборка, построенная использованием таблицы случайных чисел.

	A	B
1	10	0.63501
2	14	0.0431
3	1	0.3598
4	19	0.2584
5	11	0.40625
6	8	0.26734
7	16	0.22728
8	15	0.79281
9	12	0.08502
10	13	0.40559
11	2	0.81167
12	9	0.24934
13	20	0.12837
14	6	0.20007
15	7	0.01053
16	18	0.9759
17	3	0.79312
18	5	0.46302
19	17	0.19601

Рисунок 1 – Случайная выборка

Помимо использования таблиц случайных чисел применяют различные способы отбора: *типический*, при котором генеральную совокупность делят на «типические» части и отбор осуществляется из каждой части (например, при проведении опроса о вкусовых пристрастиях разделить опрашиваемых по возрасту, полу и т.д.). Так типический способ отбора применяется, если обследуемый признак заметно колеблется в различных типических частях генеральной совокупности (так мнение людей о производимых продуктах питания может быть разным у людей разного возраста); *механический,* при котором отбор производится через определенный интервал (например, отбирают каждый 30 произведенный товар); *серийный,* при котором объекты из генеральной совокупности выбираются не по одному, а «сериями» (например, если изделия изготавливаются большой группой станков-автоматов, то подвергают сплошному обследованию продукцию только нескольких станков).

На практике часто применяют комбинированный отбор.

Вариационный ряд

Рассмотрим следующий пример.

Пример 4:

Хлебозавод специализируется на выпуске городских булок (4 линии) и подмосковных батонов (1 линия). Проверяется соответствие тестовых заготовок нормам. Для обеспечения точности выборки с учетом влияния сменности в работе предприятия на каждой из пяти линий сделали в разные смены по несколько выборок.

Ниже приведены данные распределения веса тестовых заготовок для выпечки городских булок (0,2 кг).

197, 198, 200, 201, 203, 202, 199, 200, 200, 198, 200, 201, 202, 200, 199, 201, 199, 200, 200, 203.

Проанализируем полученные результаты.

Понятно, что чем больше данных, тем труднее производить анализ. В данном случае объем выборки равен 20, но в статистике зачастую данных бывает гораздо больше. Чтобы не погрязнуть в море цифр их представляют в удобном для человека виде – в виде таблиц. Первое, что мы должны сделать – это упорядочить полученные данные.

‖ Операция расположения значений СВ. по неубыванию называется **ранжированием** статистических данных.

‖ Последовательность значений СВ. X, полученная после ранжирования, $x_1, x_2, \ldots, x_n$ называется **вариационным рядом.**

В нашем случае, вариационный ряд имеет вид

197, 198, 198, 199, 199, 199, 200, 200, 200, 200, 200, 200, 200, 201, 201, 201, 202, 202, 203, 203.

▌ Если объем данных велик, то ранжирование статистических данных будет трудоемким. Поэтому в Excel, воспользовавшись меню Данные→Сортировка, можно легко и быстро упорядочить данные.

‖ Числа n_i, показывающие, сколько раз встречаются варианты x_i $(i = 1, 2, \ldots, n)$ в ряде наблюдений, называются **частотами**.

‖ Отношение частот к объему выборки называется **относительными частотами**, которые находятся по формуле (1)

$$w_i = \frac{n_i}{n} \qquad (1)$$

‖ Перечень вариант и соответствующих им частот или относительных частот называется **статистическим рядом**.

Объем n данной в примере 4 выборки равен 20. Подсчитаем частоту и относительную частоту вариант. Масса 197 г., например, встречается 1 раз - это частота, а относительная частота для этой варианты равна $w_i = \frac{1}{20} = 0{,}05$ и т.д. по всем данным. Полученные результаты занесем в таблицу. В первой строке запишем все значения выборки (варианты), во вторую строку – соответствующие им значения частот или относительных частот. Получим статистическое распределение выборки, представленное в таблице 1.

Таблица 1 – Статистический ряд распределения

Значения вариант x_i	197	198	199	200	201	202	203
Значения частот n_i	1	2	3	7	3	2	2
Значения относит. частот w_i	0,05	0,1	0,15	0,35	0,15	0,1	0,1

Такие систематизированные данные легче анализировать. В этом плане относительная частота является довольно содержательной характеристикой. Например, считается, что норма тестовой заготовки 200г. Получается, что только 35% заготовок соответствуют норме. Обратите внимание, что сумма частот будет равна объему выборки (в данном примере – количеству отобранных тестовых заготовок), а сумма относительных частот равна единице.

Статистический ряд распределения в математической статистике является аналогом ряда распределения СВ X в теории вероятностей.

В случае, когда n велико или СВ X является непрерывной, составляют *интервальный статистический ряд.* Для этого в первую строку таблицы статистического распределения вписывают частичные промежутки: $[x_0, x_1)$, $[x_1, x_2), ..., [x_{k-1}, x_k]$, которые как правило берутся одинаковыми по длине – шаг разбиения $h = x_0 - x_1 = x_2 - x_1 = ...$

Длину промежутка можно найти по формуле

$$h = \frac{x_{\max} - x_{\min}}{m}, \qquad (2)$$

где m находится по формуле Стерджесса

$$m = 1 + 3{,}322 \lg n; \qquad (3)$$

$x_{\max} - x_{\min}$ – разность между наибольшим и наименьшим значениями СВ.

За начало первого интервала рекомендуется брать $x_{нач} = x_{\min} - \frac{h}{2}$. Во вторую строчку таблицы записывают количество результатов наблюдений n_i, $(i = \overline{1, k})$, попавших в каждый интервал.

Пример 5

Пусть объём выборки тестовых заготовок, рассмотренной в примере 4, увеличился до 40.

197, 198, 200, 201, 203, 202, 199, 200, 200, 198, 200, 201, 202, 200, 199, 201, 199, 200, 200, 203, 197, 200, 200, 198, 200, 200, 199, 200, 200, 202, 200, 200, 197, 200, 199, 200, 200, 200, 198, 200.

Найдем прежде всего длину интервала. В нашем случае $n = 40$. По формуле (3) $m = 1 + 3{,}322\lg n = 1 + 3{,}322\lg 40 = 6$, тогда длина интервала по формуле (2) равна $h = \frac{203-197}{6} \approx 1$. За начало первого интервала возьмем $x_{нач} = x_{\min} - \frac{h}{2} = 197 - \frac{1}{2} \approx 196{,}5$.

Итак, статистический ряд распределения будет иметь вид, представленный в таблице 2.

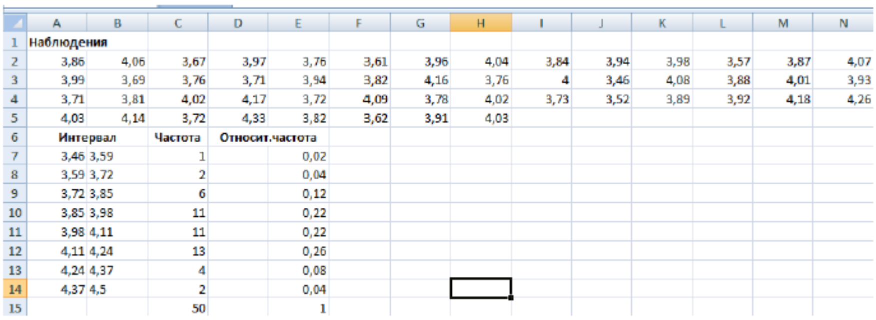
Таблица 2 – Интервальный ряд распределения тестовых заготовок

$[x_{k-1}; x_k]$	[196,5; 197,5)	[197,5; 198,5)	[198,5; 199,5)	[199,5; 200,5)
n_i	3	4	5	20
$[x_{k-1}; x_k]$	[200,5; 201,5)	[201,5; 202,5)	[202,5; 203,5)	
n_i	3	3	2	

В случае, когда данных достаточно много и систематизировать их вручную достаточно трудоемко, процедуру подсчета частот можно выполнить с помощью электронных таблиц Excel.

Пример 6.

Наблюдения за жирностью молока дали следующие результаты, представленные на рисунке 2.



	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K	L	M	N
1	Наблюдения													
2	3,86	4,06	3,67	3,97	3,76	3,61	3,96	4,04	3,84	3,94	3,98	3,57	3,87	4,07
3	3,99	3,69	3,76	3,71	3,94	3,82	4,16	3,76	4	3,46	4,08	3,88	4,01	3,93
4	3,71	3,81	4,02	4,17	3,72	4,09	3,78	4,02	3,73	3,52	3,89	3,92	4,18	4,26
5	4,03	4,14	3,72	4,33	3,82	3,62	3,91	4,03						
6	Интервал		Частота	Относит.частота										
7	3,46	3,59	1		0,02									
8	3,59	3,72	2		0,04									
9	3,72	3,85	6		0,12									
10	3,85	3,98	11		0,22									
11	3,98	4,11	11		0,22									
12	4,11	4,24	13		0,26									
13	4,24	4,37	4		0,08									
14	4,37	4,5	2		0,04									
15			50		1									

Рисунок 2 – Нахождение частот и относительных частот

Построим интервальный статистический ряд распределения частот и относительных частот.

Вначале, определим длину интервала по формулам 1 и 2, а также начальное значение первого интервала. Имеем, $h = 0{,}13$, тогда за начало интервала возьмем 3,46. Значение частот и относительных частот найдем с помощью Excel.

В нашем случае:

1) Заполняем столбец интервал. В ячейку А7 вводим начальное значение3,46, согласно нашему подсчету. В следующую ячейку А8 вставляем формулу (=СУММ(А7; 0,13)) (т.к. найденная ранее длина интервала равна 0,13) нажимаем Enter и протягиваем по всей длине столбца, так, чтобы последнее значение этого столбца не превышало максимального значения выборки.

2) Заполняем столбец «Частота» с помощью встроенной функции ЧАСТОТА. Для этого выделяем блок ячеек C7:C14. С помощью меню выбираем: f(x)→Статистические→ЧАСТОТА. В *массив данных* вводим диапазон наблюдений, т.е. A2:N5 указателем мыши. В рабочее поле *двоичный массив* вводим диапазон интервалов A7:A14 аналогичным образом. После нажатия клавиш Ctrl+Shift+Enter в столбце «Частота» C7:C14 появится массив частот. Для проверки правильности нахождения частот достаточно найти сумму значений этого столбца, выделив столбец C7:C14 и нажав $\sum$, ниже мы увидим значение50, что соответствует объему выборки.

3) Для нахождения относительных частот в ячейку E7 вводим формулу (=C7/C$15), нажимаем Enter, далее, протягивая левой кнопкой мыши, копируем введенную формулу в диапазон E8:E14, рисунок 2. Если мы просуммируем все значения из этого диапазона, то убедимся, что получится 1.

Эмпирическая функция распределения и ее свойства

Одним из способов распределения вариационного ряда является построение функции распределения. В связи с тем, что эта функция находится опытным (эмпирическим) путем, ее называют *эмпирической функцией распределения*.

‖ **Эмпирической функцией** распределения называется функция $F^*(x)$, определяющая для каждого значения x относительную частоту события $X < x$.

$$F^*(x) = \frac{n_x}{n} \tag{4}$$

где n_x – число вариант (наблюдений), меньшее x;

n – общее число наблюдений (объем выборки).

Свойства эмпирической функции распределения $F^*(x)$:

- значения эмпирической функции принадлежат отрезку [0;1];
- $F^*(x)$ – неубывающая функция;
- если x_1 – наименьшая варианта, то $F^*(x) = 0$, при $x \le x_1$;
- если x_k – наибольшая варианта, то $F^*(x) = 1$, при $x > x_k$;

Построим эмпирическую функцию распределения по данным о потреблении мяса и мясопродуктов в Республике Беларусь за период с 1990 по 2010 (на душу населении в год, кг):

58	60	60	62	59	59	57	58	58	57
59	59	62	60	60	58	60	59	62	57

Упорядочим этот вариационный ряд:

57	57	57	58	58	58	58	59	59	59
59	59	60	60	60	60	60	62	62	62

Наименьшая варианта (масса указанной продукции, потребляемой в год на душу населения, кг.) равна 57, следовательно $F^*(x) = 0$ при $x \le 57$ (см. свойства эмпирической функции распределения); значение при $57 \le x < 58$, а именно $x_1 = 57$ наблюдалось 3 раза и $F^*(x) = \frac{3}{20} = 0{,}15$ (по формуле (4)); при $58 \le x < 59$, а именно $x_1 = 57$, $x_2 = 58$, значение наблюдалось 3+4 = 7 раза и $F^*(x) = \frac{7}{20} = 0{,}35$, и т.д.

Таким образом, искомая $F^*(x) = \begin{cases} 0 & при\ x \le 57, \\ 0{,}15 & при\ 57 < x \le 58, \\ 0{,}35 & при\ 58 < x \le 59, \\ 0{,}6 & при\ 59 < x \le 60, \\ 0{,}85 & при\ 60 < x \le 62, \\ 1 & при\ \ x > 62. \end{cases}$

Построим график эмпирической функции распределения.

График этой функции (рисунок 3) уже дает некоторое общее представление о характере распределения.

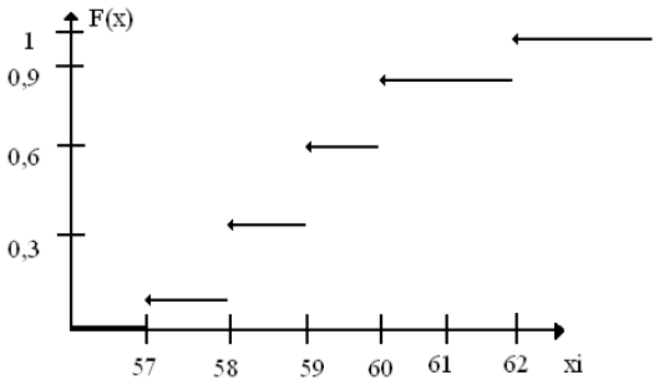


Рисунок 3 – График эмпирической функции распределения

При неограниченном увеличении числа n скачки кривой $F^*(x)$ станут более мелкими; кривая станет плавне, будет приближаться (сходится по вероятности) к функции распределения *F (x)* случайной величины *X*

На практике, как правило, приходится обрабатывать выборку большого объема. В связи с этим построение эмпирической функции распределения для минимизации временных затрат удобнее проводить с помощью Excel.

Пример 8

Построим эмпирическую функцию распределения по данным о потреблении мяса и мясопродуктов в Республике Беларусь только за последние 50 лет. Прежде чем находить эмпирическую функцию распределения, найдем значения частот и относительных частот аналогичным образом, рассмотренном в примере 6.

Для нахождения значений эмпирической функции распределения в ячейку M9 (рисунок 4) перепишем значение ячейки H9, а затем в ячейку M10 введем формулу (=M9+H10). Нажимаем Enter. Протягиванием (за правый нижний угол при нажатой левой кнопки мыши) скопируем введенную формулу в диапазон M10:M14. Далее строим диаграмму эмпирической функции распределения с помощью мастера диаграмм. Для этого выделяем область M9:M14, далее выбираем функцию Мастер диаграмм, выбираем вид графика и соответствующий макет

	A	B	C	D	E	F	G	H	I
1	61	57	58	58	57	58	59	59	59
2	59	60	60	60	60	60	62	62	62
3	57	60	60	60	61	62	60	58	59
4	62	59	61	61	60	61	62	59	60
5	61	61	57	62	59	59	58	60	61
6	57	61	61	58	60				

	Масса мяса и мясопродуктов	Частота	Относительная частота	Эмпирическая функция распределения
9	57	5	0.10	0.10
10	58	6	0.12	0.22
11	59	9	0.18	0.40
12	60	13	0.26	0.66
13	61	10	0.20	0.86
14	62	7	0.14	1.00
15		50	1.00	

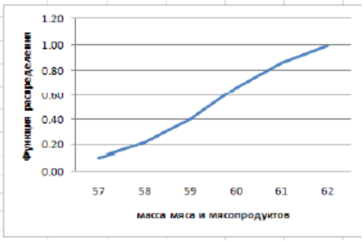


Рисунок 4 – Построение эмпирической функции распределения в Excel

Графическое изображение вариационных рядов: полигон, гистограмма

В целях наглядности строят различные графики статистического распределения. По графику можно предположить какая существует зависимость между изучаемыми величинами, в частности, общее представление о законе распределения СВ дают полигон и гистограмма.

‖ **Полигоном частот** называют ломаную линию, отрезки которой соединяют точки с координатами $(x_1, n_1),(x_2, n_2),...,(x_k, n_k)$, а **полигоном относительных частот** – ломаную линию, отрезки которой соединяют точки с координатами $(x_1, w_1),(x_2, w_2),...,(x_k, w_k)$.

Для построения полигона частот или относительных частот, необходимо на оси абсцисс отложить значение вариант x_i, а на оси ординат – соответствующие им значения частот n_i или значения относительных частот w_i. Масштаб выбирают таким образом, чтобы рисунок имел желательный размер и обеспечивал необходимую наглядность. Полученные точки соединяют отрезками прямых. Отсюда и название: *полигон* в переводе с греческого означает *многоугольник*.

Пример 9

В результате серии экспериментов по подбрасыванию 10 монет фиксировалось количество монет, выпавших «орлом». Результаты представлены следующим числовым рядом: 5, 4, 5, 6, 2, 6, 8, 6, 3, 4, 5, 8, 5, 2, 5, 2, 5, 7, 3, 3, 5, 4, 5, 5, 6, 5, 7, 6, 3, 5, 5, 5, 5, 6, 5, 5, 5, 4, 7, 4, 5, 4, 5, 7, 7, 7, 6, 6, 4, 4. Построим полигон частот.

Все вычисления частот и относительных частот, а также построение полигона частот проводим в Excel. Заполняем ячейки A2:N5 результатами наблюдений. В ячейки C8:C17 заполняем все значения, которые может принять комбинация выпавших монет. В ячейки B8:B17 заполняем значение частот, аналогично тому, как мы находили частоты в примере о продолжительности работы ламп. Затем на основе полученных данных строим соответствующий график, изображенный на рисунке 5. Действительно, чаще всего орел выпадет на пяти из десяти монет, реже на четырех и шести и т.д.

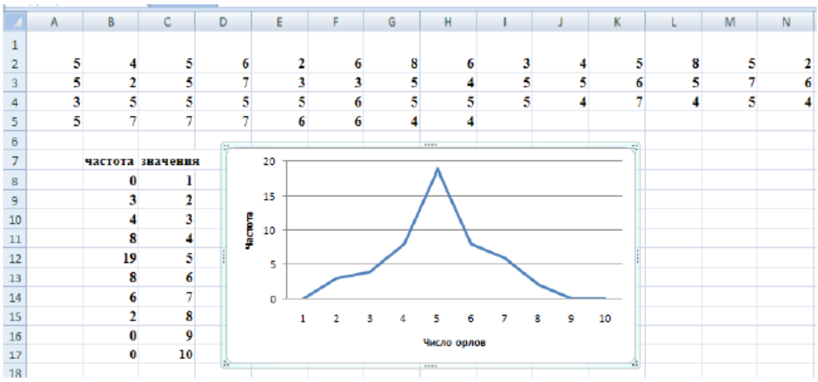


Рисунок 5 – Полигон частот

Кроме дискретных вариационных рядов рассматриваются интервальные вариационные ряды, в которых значения признака могут меняться непрерывно (например, урожай какой-либо зерновой культуры).

В случае, когда задан интервальный статистический ряд, то строят гистограмму.

‖ **Гистограммой частот** называют ступенчатую фигуру, состоящую из прямоугольников, основаниями которых служат частичные интервалы длиною h, а высоты равны отношению $\frac{n_i}{h}$.

Отметим, что площадь i-го частичного прямоугольника равна $h_i \cdot \frac{n_i}{h_i} = n_i$ – сумме частот вариант i-го интервала. А площадь гистограммы частот равна сумме всех частот, т.е. объему выборки.

Действительно, если S_i – площадь i-го прямоугольника, то

$S_i = h_i \cdot \frac{n_i}{h_i} = n_i$, тогда $S = \sum_{i=1}^{k} S_i = \sum_{i=1}^{k} n_i = n$.

‖ **Гистограммой относительных частот** – фигуру, состоящую из прямоугольников, основаниями которых служат частичные интервалы длиною h, а высоты равны отношению $\frac{w_i}{h}$.

Для того чтобы построить гистограмму частот, на оси абсцисс откладываем значения интервалов, а на оси ординат – значения высот. Далее строят прямоугольники, основаниями которых служат длины интервалов, а высоты – равны расстоянию $\frac{n_i}{h}$.

Отметим, что площадь i-го частичного прямоугольника равна $h_i \cdot \frac{w_i}{h_i} = w_i$ – сумме относительных частот вариант, половин i-го интервала. Площадь S гистограммы относительных частот равна сумме относительных частот, т.е. 1.

Действительно, если S_i – площадь i-го прямоугольника, то

$S_i = h_i \cdot \frac{w_i}{h_i} = w_i$, тогда $S = \sum_{i=1}^{k} S_i = \sum_{i=1}^{k} w_i = \sum_{i=1}^{k} \frac{n_i}{n} = 1$

Пример 10

В таблице 3 приведено распределение числа взрослых рабочих-женщин цеха по росту. Постройте по этим данным гистограмму частот.

Таблица 3 – Распределение числа рабочих-женщин по росту

Рост, см	143-146	146-149	149-152	152-155	155-158	158-161	161-164	164-167
Число женщин	1	2	8	26	65	120	181	201
Рост, см	167-170	170-173	173-176	176-179	179-182	182-185	185-188	Итого
Число женщин	170	120	64	28	10	3	1	1000

При построении полигона частот аналогичным образом заносим все данные по столбцам. Затем, выделив эти данные, выбираем меню Гистограмма.

Из предложенного перечня разнообразных макетов гистограмм конструируем наиболее подходящий график, представленный на рис. 6.

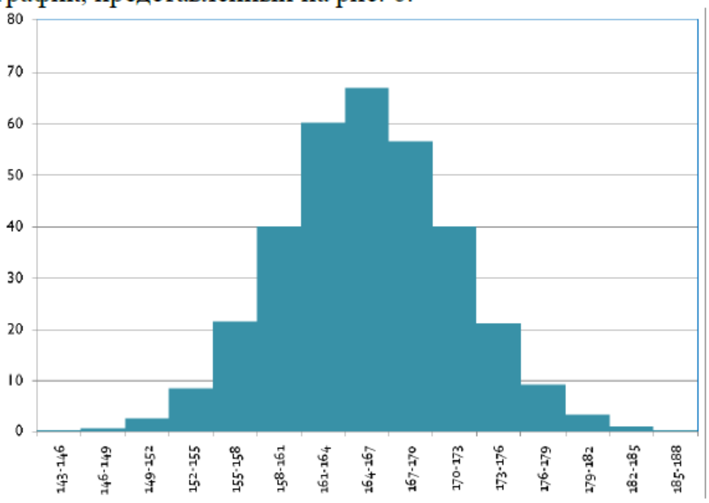


Рисунок 6 – Гистограмма частот

9.2. Статистическое оценивание

На практике в большинстве случаев закон распределения случайной величины X неизвестен, и по результатам наблюдений $x_1, x_2, \ldots, x_n$ необходимо оценить числовые характеристики (например, математическое ожидание, дисперсию или другие моменты) или неизвестный параметр a, который определяет закон распределения (плотность распределения) $f(x, a)$ изучаемой случайной величины. Так, для показательного распределения или распределения Пуассона достаточно оценить один параметр, а для нормального распределения подлежат оценке уже два параметра – математическое ожидание и дисперсия.

Виды оценок

Случайная величина X имеет плотность вероятности $f(x,a)$, где a – неизвестный параметр распределения. В результате эксперимента получены значения этой случайной величины: $x_1, x_2, \ldots, x_n$. Произвести оценку по существу означает, что выборочным значениям случайной величины необходимо поставить в соответствие некоторое значение параметра a, т. е. создать некоторую функцию результатов наблюдений $u(x_1, x_2, \ldots, x_n)$, значение которой принимается за оценку $\hat{a}_n$ параметра a. Индекс n указывает на количество проведенных опытов.

Любая функция, зависящая от результатов наблюдений, называется статистикой. Так как результаты наблюдений являются случайными величинами, то и статистика тоже будет случайной величиной. Следовательно, оценку $\hat{a}_n = u(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ неизвестного параметра a следует рассматривать как случайную величину, а ее значение, вычисленное по экспериментальным данным объемом n, – как одно из возможных значений этой случайной величины.

Оценки параметров распределений (числовых характеристик случайной величины) подразделяются на точечные и интервальные. Точечная оценка параметра a определяется одним числом $\hat{a}_n$, и ее точность характеризуется дисперсией оценки. Интервальной оценкой называют оценку, которая определяется двумя числами, $\hat{a}_1$ и $\hat{a}_2$ – концами интервала, накрывающего оцениваемый параметр a с заданной доверительной вероятностью.

Классификация точечных оценок

Чтобы точечная оценка неизвестного параметра $\hat{a}_n = u(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ была наилучшей с точки зрения точности, необходимо, чтобы она была состоятельной, несмещенной и эффективной.

Состоятельной называется оценка $\hat{a}_n = u(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ параметра a, если она сходится по вероятности к оцениваемому параметру, т. е.

$$\hat{a}_n \xrightarrow[n\to\infty]{p} a. \tag{8.8}$$

На основании неравенства Чебышева можно показать, что достаточным условием выполнения соотношения (8.8) является равенство

$$\lim_{n\to\infty} M[\hat{a}_n] = a\,.$$

Состоятельность является асимптотической характеристикой оценки при $n \to \infty$.

<u>Несмещенной</u> называется оценка $\hat{a}_n = u(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ (оценка без систематической ошибки), математическое ожидание которой равно оцениваемому параметру, т. е.

$$M[\hat{a}_n] = a\,. \tag{8.9}$$

Если равенство (8.9) не выполняется, то оценка называется смещенной. Разность $\Delta a = M[\hat{a}_n] - a$ называется смещением или систематической ошибкой оценки. Если же равенство (8.9) выполняется лишь при $n \to \infty$, то соответствующая оценка называется асимптотически несмещенной.

При конечных n оценки могут различаться средним квадратом ошибки ε^2. Естественно, что, чем меньше эта ошибка, тем теснее группируются значения оценки около оцениваемого параметра. Поэтому всегда желательно, чтобы ошибка оценки была по возможности наименьшей, т. е. выполнялось условие

$$\varepsilon^2 = M[(\hat{a}_n - a)^2] = \min_{\hat{a}_n}. \tag{8.10}$$

Оценку $\hat{a}_n$, удовлетворяющую условию (8.10), называют оценкой с минимальным квадратом ошибки.

<u>Эффективной</u> называется оценка $\hat{a}_n = u(x_1, x_2, \ldots, x_n)$, для которой средний квадрат ошибки не больше среднего квадрата ошибки любой другой оценки, т. е.

$$M[(\hat{a}_n - a)^2] \le M[(\hat{a}_n^* - a)^2],$$

где $\hat{a}_n^*$ – любая другая оценка параметра a.

Необходимо отметить, что если состоятельность – практически обязательное условие всех используемых на практике оценок (несостоятельные оценки используются крайне редко), то свойство несмещенности является лишь желательным. Многие часто применяемые оценки свойством несмещенности не обладают.

В общем случае точность оценки некоторого параметра a, полученная на основании опытных данных $x_1, x_2, \ldots, x_n$, характеризуется средним квадратом ошибки

$$\varepsilon^2 = M[(\hat{a}_n - a)^2],$$

который можно привести к виду

$$\varepsilon^2 = D[\hat{a}_n] + (\Delta a)^2,$$

где $D[\hat{a}_n] = M[(\hat{a}_n - M[\hat{a}_n])^2]$ – дисперсия, $(\Delta a)^2 = (M[\hat{a}_n] - a)^2$ – квадрат смещения оценки.

Если оценка несмещенная, то

$$\varepsilon^2 = D[\hat{a}_n] = M[(\hat{a}_n - a)^2].$$

Известно, что дисперсия любой несмещенной оценки одного параметра a удовлетворяет неравенству Крамера – Рао

$$D[\hat{a}_n] \geq \frac{1}{M\left[\frac{\partial}{\partial a} \ln f(x_1, \ldots, x_n / a)\right]} = \frac{-1}{M\left[\frac{\partial^2}{\partial a^2} \ln f(x_1, \ldots, x_n / a)\right]},$$

где $f(x_1, \ldots, x_n / a)$ – условная плотность распределения вероятностей полученных значений случайной величины при истинном значении параметра a.

Таким образом, несмещенная оценка $\hat{a}_n = u(x_1, x_2, \ldots, x_n)$, для которой неравенство Крамера – Рао обращается в равенство, будет эффективной, т. е. такая оценка имеет минимальную дисперсию.

Точечные оценки математического ожидания и дисперсии

Если рассматривается случайная величина X, имеющая математическое ожидание m и дисперсию D, то оба эти параметра считаются неизвестными. Поэтому над случайной величиной X производится n независимых опытов, которые дают результаты: $x_1, x_2, \ldots, x_n$. Необходимо найти состоятельные и несмещенные оценки неизвестных параметров m и D.

В качестве оценок $\hat{m}$ и $\hat{D}$ обычно выбираются соответственно статистическое (выборочное) среднее значение и статистическая (выборочная) дисперсия:

$$\hat{m} = m^* = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i; \tag{8.11}$$

$$\hat{D} = D^* = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(x_i - m^*)^2 = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i^2 - (m^*)^2. \tag{8.12}$$

Оценка математического ожидания (8.11) является состоятельной согласно закону больших чисел (теорема Чебышева):

$$m^* = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i \xrightarrow[n\to\infty]{p} m.$$

Математическое ожидание случайной величины m^*

$$M[m^*] = M\left[\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i\right] = \frac{1}{n}M\left[\sum_{i=1}^{n} x_i\right] = \frac{1}{n}nm = m.$$

Следовательно, оценка m^* является несмещенной.

Дисперсия оценки математического ожидания:

$$D[m^*] = M[(m^* - m)^2] = M\left[\left(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i - m\right)^2\right] =$$

$$= \frac{1}{n^2}M\left[\left(\sum_{i=1}^{n}(x_i - m)\right)^2\right] = \frac{1}{n^2}M\left[\sum_{i=1}^{n}(x_i - m)^2\right] = \frac{1}{n^2}(nD) = \frac{D}{n}$$

.

Если случайная величина X распределена по нормальному закону, то оценка m^* является также и эффективной.

Математическое ожидание оценки дисперсии D^*

$$M[D^*] = M\left[\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(x_i - m^*)^2\right] = \frac{1}{n}M\left[\sum_{i=1}^{n}(x_i - m^*)^2\right].$$

В то же время

$$\sum_{i=1}^{n}(x_i - m^*)^2 = \sum_{i=1}^{n}(x_i - m + m - m^*)^2 =$$

$$= \sum_{i=1}^{n}(x_i - m)^2 - 2(m^* - m)\sum_{i=1}^{n}(x_i - m) + \sum_{i=1}^{n}(m^* - m)^2 =$$

$$= \sum_{i=1}^{n}(x_i - m)^2 - 2(m^* - m)n(m^* - m) + n(m^* - m)^2 =$$

$$= \sum_{i=1}^{n}(x_i - m)^2 - n(m^* - m)^2.$$

Так как $M[(x_i - m)^2] = D$, а $M[(m^* - m)^2] = D/n$, то получаем

$$M[D^*] = \frac{1}{n}(nD - D) = \frac{n-1}{n}D. \tag{8.13}$$

Таким образом, D^* – смещенная оценка, хотя является состоятельной и эффективной.

Из формулы (8.13) следует, что для получения несмещенной оценки D^* следует видоизменить выборочную дисперсию (8.12) следующим образом:

$$\overline{D}^* = \frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}(x_i - m^*)^2 = \frac{n}{n-1}\left(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}x_i^2 - (m^*)^2\right), \tag{8.14}$$

которая считается "лучшей" по сравнению с оценкой (8.12), хотя при больших n эти оценки практически равны друг другу.

Методы получения оценок параметров распределения

Часто на практике на основании анализа физического механизма, порождающего случайную величину X, можно сделать вывод о законе распределения этой случайной величины. Однако параметры этого распределения неизвестны, и их необходимо оценить по результатам эксперимента, обычно представленных в виде конечной выборки $x_1, x_2, \ldots, x_n$. Для решения такой задачи чаще всего применяются два метода: метод моментов и метод максимального правдоподобия.

Метод моментов. Метод состоит в приравнивании теоретических моментов соответствующим эмпирическим моментам того же порядка.

Эмпирические начальные моменты k -го порядка определяются формулами:

$$\alpha_k^* = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(x_i)^k ,$$

а соответствующие им теоретические начальные моменты k -го порядка – формулами:

$$\alpha_k = \sum_{i=1}^{n}(x_i)^k p(x,a) \text{ для дискретных случайных величин,}$$

$$\alpha_k = \int_{-\infty}^{\infty} x^k f(x,a)dx \text{ для непрерывных случайных величин,}$$

где a – оцениваемый параметр распределения.

Для получения оценок параметров распределения, содержащего два неизвестных параметра a_1 и a_2, составляется система из двух уравнений

$$\begin{cases} \alpha_1(\hat{a}_1,\hat{a}_2) = \alpha_1^*(\hat{a}_1,\hat{a}_2) \\ \mu_2(\hat{a}_1,\hat{a}_2) = \mu_2^*(\hat{a}_1,\hat{a}_2) \end{cases},$$

где μ_2 и μ_2^* – теоретический и эмпирический центральные моменты второго порядка.

Решением системы уравнений являются оценки $\hat{a}_1$ и $\hat{a}_2$ неизвестных параметров распределения a_1 и a_2.

Приравняв теоретический эмпирический начальные моменты первого порядка, получаем, что оценкой математического ожидания случайной величины X, имеющей произвольное распределение, будет выборочное среднее, т. е. $M[X] = m^* = 1/n\sum_{i=1}^{n} x_i$. Затем, приравняв теоретический и эмпирический центральные моменты второго порядка, получим, что оценка дисперсии случайной величины X, имеющей произвольное распределение, определяется формулой

$$D[X] = D^* = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(x_i - m^*) .$$

Подобным образом можно найти оценки теоретических моментов любого порядка.

Метод моментов отличается простотой и не требует сложных вычислений, но полученные этим методом оценки часто являются неэффективными.

Метод максимального правдоподобия. Метод максимального правдоподобия точечной оценки неизвестных параметров распределения сводится к отысканию максимума функции одного или нескольких оцениваемых параметров.

Пусть X – непрерывная случайная величина, которая в результате n испытаний приняла значения $x_1, x_2, \ldots, x_n$. Для получения оценки неизвестного параметра a необходимо найти такое значение $\hat{a}$, при котором вероятность реализации полученной выборки была бы максимальной. Так как $x_1, x_2, \ldots, x_n$ представляют собой взаимно независимые величины с одинаковой плотностью вероятности $f(x)$, то функцией правдоподобия называют функцию аргумента a:

$$L(x_1, x_2, \ldots, x_n; a) = f(x_1; a) \cdot f(x_2; a) \ldots f(x_n; a).$$

Оценкой максимального правдоподобия параметра a называется такое значение $\hat{a}$, при котором функция правдоподобия достигает максимума, т. е. является решением уравнения

$$\left. \frac{dL(a)}{da} \right|_{a=\hat{a}} = 0,$$

которое явно зависит от результатов испытаний $x_1, x_2, \ldots, x_n$.

Поскольку функции $L(a)$ и $\ln L(a)$ достигают максимума при одних и тех же значениях $\hat{a} = u(x_1, x_2, \ldots, x_n)$, то часто для упрощения расчетов используют логарифмическую функцию правдоподобия и ищут корень соответствующего уравнения

$$\left. \frac{d \ln L(a)}{da} \right|_{a=\hat{a}} = 0,$$

которое называется уравнением правдоподобия.

Если необходимо оценить несколько параметров $a_1, a_2, \ldots, a_k$ распределения $f(x; a_1, a_2, \ldots, a_k)$, то функция правдоподобия будет зависеть от этих параметров. Для нахождения оценок $\hat{a}_1, \hat{a}_2, \ldots, \hat{a}_k$ параметров распределения необходимо решить систему k уравнений правдоподобия

$$\frac{d}{da}\ln L(a_1, a_2, \ldots, a_k,)\bigg|_{a_i=\hat{a}_i} = 0, i = 1, 2, \ldots, k.$$

Метод максимального правдоподобия дает состоятельные и асимптотически эффективные оценки. Однако получаемые методом максимального правдоподобия оценки бывают смещенными, и, кроме того, для нахождения оценок часто приходится решать достаточно сложные системы уравнений.

9.3. Проверка статистических гипотез

Постановка задачи, основные понятия

Пусть $X \in F$ и распределение F неизвестно. В этой ситуации естественно строить различные предположения, или гипотезы, относительно F. Гипотезы будем обозначать H_1, H_2, ... Гипотеза называется *простой*, если она однозначно определяет распределение выборки. Все остальные гипотезы называются *сложными*.

Например, $H_1: \ X \in \Phi_{0,1}$ — простая гипотеза, $H_2: \ X \in \Phi_{\alpha,\sigma^2}$ — сложная, если значения α и σ^2 не конкретизированы.

Чаще всего выдвигаются две взаимоисключающие друг друга гипотезы H_1 и H_2, одна из которых, по нашему предположению, верна, только мы не знаем, какая именно. Первую из них, H_1, называют *основной* гипотезой, а вторую — *конкурирующей* гипотезой или *альтернативой*. Мы должны одну из гипотез принять и тем самым отвергнуть другую — в этом состоит наше решение. В дальнейшем решение будем формулировать относительно основной гипотезы H_1, поскольку это однозначно определяет наши действия относительно альтернативы.

Нам необходимо вооружиться правилом, в соответствии с которым по выборке сразу же можно было бы определить, принимается H_1 или нет. Такое правило называется *критерием*. Построение критерия означает, что все возможные значения выборки разбиваются на две категории или, что то же самое, выборочное пространство $\mathbb{R}^n$ нужно разбить на две части:

$$\mathbb{R}^n = \mathbf{K} \cup \overline{\mathbf{K}}.$$

Если $X \in \mathbf{K}$, то гипотеза H_1 отвергается, если $X \in \overline{\mathbf{K}}$, то принимается. Множество $\mathbf{K}$ называется *критическим*, его задание полностью определяет критерий.

Ситуации, которые могут возникнуть при принятии нами решения, отражены в представленной ниже таблице.

	Верна H_1	Верна H_2
Принимаем H_1	Хорошо	Плохо
Принимаем H_2	Плохо	Хорошо

Мы видим, что существуют две нежелательные ситуации, когда верна одна гипотеза, а мы принимаем другую в соответствии с выбранным критерием. Как правило, избежать подобных ошибок не удается. Выход в следующем: нужно использовать такие критерии, для которых вероятности принятия ошибочных решений малы.

В дальнейшем будем использовать обозначение $\mathbf{P}_i(A)$, если вычисляется вероятность при условии, что верна гипотеза H_i.

Предположим, что проверяется простая гипотеза $H_1: \quad F = F_1$ против простой альтернативы $H_2: \quad F = F_2$. Тогда вероятность отвергнуть верную (основную) гипотезу $\beta_1 = \beta_1(\mathbf{K}) = \mathbf{P}_1(X \in \mathbf{K})$ называется *вероятностью ошибки первого рода*. Аналогично, вероятность принять неверную гипотезу $\beta_2 = \mathbf{P}_2(X \in \overline{\mathbf{K}})$ называется *вероятностью ошибки второго рода*. Число $1-\beta_2$ называется *мощностью* критерия.

Вычисление вероятности ошибочного решения при справедливости сложной гипотезы, как правило, невозможно: мы ведь не знаем, каким конкретно является распределение выборки.

Далее мы рассмотрим некоторые *критерии согласия*. Они строятся для проверки гипотез вида

$$H_1: \ F = F_1 \quad \text{против } H_2: \ F \neq F_1$$

(т. е. мы должны проверить, согласуются ли данные наблюдений с предположением о том, что $X \Subset F_1$). Будем требовать, чтобы для рассматриваемых критериев вероятность ошибки первого рода была мала: $\beta_1 \le \varepsilon$ для заранее выбранного малого числа ε. В таких случаях говорят, что критерий имеет уровень $1-\varepsilon$. Часто приходится довольствоваться асимптотическим критерием уровня $1-\varepsilon$, то есть если $\lim_{n\to\infty} \beta_1 \le \varepsilon$.

Поскольку конкурирующая гипотеза является сложной, то вероятность ошибки второго рода мы рассматривать не будем.

Критерий Колмогорова

Критерий основывается на следующей теореме (приводится без доказательства).

Теорема Колмогорова. *Пусть $X \Subset F$ и F непрерывна. Обозначим*

$$D_n = \sup_y |F_n^*(y) - F(y)|.$$

Тогда для любого $y > 0$ при $n \to \infty$

$$\mathbf{P}(\sqrt{n}D_n < y) \to \mathcal{K}(y) = \sum_{m=-\infty}^{\infty} (-1)^m \, e^{-2m^2y^2}.$$

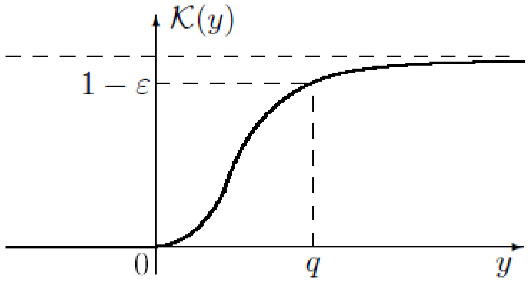
Функция распределения $\mathcal{K}(y)$ называется *функцией Колмогорова*, она абсолютно непрерывна; для нахождения ее значений имеются таблицы.

Перейдем к построению критерия.

Пусть $X \Subset F$ и проверяются гипотезы $H_1: \quad F = F_1$ против $H_2: \quad F \neq F_1$, где F_1 непрерывна. Наша задача — построить асимптотический критерий уровня $1-\varepsilon$. Для начала вычислим величину D_n в предположении, что верна гипотеза H_1, т. е. $F = F_1$:

$$D_n = \sup_y |F_n^*(y) - F_1(y)|.$$

В силу теоремы Колмогорова, при больших n функция распределения случайной величины $\sqrt{n}D_n$ мало отличается от $\mathcal{K}(y)$, поэтому заранее по таблицам функции Колмогорова мы можем найти такое число $q > 0$, что $\mathcal{K}(q) = 1 - \varepsilon$.



Следовательно, если верна H_1, то $\mathbf{P}_1(\sqrt{n}D_n < q) \simeq \mathcal{K}(q) = 1-\varepsilon$. Поэтому мы будем отвергать гипотезу H_1, если окажется, что $\sqrt{n}D_n \geq q$, т. е. если расхождение между эмпирической и гипотетической функциями распределения достаточно велико.

Ясно, что при этом

$$\beta_1 = \mathbf{P}_1(\sqrt{n}D_n \geq q) = 1 - \mathbf{P}_1(\sqrt{n}D_n < q) \simeq 1 - \mathcal{K}(q) = \varepsilon.$$

Критическое множество для построенного нами критерия выглядит так:

$$\mathbf{K} = \{(X_1, \ldots, X_n) \in \mathbb{R}^n : \ \sqrt{n}D_n \geq q\}.$$

Критерий хи-квадрат Пирсона

Пусть $X \Subset F$ и проверяются гипотезы $H_1: \quad F = F_1$ против $H_2: \quad F \neq F_1$. По-прежнему наша задача состоит в построении асимптотического критерия уровня $1-\varepsilon$. В предположении, что $X \Subset F_1$, разобьем область возможных значений X_1 на некоторое количество непересекающихся промежутков:

$$\mathbf{P}_1(X_1 \in \Delta_1 \cup \ldots \cup \Delta_k) = 1,$$

где Δ_i имеет вид $\Delta_i = [a_i, b_i)$, $i = 1, \ldots, k$.

Пусть ν_i — число наблюдений, попавших в Δ_i, $i = 1, \ldots, k$, $\nu_1 + \ldots + \nu_k = n$. Обозначим также

$$p_i = \mathbf{P}_1(X_1 \in \Delta_i) = F_1(b_i) - F_1(a_i), \quad i = 1, \ldots, k.$$

Из закона больших чисел следует, что

$$\frac{\nu_i}{n} \xrightarrow{P} p_i, \quad n \to \infty,$$

при каждом i, если верна H_1. В качестве меры близости совокупностей $\{\nu_1/n, \ldots, \nu_k/n\}$ и $\{p_1, \ldots, p_k\}$ предлагается использовать величину

$$\Psi_n = n \sum_{i=1}^{k} \frac{1}{p_i} \left(\frac{\nu_i}{n} - p_i \right)^2 = \sum_{i=1}^{k} \frac{(\nu_i - np_i)^2}{np_i}.$$

Теорема Пирсона. *Если* $0 < p_i < 1$ *при всех* $i = 1, \ldots, k$, *то для любого* $y > 0$

$$\mathbf{P}_1(\Psi_n < y) \to \chi^2_{k-1}(y), \quad n \to \infty.$$

Доказательство этой теоремы весьма сложно, и по этой причине мы его не приводим.

Займемся построением критерия. Найдем число q такое, что $\chi^2_{k-1}(q) = 1 - \varepsilon$. Если верна гипотеза H_1, то с вероятностью, близкой к $1 - \varepsilon$, значение случайной величины Ψ_n должно быть меньше q. Поэтому мы отвергаем гипотезу, если $\Psi_n \geq q$, и принимаем ее в противном случае. Это значит, что мы принимаем H_1, если нет явного противоречия этой гипотезы с наблюденными значениями. Критическое множество выглядит следующим образом:

$$\mathbf{K} = \{(X_1, \ldots, X_n) : \ \Psi_n \geq q\}.$$

Для вероятности ошибки первого рода имеем

$$\beta_1 = \mathbf{P}_1(\Psi_n \geq q) = 1 - \mathbf{P}_1(\Psi_n < q) \simeq 1 - \chi^2_{k-1}(q) = \varepsilon.$$

Замечание. Приближение $\mathbf{P}_1(\Psi_n < q) \simeq \chi^2_{k-1}(q)$ является вполне удовлетворительным для практических целей, если $np_i \geq 10$ для всех i. В противном случае следует укрупнить разбиение (например, объединить два соседних интервала в один).

Пример (данные взяты из книги: Крамер Г. Математические методы статистики. М., Мир, 1975). В Швеции в 1935 году родились 88273 человека. Известны их дни рождения. Нужно проверить гипотезу о том, что день рождения произвольно взятого человека с равными вероятностями может приходиться на любой день года.

Перенумеруем от 1 до 365 все дни 1935-го года и пусть X_i — номер дня рождения i-го человека в соответствии с этой шкалой. Мы имеем выборку $X_1, \ldots, X_n$, где $n = 88\,273$, и тогда в соответствии с основной гипотезой H_1

$$\mathbf{P}_1(X_1 = k) = \frac{1}{365}, \quad k = 1, \ldots, 365.$$

Чтобы применить критерий χ^2, воспользуемся естественным разбиением года по месяцам ($k = 12$):

$$\Delta_1 = [1,\ 31] \text{ (январь)}, \quad \Delta_2 = [32,\ 59] \text{ (февраль)}, \ \ldots \ .$$

Данные по месяцам приведены в таблице.

i	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
ν_i	7280	6957	7883	7884	7892	7609	7585	7393	7203	6903	6552	7132
p_i	$\frac{31}{365}$	$\frac{28}{365}$	...									
s_i	6.29	12.27	19.85	54.48	20.79	17.24	1.03	1.45	0.38	47.09	68.18	17.79

Здесь обозначено $s_i = \dfrac{(\nu_i - np_i)^2}{np_i}$. Получаем

$$\Psi_n = \sum_{i=1}^{k} s_i = 266.84.$$

Если взять $\varepsilon = 0.05$, то из таблиц находим $\chi^2_{11}(19.7) = 0.95$, т. е. $\Psi_n > q = 19.7$ с большим запасом. Гипотезу о равных вероятностях следует отвергнуть. Кстати, тот же вывод следует и для меньших значений ε, так как из тех же таблиц следует, к примеру, что $\chi^2_{11}(45) = 0.99999...$.

Построение критерия с помощью доверительного интервала

Предположим, что $X \Subset F_\theta$, $\theta \in \mathbb{R}$ — неизвестный параметр. Наша задача состоит в проверке основной гипотезы $H_1: \ \theta = \theta_1$ против $H_2: \ \theta \neq \theta_1$.

Если мы имеем доверительный интервал для θ уровня $1 - \varepsilon$ (точный или асимптотический), то с его помощью можно построить критерий согласия (также точный или асимптотический) уровня $1 - \varepsilon$. Действительно, если при всех значениях θ

$$\mathbf{P}_\theta(A(X_1, \ldots, X_n) < \theta < B(X_1, \ldots, X_n)) \geq 1 - \varepsilon,$$

то и при $\theta = \theta_1$ должно быть

$$\mathbf{P}_{\theta_1}(A(X_1, \ldots, X_n) < \theta_1 < B(X_1, \ldots, X_n)) \geq 1 - \varepsilon.$$

Поэтому мы отвергаем H_1, если $\theta_1 \notin (A(X_1, \ldots, X_n), \ B(X_1, \ldots, X_n))$, поскольку такое событие имеет малую вероятность (не больше ε) при справедливости H_1. Критическое множество выглядит так:

$$\mathbf{K} = \{(X_1, \ldots, X_n) : \ \theta_1 \notin (A(X_1, \ldots, X_n), \ B(X_1, \ldots, X_n))\}.$$

Проверка гипотез в случае двух выборок

В этом разделе мы будем предполагать, что проведены две серии независимых испытаний, в результате которых имеем две независимые выборки

$$X = (X_1, \ldots, X_n) \Subset F$$

и

$$Y = (Y_1, \ldots, Y_m) \Subset G.$$

Чаще всего проверяется основная гипотеза о совпадении распределений $F = G$. В этом случае критерии называются *критериями однородности*. В других ситуациях проверяется гипотеза о совпадении только некоторых параметров распределений F и G. С таких задач мы и начнем.

Заметим предварительно, что теперь мы имеем $n+m$ наблюдений, следовательно, выборочным пространством будет $\mathbb{R}^{n+m}$ и критическое множество $\mathbf{K}$ будет $n+m$-мерным.

Итак, пусть сначала

$$X = (X_1, \ldots, X_n) \Subset \Phi_{\alpha_1, \sigma_1^2}, \qquad Y = (Y_1, \ldots, Y_m) \Subset \Phi_{\alpha_2, \sigma_2^2}.$$

Все четыре параметра неизвестны.

1. Проверка гипотезы о совпадении дисперсий. Здесь мы проверяем основную гипотезу $H_1: \ \sigma_1^2 = \sigma_2^2$ против $H_2: \ \sigma_1^2 \neq \sigma_2^2$. Заранее выберем малое число $\varepsilon > 0$, и пусть

$$\overline{X} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i, \quad S_X^2 = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(X_i - \overline{X})^2,$$

$$\overline{Y} = \frac{1}{m}\sum_{i=1}^{m} Y_i, \quad S_Y^2 = \frac{1}{m}\sum_{i=1}^{m}(Y_i - \overline{Y})^2.$$

По теореме о свойствах выборок из нормального распределения

$$\frac{nS_X^2}{\sigma_1^2} \Subset \chi^2_{n-1}, \qquad \frac{mS_Y^2}{\sigma_2^2} \Subset \chi^2_{m-1},$$

причем эти случайные величины независимы, поскольку построены по независимым выборкам. Из них можно построить случайную величину, имеющую распределение Фишера:

$$\frac{1}{n-1}\,\frac{nS_X^2}{\sigma_1^2} : \frac{1}{m-1}\,\frac{mS_Y^2}{\sigma_2^2} = \frac{n(m-1)\sigma_2^2 S_X^2}{m(n-1)\sigma_1^2 S_Y^2} \Subset F_{n-1,\,m-1}.$$

Если верна гипотеза H_1, т. е. $\sigma_1^2 = \sigma_2^2$, то

$$\eta = \frac{n(m-1)S_X^2}{m(n-1)S_Y^2} \Subset F_{n-1,\,m-1}.$$

С помощью таблиц распределения $F_{n-1,\,m-1}$ можно найти числа q_1 и q_2 такие, что $F_{n-1,\,m-1}(q_1) = \varepsilon/2, \quad F_{n-1,\,m-1}(q_2) = 1 - \varepsilon/2$. Тогда

$$\mathbf{P}_1(q_1 < \eta < q_2) = F_{n-1,\,m-1}(q_2) - F_{n-1,\,m-1}(q_1) = 1 - \varepsilon.$$

Поэтому логично отвергать H_1, если $\eta \notin (q_1,\, q_2)$; вероятность этого события равна в точности ε, если верна H_1. Здесь

$$\mathbf{K} = \{(X_1, \ldots, X_n, Y_1, \ldots, Y_m) : \ \eta \notin (q_1,\, q_2)\}.$$

2. Проверка гипотезы о совпадении средних. Мы будем это делать в предположении, что дисперсии совпадают: $\sigma_1^2 = \sigma_2^2 = \sigma^2$; σ^2 по-прежнему неизвестно. Проверяется гипотеза $H_1: \ \alpha_1 = \alpha_2$ против $H_2: \ \alpha_1 \neq \alpha_2$.

Здесь будет использоваться распределение Стьюдента. В силу того что $\overline{X}$ и $\overline{Y}$ независимы и

$$\overline{X} \Subset \Phi_{\alpha_1, \sigma^2/n}, \qquad \overline{Y} \Subset \Phi_{\alpha_2, \sigma^2/m},$$

имеем

$$\overline{X} - \overline{Y} \Subset \Phi_{\alpha_1 - \alpha_2, \sigma^2(1/n + 1/m)}$$

и после стандартизации

$$\frac{\overline{X} - \overline{Y} - (\alpha_1 - \alpha_2)}{\sqrt{\sigma^2 \left(\dfrac{1}{n} + \dfrac{1}{m}\right)}} \Subset \Phi_{0,1}.$$

Далее, по свойству распределения хи-квадрат

$$\frac{nS_X^2}{\sigma^2} + \frac{mS_Y^2}{\sigma^2} \Subset \chi^2_{n+m-2};$$

эта случайная величина не зависит от $\overline{X} - \overline{Y}$. Таким образом,

$$\frac{\overline{X} - \overline{Y} - (\alpha_1 - \alpha_2)}{\sigma\sqrt{\dfrac{1}{n} + \dfrac{1}{m}}} : \sqrt{\frac{1}{n+m-2} \frac{nS_X^2 + mS_Y^2}{\sigma^2}} \Subset T_{n+m-2}.$$

Если верна гипотеза H_1, то $\alpha_1 - \alpha_2 = 0$ и

$$\psi = \frac{\overline{X} - \overline{Y}}{\sqrt{\dfrac{1}{n} + \dfrac{1}{m}} \sqrt{\dfrac{nS_X^2 + mS_Y^2}{n+m-2}}} \Subset T_{n+m-2}.$$

Из таблиц распределения T_{n+m-2} находим число q такое, что $T_{n+m-2}(-q) = \varepsilon/2$. Тогда

$$\mathbf{P}_1(-q < \psi < q) = T_{n+m-2}(q) - T_{n+m-2}(-q) = 1 - \varepsilon.$$

Следовательно, выбрав

$$\mathbf{K} = \{(X_1, \ldots, X_n, Y_1, \ldots, Y_m) : \ |\psi| \geq q\},$$

мы будем иметь $\beta_1 = \mathbf{P}_1((X_1, \ldots, X_n, Y_1, \ldots, Y_m) \in \mathbf{K}) = \varepsilon$.

Критерий Колмогорова-Смирнова однородности двух выборок

Пусть

$$X = (X_1, \ldots, X_n) \Subset F, \qquad Y = (Y_1, \ldots, Y_m) \Subset G,$$

где F и G — непрерывные функции распределения. Проверяется гипотеза $H_1: \; F = G$ против $H_2: \; F \neq G$. Мы построим асимптотический критерий уровня $1-\varepsilon$.

Пусть F_n^* и G_m^* — эмпирические функции распределения, построенные по выборкам X и Y соответственно. Введем

$$D_{n,m} = \sup_y |F_n^*(y) - G_m^*(y)|.$$

Если верна H_1, то при увеличении объемов выборок эмпирические функции распределения сходятся по вероятности к общему пределу, т. е. $D_{n,m} \xrightarrow{P} 0$. Следующая теорема показывает, с какой скоростью это происходит (приводится без доказательства).

Теорема Колмогорова–Смирнова. *Пусть верна гипотеза H_1 и общая функция распределения выборок непрерывна. Тогда для любого $y > 0$ при $n \to \infty$, $m \to \infty$*

$$\mathbf{P}_1\left(\sqrt{\frac{nm}{n+m}} D_{n,m} < y\right) \to \mathcal{K}(y) = \sum_{i=-\infty}^{\infty} (-1)^i \, e^{-2i^2y^2}.$$

Пусть q таково, что $\mathcal{K}(q) = 1 - \varepsilon$. Положим

$$\mathbf{K} = \left\{(X_1, \ldots, X_n, Y_1, \ldots, Y_m) : \; \sqrt{\frac{nm}{n+m}} D_{n,m} \geq q\right\},$$

т. е. мы отвергаем гипотезу об однородности, если расхождение между двумя эмпирическими функциями распределения достаточно велико. Тогда при больших n

$$\beta_1 = \mathbf{P}_1\left(\sqrt{\frac{nm}{n+m}} D_{n,m} \geq q\right) \simeq 1 - \mathcal{K}(q) = \varepsilon.$$

Дисперсионный анализ: однофакторная модель

Дисперсионный анализ объединяет значительное число задач математической статистики, в которых анализируется влияние тех или иных факторов на конечный результат. Мы рассмотрим здесь простейшую модель, в которой проверяется гипотеза о влиянии одного фактора.

Пусть имеется k независимых выборок

$$\begin{array}{c} (X_{11}, X_{12}, \ldots, X_{1n_1}) \Subset \Phi_{\alpha_1, \sigma^2}, \\ (X_{21}, X_{22}, \ldots, X_{2n_2}) \Subset \Phi_{\alpha_2, \sigma^2}, \\ \ldots \quad \ldots \quad \ldots \quad \ldots \quad \ldots \\ (X_{k1}, X_{k2}, \ldots, X_{kn_k}) \Subset \Phi_{\alpha_k, \sigma^2}. \end{array}$$

Все параметры $\alpha_1, \ldots, \alpha_k, \sigma^2$ неизвестны. Проверяются гипотезы

$H_1: \; \alpha_1 = \alpha_2 = \ldots = \alpha_k$,

$H_2:$ существуют индексы $i \neq j$ такие, что $\alpha_i \neq \alpha_j$.

Такая задача может возникнуть, к примеру, в следующей ситуации. Пусть на k станках производится изготовление (или обработка) одинаковых деталей. У каждой изготовленной детали замеряется некий параметр, скажем диаметр. Он является случайной величиной вследствие неизбежных отклонений от стандарта. Мы получаем тем самым k выборок, предполагается, что на i-м станке изготовлено n_i деталей. Гипотеза H_1 утверждает, что не важно, на каком станке изготовлена деталь, фактор станка не играет роли. Это соответствует тому, что средние значения у всех выборок совпадают. В то же время конкурирующая гипотеза объявляет о наличии систематических отклонений для некоторых станков.

Схема наших действий такова: мы будем строить из наблюдений случайную величину, которая при справедливости H_1 распределена по закону Фишера с известным числом степеней свободы. Это и определит в итоге наше решение.

Обозначим

$$N = \sum_{i=1}^{k} n_i, \quad \overline{X}_i = \frac{1}{n_i} \sum_{j=1}^{n_i} X_{ij}, \quad \overline{X} = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^{k} \sum_{j=1}^{n_i} X_{ij}.$$

Теорема. *Если верна гипотеза* H_1, *то*

$$\frac{(N-k)\sum_{i=1}^{k} n_i(\overline{X}_i - \overline{X})^2}{(k-1)\sum_{i=1}^{k}\sum_{j=1}^{n_i}(X_{ij}-\overline{X}_i)^2} \Subset F_{k-1,\,N-k}.$$

Доказательство. Предположим на время, что нам известны все параметры $\alpha_1, \ldots, \alpha_k, \sigma^2$, и применим к каждому наблюдению стандартизацию. Пусть

$$Y_{ij} = \frac{X_{ij} - \alpha_i}{\sigma} \Subset \Phi_{0,1}, \quad i = 1, \ldots, k, \quad j = 1, \ldots, n_i, \quad \overline{Y}_i = \frac{1}{n_i} \sum_{j=1}^{n_i} Y_{ij}.$$

Запишем выражение для выборочной дисперсии, построенной по i-й выборке из стандартизованных наблюдений:

$$\frac{1}{n_i} \sum_{j=1}^{n_i} (Y_{ij} - \overline{Y}_i)^2 = \frac{1}{n_i} \sum_{j=1}^{n_i} Y_{ij}^2 - (\overline{Y}_i)^2.$$

Как и при доказательстве теоремы о свойствах выборок из нормального распределения, с помощью леммы Фишера устанавливаем, что

$$\sum_{j=1}^{n_i} (Y_{ij} - \overline{Y}_i)^2 = \sum_{j=1}^{n_i} Y_{ij}^2 - (\sqrt{n_i}\,\overline{Y}_i)^2 \Subset \chi^2_{n_i-1}$$

и эта величина не зависит от $\overline{Y}_i$. Суммируя левые части по i, получаем

$$Q_1 = \sum_{i=1}^{k} \sum_{j=1}^{n_i} (Y_{ij} - \overline{Y}_i)^2 \Subset \chi^2_{N-k}.$$

Отметим, что Q_1 не зависит от $\overline{Y}_1, \ldots, \overline{Y}_k$.

Введем далее

$$\overline{Y} = \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{k}\sum_{j=1}^{n_i} Y_{ij} = \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{k} n_i\overline{Y}_i.$$

Тогда

$$\begin{aligned} Q_2 &= \sum_{i=1}^{k} n_i(\overline{Y}_i - \overline{Y})^2 = \sum_{i=1}^{k} n_i\overline{Y}_i^2 - 2\overline{Y}\sum_{i=1}^{k} n_i\overline{Y}_i + (\overline{Y})^2\sum_{i=1}^{k} n_i = \\ &= \sum_{i=1}^{k}(\sqrt{n_i}\,\overline{Y}_i)^2 - 2\overline{Y}N\overline{Y} + N\overline{Y}^2 = \\ &= \sum_{i=1}^{k}(\sqrt{n_i}\,\overline{Y}_i)^2 - (\sqrt{N}\,\overline{Y})^2. \end{aligned}$$

Мы знаем, что $\overline{Y}_i \in \Phi_{0,1/n_i}$, поэтому $\sqrt{n_i}\,\overline{Y}_i \in \Phi_{0,1}$. Далее,

$$\begin{aligned} \sqrt{N}\,\overline{Y} &= \frac{\sqrt{N}}{N}\sum_{i=1}^{k} n_i\overline{Y}_i = \sum_{i=1}^{k}\frac{\sqrt{n_i}}{\sqrt{N}}\sqrt{n_i}\,\overline{Y}_i = \\ &= \left(\frac{\sqrt{n_1}}{\sqrt{N}}, \ldots, \frac{\sqrt{n_k}}{\sqrt{N}}\right)\,(\sqrt{n_1}\,\overline{Y}_1, \ldots, \sqrt{n_k}\,\overline{Y}_k)^T. \end{aligned}$$

Вектор $\left(\frac{\sqrt{n_1}}{\sqrt{N}}, \ldots, \frac{\sqrt{n_k}}{\sqrt{N}}\right)$ имеет единичную длину, поэтому его всегда можно достроить до ортогональной матрицы, в которой он будет первой строкой. Воспользовавшись леммой Фишера, получим, что

$$Q_2 = \sum_{i=1}^{k}(\sqrt{n_i}\,\overline{Y}_i)^2 - (\sqrt{N}\,\overline{Y})^2 \in \chi^2_{k-1}.$$

Напомним, что Q_1 и Q_2 независимы, поэтому случайная величина

$$\frac{Q_2/(k-1)}{Q_1/(N-k)}$$

распределена по закону Фишера $F_{k-1,N-k}$.

Вернемся к исходным наблюдениям.

$$Y_{ij} - \overline{Y}_i = \frac{X_{ij} - \alpha_i}{\sigma} - \frac{\overline{X}_i - \alpha_i}{\sigma} = \frac{X_{ij} - \overline{X}_i}{\sigma},$$

поэтому

$$Q_1 = \frac{1}{\sigma^2}\sum_{i=1}^{k}\sum_{j=1}^{n_i}(X_{ij} - \overline{X}_i)^2.$$

Предположим теперь, что H_1 верна, т. е. $\alpha_1 = \alpha_2 = \ldots = \alpha_k = \alpha$. Тогда

$$\overline{Y} = \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{k}\sum_{j=1}^{n_i}\left(\frac{X_{ij}-\alpha_i}{\sigma}\right) = \frac{\overline{X}-\alpha}{\sigma}.$$

Поэтому

$$Q_2 = \sum_{i=1}^{k} n_i\left(\frac{\overline{X}_i-\alpha}{\sigma} - \frac{\overline{X}-\alpha}{\sigma}\right)^2 = \frac{1}{\sigma^2}\sum_{i=1}^{k} n_i(\overline{X}_i-\overline{X})^2.$$

Таким образом, если верна гипотеза H_1, то

$$\xi = \frac{Q_2/(k-1)}{Q_1/(N-k)} = \frac{(N-k)\sum_{i=1}^{k} n_i(\overline{X}_i-\overline{X})^2}{(k-1)\sum_{i=1}^{k}\sum_{j=1}^{n_i}(X_{ij}-\overline{X}_i)^2} \Subset F_{k-1,\,N-k}.$$

Теорема доказана.

Перейдем к построению критерия. В полученном выражении для случайной величины ξ именно числитель чувствителен к систематическим отклонениям между выборками, поэтому мы будем реагировать на большие значения ξ. По таблицам распределения $F_{k-1,\,N-k}$ находим число $q>0$ такое, что $F_{k-1,\,N-k}(q) = 1-\varepsilon$. Иными словами, если верна гипотеза H_1, то событие $\{\xi \geq q\}$ маловероятно. Поэтому отвергаем H_1, если $\xi \geq q$, и принимаем ее в противном случае. При этом $\beta_1 = \mathbf{P}_1(\xi \geq q) = \varepsilon$.

ТЕМА 10. МАТЕМАТИЧЕСКОЕ ПРОГРАММИРОВАНИЕ

10.1. Линейное программирование

Математическое программирование (МП) – область прикладной математики, разрабатывающая теорию и численные методы решения многомерных экстремальных задач с ограничениями, т.е. задач на экстремум функции многих переменных с ограничениями на область изменения этих переменных.

Модель задачи МП можно записать в виде:

$$\max(\min) f = f(x_1,\ x_2,\ \dots,\ x_n), \tag{10.1}$$

$$\varphi_i(x_1,\ x_2,\ \dots,\ x_n)\{\le,=,\ge\}b_i,\ i=\overline{1,m}, \tag{10.2}$$

$$x_j \ge 0,\ j=\overline{1,n}. \tag{10.3}$$

(10.1) – целевая функция (ЦФ) (показатель эффективности, критерий оптимальности и др.). ЦФ позволяет выбирать наилучший вариант из множества возможных, который доставляет ей экстремальное значение. Это может быть прибыль, объем выпуска или реализации, затраты производства, издержки обращения, отходы и т.д.

(10.2) – основные ограничения, (10.3) – прямые ограничения. Математически ограничения выражаются в виде уравнений и неравенств. Их совокупность образует **область допустимых решений (ОДР)** (область экономических возможностей).

Совокупность неизвестных величин $X=(x_1,x_2,\dots,x_n)$, действуя на которые, систему можно совершенствовать, будем называть **планом** задачи (решением, управлением, стратегией, поведением и др.).

План $X=(x_1,x_2,\dots,x_n)$**,** удовлетворяющий системе ограничений, т.е. основным (10.2) и прямым (10.3) ограничениям задачи, называется **допустимым**.

Допустимый план, доставляющий ЦФ экстремальное значение, называется **оптимальным** и обозначается X^*.

Экстремальное значение ЦФ обозначается $f^*=\max(\min) f = f(X^*)$.

Примеры экономических задач линейного программирования

Линейное программирование (ЛП) – раздел МП, в котором разрабатываются методы отыскания экстремума линейных функций многих переменных при линейных дополнительных ограничениях, налагаемых на эти переменные.

а) Задача о наилучшем использовании ресурсов.

Пусть некоторая производственная единица производит n видов продукции, при этом используется m видов ресурсов.

Известны следующие параметры: c_j, $j=\overline{1,n}$ – цена единицы продукции j–го вида; b_i, $i=\overline{1,m}$ – количество i–го ресурса; a_{ij}, $i=\overline{1,m}$, $j=\overline{1,n}$ – количество i–го ресурса для производства единицы продукции j–го вида.

Требуется определить план производства $X^*=(x_1^*, x_2^*, \dots, x_n^*)$, т.е. планируемый объем производства каждого вида продукции, при котором обеспечивается максимальная прибыль при имеющихся ресурсах.

Так как c_j – цена единицы продукции j–го вида, то цена x_j единиц будет равна $c_j x_j$, а общий объем реализации составит:

$$F = c_1x_1 + c_2x_2 + \dots + c_nx_n = \sum_{j=1}^{n} c_j x_j .$$

Так как a_{ij} – расход i–го ресурса на производство единицы продукции j–го вида, тогда расход этого ресурса на производство x_j единиц будет равен $a_{ij}x_j$, а расход i–го ресурса на выпуск всех n видов продукции, который не должен превышать b_i, составит:

$$a_{i1}x_1 + a_{i2}x_2 + \dots + a_{in}x_n = \sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_j \le b_i,\ i=\overline{1,m}.$$

Чтобы искомый план был реален, наряду с ограничениями на ресурсы, нужно на объемы выпуска продукции наложить условия неотрицательности, т.е. $x_j \ge 0$, $j=\overline{1,n}$.

Таким образом, ЭММ о наилучшем использовании ресурсов примет вид:

$$\max F=\sum_{j=1}^{n}c_jx_j,$$
$$\sum_{j=1}^{n}a_{ij}x_j\le b_i,\ \ i=\overline{1,m},$$
$$x_j\ge 0,\ \ j=\overline{1,n}.$$

б) Задача о диете (о рационе).

Пусть имеется n продуктов питания, в которых содержится m полезных веществ.

Известны следующие параметры: c_j, $j=\overline{1,n}$ – цена единицы j–го продукта; b_i, $i=\overline{1,m}$ – минимальное количество i–го полезного вещества, которое должно потребляться за определенный промежуток времени; a_{ij}, $i=\overline{1,m}$, $j=\overline{1,n}$ – содержание i–го полезного вещества в единице j–го продукта.

Требуется определить количество приобретения продуктов каждого вида $X^*=(x_1^*,x_2^*,\dots,x_n^*)$, обеспечивающие необходимое количество полезных веществ при минимальной стоимости продуктов питания.

Если c_j – цена единицы j–го продукта, тогда цена x_j единиц будет равна c_jx_j, а цена n продуктов питания составит:

$$F=c_1x_1+c_2x_2+\dots+c_nx_n=\sum_{j=1}^{n}c_jx_j\ .$$

Если a_{ij} – содержание i–го полезного вещества в единице j–го продукта, тогда содержание i–го вещества в x_j единиц этого продукта равна $a_{ij}x_j$, а содержание i–го вещества в n продуктах питания, которое должно быть не меньше b_i, равно:

$$a_{i1}x_1+a_{i2}x_2+\dots+a_{in}x_n=\sum_{j=1}^{n}a_{ij}x_j\ge b_i,\ i=\overline{1,m}.$$

ЭММ задачи о диете будет иметь вид:

$$\min F = \sum_{j=1}^{n} c_j x_j,$$
$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j \ge b_i, \quad i = \overline{1,m},$$
$$x_j \ge 0, \quad j = \overline{1,n}.$$

Формы записи задачи ЛП

Общей задачей ЛП называют задачу вида:

$$\max(\min) F = \sum_{j=1}^{n} c_j x_j,$$
$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j < b_i, \quad i = \overline{1,m_1},$$
$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j = b_i, \quad i = \overline{m_1+1,m_2},$$
$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j > b_i, \quad i = \overline{m_2+1,m},$$
$$x_j \ge 0, \quad j = \overline{1,n_1},$$
$$x_j - \textit{произвольные}, \quad j = \overline{n_1+1,n}.$$

Симметричной формой записи задачи ЛП называют задачу:

$$\max F = \sum_{j=1}^{n} c_j x_j,$$
$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j \le b_i, \quad i = \overline{1,m},$$
$$x_j \ge 0, \quad j = \overline{1,n},$$

или

$$\min F = \sum_{j=1}^{n} c_j x_j,$$
$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j \ge b_i, \quad i = \overline{1,m},$$
$$x_j \ge 0, \quad j = \overline{1,n}.$$

Канонической формой записи задачи ЛП называют задачу:

$$\max(\min)F = \sum_{j=1}^{n} c_j x_j,$$
$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j = b_i, \ \ i = \overline{1,m},$$
$$x_j \geq 0, \ \ j = \overline{1,n}.$$

Рассмотрим еще два употребляемых вида записи – **матричную** и **векторную**.

Введем обозначения:

$$C = \begin{bmatrix} c_1 & c_2 & \dots & c_n \end{bmatrix}, \quad X = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \dots \\ x_n \end{bmatrix}, \quad A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \dots \\ b_m \end{bmatrix}.$$

Тогда каноническая форма задачи будет иметь вид:

$$\max F = [c_1 \ c_2 \ \ldots c_n][x_1 \ x_2 \ \ldots x_n]^T,$$
$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \dots \\ x_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \dots \\ b_m \end{bmatrix}, \qquad \text{или} \qquad \begin{array}{l} \max F = CX, \\ AX = B, \\ X \geq 0. \end{array}$$
$$X \geq 0,$$

Для того, чтобы записать векторную форму записи задачи, для столбцов матрицы A введем обозначения:

$$A_1 = \begin{bmatrix} a_{11} \\ a_{21} \\ \dots \\ a_{m1} \end{bmatrix}, \quad A_2 = \begin{bmatrix} a_{21} \\ a_{22} \\ \dots \\ a_{m2} \end{bmatrix}, \quad \ldots, \quad A_n = \begin{bmatrix} a_{1n} \\ a_{2n} \\ \dots \\ a_{mn} \end{bmatrix}.$$

Тогда каноническая задача примет вид:

$$\max F = CX,$$
$$A_1 x_1 + A_2 x_2 + \ldots + A_n x_n = B,$$
$$X \geq 0.$$

Способы преобразования

При необходимости задачу минимизации можно заменить задачей максимизации, и наоборот.

Для функции одной переменной это утверждение очевидно. Если x^* – точка минимума функции $y = f(x)$, то для функции $y = -f(x)$ она является точкой максимума, так как графики функций $y = f(x)$ и $y = -f(x)$ симметричны относительно оси абсцисс.

Итак, $\min f(x^*) = -\max(-f(x^*))$. То же самое имеет место и в случае функции n переменных:

$$\min f(x_1^*, x_2^*, ..., x_n^*) = -\max(-f(x_1^*, x_2^*, ..., x_n^*)).$$

Пусть исходная задача ЛП имеет вид:

$$\max F = \sum_{j=1}^{n} c_j x_j \ , \tag{10.4}$$

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j \le b_i, \ i = \overline{1, m_1}\,, \tag{10.5}$$

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j \ge b_i, \ i = \overline{m_1 + 1, m}\,, \tag{10.6}$$

$$x_j \ge 0, \ j = \overline{1, n}. \tag{10.7}$$

Преобразуем ее к каноническому виду.

Введем m дополнительных (балансовых) неотрицательных переменных $x_{n+i} \ge 0$, $i = \overline{1, m}$.

Для того чтобы неравенства (10.5) преобразовать в равенства, к их левым частям прибавим дополнительные переменные $x_{n+i} \ge 0$, $i = \overline{1, m_1}$, а для преобразования неравенств (10.6) в равенства, из их левых частей вычтем дополнительные переменные $x_{n+i} \ge 0$, $i = \overline{m_1 + 1, m}$, после чего системы неравенств (10.5) и (10.6) примут вид:

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j + x_{n+i} = b_i, \ i = \overline{1, m_1}, \tag{10.8}$$

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j - x_{n+i} = b_i, \ i = \overline{m_1 + 1, m}. \tag{10.9}$$

Систему уравнений (10.8)–(10.9) с условиями неотрицательности дополнительных переменных называют **эквивалентной** системе неравенств (10.5)–(10.6).

Дополнительные переменные $x_{n+i} \geq 0$, $i = \overline{1,m}$, в ЦФ вводятся с коэффициентами, равными нулю. Получим задачу в канонической форме:

$$\max F = \sum_{j=1}^{n} c_j x_j + \sum_{i=1}^{m} 0 x_{n+i}\,, \tag{10.10}$$

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j + x_{n+i} = b_i\,,\ i = \overline{1,m_1}\,, \tag{10.11}$$

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j - x_{n+i} = b_i\,,\ i = \overline{m_1+1,m}\,, \tag{10.12}$$

$$x_j \geq 0\,,\ j = \overline{1,n}\,,\ x_{n+i} \geq 0\,,\ i = \overline{1,m}\,. \tag{10.13}$$

Теорема. *Каждому допустимому решению* $(x_1{}^0, x_2{}^0, \ldots, x_n{}^0)$ *задачи (10.4)–(10.7) соответствует вполне определенное допустимое решение* $(x_1{}^0, x_2{}^0, \ldots, x_n{}^0, x_{n+1}{}^0, \ldots, x_{n+m}^0)$ *задачи (10.10)–(10.13), где* $x_{n+i} \geq 0$, $i = \overline{1,m}$, *и наоборот, каждому допустимому решению* $(x_1{}^0, x_2{}^0, \ldots, x_n{}^0, x_{n+1}{}^0, \ldots, x_{n+m}^0)$ *задачи (10.10)–(10.13) соответствует допустимое решение* $(x_1{}^0, x_2{}^0, \ldots, x_n{}^0)$ *задачи (10.4)–(10.7).*

Доказательство. Пусть $(x_1{}^0, x_2{}^0, \ldots, x_n{}^0)$ – допустимое решение задачи (10.4)–(10.7). Для условий (10.5) обозначим

$$x_{n+i}^0 = b_i - \sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j^0 \geq 0\,,\ i = \overline{1,m_1}\,, \tag{10.14}$$

а для (10.6)

$$x_{n+i}^0 = \sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j^0 - b_i \geq 0\,,\ i = \overline{m_1+1,m}\,. \tag{10.15}$$

Из условий (10.14) и (10.15) следуют условия (10.11) и (10.12). Отсюда $(x_1{}^0, x_2{}^0, \ldots, x_n{}^0, x_{n+1}{}^0, \ldots, x_{n+m}^0)$ есть определенное допустимое решение задачи (10.10)–(10.13). Аналогично доказывается обратное утверждение.

Так как дополнительные переменные x_{n+i}^0 входят в ЦФ (10.10) с коэффициентами, равными нулю, то значения ЦФ (10.4) и (10.10) при соответствующих допустимых решениях одинаковы. Отсюда следует, что данные ЦФ на множестве соответствующих допустимых решений достигают экстремального значения одновременно. Оптимальному решению задачи (10.4)–(10.7) соответствует оптимальное решение задачи (10.10)–(10.13), т.е. исходная задача и ее каноническая форма эквивалентны.

Переход к симметричной форме записи можно осуществить двумя способами.

1) Пусть в общей задаче ЛП имеются ограничения–равенства $\sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j = b_i$. Каждое такое ограничение равенство эквивалентно системе неравенств:

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j \le b_i, \ \sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j \ge b_i.$$

Неравенство вида “≥” умножением обеих частей на -1 превращается в неравенство вида “≤”, и наоборот.

2) Рассмотрим задачу ЛП в каноническом виде:

$$\max(\min) F = \sum_{j=1}^{n} c_j x_j,$$
$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j = b_i, \ i = \overline{1,m},$$
$$x_j \ge 0, \quad j = \overline{1,n}.$$

Приведем ее к симметричной форме. Пусть ранг системы основных ограничений равен m и $m < n$. Тогда система будет иметь бесконечное множество решений. Не ограничивая общности, можно считать, что в матрице системы линейно независимы первые m столбцов. Например, методом исключений Гаусса систему преобразуем к виду:

$$x_i + \sum_{j=m+1}^{n} \alpha_{ij} x_j = \beta_i, \ i = \overline{1,m}. \tag{10.16}$$

Переменные $x_1, x_2, \ldots, x_m$ называются **базисными** переменными (БП), а $x_{m+1}, x_{m+2}, \ldots, x_n$ – **свободными** переменными (СП).

Выразим ЦФ через свободные переменные. Для этого подставим значения x_i из равенств (10.16) в ЦФ, получим:

$$F=\sum_{j=1}^{n}c_jx_j=c_1x_1+c_2x_2+\ldots+c_mx_m+c_{m+1}x_{m+1}+\ldots+c_nx_n=$$
$$=c_1(\beta_1-\sum_{j=m+1}^{n}\alpha_{1j}x_j)+c_2(\beta_2-\sum_{j=m+1}^{n}\alpha_{2j}x_j)+\ldots+c_m(\beta_m-\sum_{j=m+1}^{n}\alpha_{mj}x_j)+$$

$$\begin{gathered}+c_{m+1}x_{m+1}+\ldots+c_nx_n=(c_1\beta_1+c_2\beta_2+\ldots+c_m\beta_m)-\\-[((c_1\alpha_{1,m+1}+c_2\alpha_{2,m+1}+...+c_m\alpha_{m,m+1})-c_{m+1})x_{m+1}+\\+((c_1\alpha_{1,m+2}+c_2\alpha_{2,m+2}+\ldots+c_m\alpha_{m,m+2})-c_{m+2})x_{m+2}+\ldots+\\+((c_1\alpha_{1,n}+c_2\alpha_{2,n}+\ldots+c_m\alpha_{m,n})-c_n)x_n)].\end{gathered}$$

Введем обозначения: $c_Б$ – вектор коэффициентов ЦФ, стоящих при базисных переменных, B – вектор свободных членов в (10.16), A_{m+k}, $k=\overline{1,n-m}$ – векторы коэффициентов при свободных переменных, т.е.

$$\begin{aligned}&\Delta_0=c_1\beta_1+c_2\beta_2+\ldots+c_m\beta_m=c_БB,\\&\Delta_{m+1}=(c_1\alpha_{1,m+1}+c_2\alpha_{2,m+1}+\ldots+c_m\alpha_{m,m+1})-c_{m+1}=c_БA_{m+1}-c_{m+1},\\&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots..,\\&\Delta_n=(c_1\alpha_{1,n}+c_2\alpha_{2,n}+\ldots+c_m\alpha_{m,n})-c_n=c_БA_n-c_n.\end{aligned}$$

Используя эти обозначения, получаем, что $F=\Delta_0-\sum_{j=m+1}^{n}\Delta_jx_j$.

Так как $x_j\geq 0$, $j=\overline{1,n}$, из равенства (10.16) имеем, что $\sum_{j=m+1}^{n}\alpha_{ij}x_j\leq\beta_i$, $i=\overline{1,m}$.

Модель задачи ЛП принимает вид:

$$\begin{aligned}&\max F=\Delta_0-\sum_{j=m+1}^{n}\Delta_jx_j,\\&\sum_{j=m+1}^{n}\alpha_{ij}x_j\leq\beta_i,\ i=\overline{1,m},\\&x_j\geq 0,\ j=\overline{m+1,n}.\end{aligned}$$

Отметим, что в любом случае при подстановке базисных переменных в ЦФ справедлива формула:

$$F = \Delta_0 - \sum_{j=1}^{n} \Delta_j x_j ,$$

где $\Delta_0 = c_Б B,\ \ \Delta_j = c_Б A_j - c_j,\ \ j = \overline{1,n}$.

Последние формулы используют для контроля вычислений при решении задачи ЛП симплексным методом.

В ряде производственно–экономических ситуаций не на все переменные налагаются условия неотрицательности. В подобных ситуациях, каждую из переменных x_k, на которую не наложено условие неотрицательности, заменим разностью двух неотрицательных переменных $x_k^{'}$ и $x_k^{''}$, т.е. $x_k = x_k^{'} - x_k^{''}$, где $x_k^{'} \geq 0$, $x_k^{''} \geq 0$.

Графический метод решения задач ЛП

Рассмотрим задачу ЛП с двумя переменными:

$$\max(\min)F = c_1 x_1 + c_2 x_2, \tag{10.17}$$

$$a_{i1}x_1 + a_{i2}x_2 \{\leq, =, \geq\} b_i,\ i = \overline{1,m}, \tag{10.18}$$

$$x_j \geq 0,\ j = \overline{1,n}. \tag{10.19}$$

Дадим геометрическую интерпретацию элементов этой задачи.

Каждое из ограничений (10.18) и (10.19) задает на плоскости $x_1 O x_2$ некоторую полуплоскость. Полуплоскость – выпуклое множество. Пересечение любого числа выпуклых множеств является выпуклым множеством. Отсюда следует, что ОДР задачи (10.17)–(10.19) является выпуклое множество. Отметим, что областью допустимых решений может быть выпуклый многоугольник, неограниченная выпуклая многоугольная область, единственная точка, прямая линия, луч, отрезок, пустое множество.

Перейдем к геометрической интерпретации ЦФ. Пусть областью допустимых решений является многоугольник $A_1 A_2 A_3 A_4 A_5 A_6$ (рис.10.1).

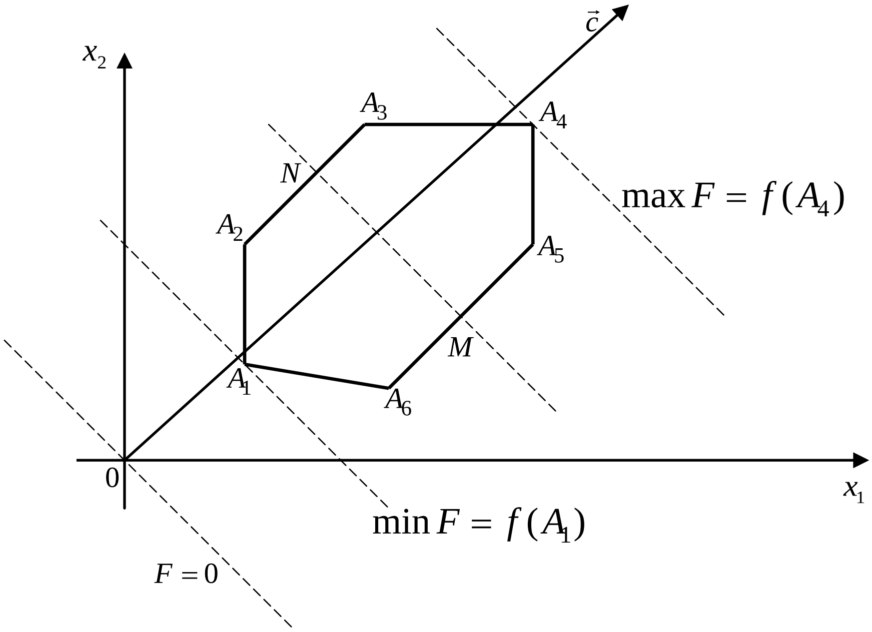


Рисунок 10.1.

Выберем произвольное значение $F = F_0$. Получим $c_1 x_1 + c_2 x_2 = F_0$ – это уравнение прямой линии *(NM)*. В точках прямой *(NM)* ЦФ сохраняет одно и тоже постоянное значение F_0. Считая в (10.17) F параметром, получим уравнение семейства параллельных прямых, называемых **линиями уровня ЦФ (линиями постоянного значения)**.

Для того, чтобы установить направление возрастания (убывания) ЦФ, найдем частные производные ЦФ по x_1 и x_2: $\dfrac{\partial F}{\partial x_1} = c_1$, $\dfrac{\partial F}{\partial x_2} = c_2$. Частные производные ЦФ c_1 и c_2 показывают скорость ее возрастания вдоль осей Ox_1 и Ox_2 соответственно.

Вектор $\vec{c} = (c_1, c_2)$ называется **градиентом** функции и показывает направление наискорейшего возрастания.

Вектор $-\vec{c} = (-c_1, -c_2)$ называется **антиградиентом** функции и показывает направление наискорейшего убывания.

Векторы $\vec{c}$ и $-\vec{c}$ перпендикулярны прямым $c_1 x_1 + c_2 x_2 = F$.

Из геометрической интерпретации следует алгоритм графического метода решения:

1) с учетом системы ограничений строим область допустимых решений;
2) строим вектор наискорейшего возрастания ЦФ – вектор градиентного направления $\vec{c}$;
3) проводим произвольную линию уровня $F = F_0$ (проще провести $F = 0$), перпендикулярную вектору $\vec{c}$;

4) при решении задачи на максимум перемещаем линию уровня $F = 0$ в направлении вектора $\vec{c}$ до крайней точке ОДР, в случае решения задачи на минимум линию уровня перемещаем в антиградиентном направлении;

5) определяем оптимальный план $X^* = (x_1^*, x_2^*)$ и экстремальное значение ЦФ $\max(\min)F = f(X^*)$.

Свойства решений задач ЛП

Рассмотрим задачу ЛП в векторном виде:

$$\max F = CX,$$
$$A_1 x_1 + A_2 x_2 + \ldots + A_n x_n = B,$$
$$X \geq 0.$$

Будем считать, что базис составляют первые m векторов $A_1, A_2, ..., A_m$. Этому базису соответствуют БП $x_1, x_2, ..., x_m$, а свободными будут переменные $x_{m+1}, x_{m+2}, ..., x_n$.

Теорема. *Если система векторов $A_1, A_2, ..., A_n$ содержит m линейно–независимых векторов $A_1, A_2, ..., A_m$, то допустимое решение вида*

$$X = (x_1, x_2, ..., x_m, 0, ..., 0), \; x_j > 0, \; j = \overline{1, m}, \tag{10.20}$$

является крайней точкой многогранника планов.

Доказательство. Т.к. векторы $A_1, A_2, ..., A_m$ линейно независимы, то вектор B может быть выражен через них единственным образом:

$$A_1 x_1 + A_2 x_2 + ... + A_m x_m = B. \tag{10.21}$$

Предположим, что точка (10.21) не является крайней. Тогда ее можно представить как выпуклую линейную комбинацию двух других различных крайних точек X_1 и X_2 многогранника планов:

$$X = \lambda_1 X_1 + \lambda_2 X_2, \; \lambda_1 > 0, \; \lambda_2 > 0, \; \lambda_1 + \lambda_2 = 1, \tag{10.22}$$

где $X_1 = (x_1^1, x_2^1, ..., x_m^1, x_{m+1}^1, ..., x_n^1)$, $X_2 = (x_1^2, x_2^2, ..., x_m^2, x_{m+1}^2, ..., x_n^2)$.

Подставив в (10.22) координаты точек X_1 и X_2, получим:

$$(x_1, x_2, ..., x_m, 0, ..., 0) = \lambda_1 (x_1^1, x_2^1, ..., x_m^1, x_{m+1}^1, ..., x_n^1) + \lambda_2 (x_1^2, x_2^2, ..., x_m^2, x_{m+1}^2, ..., x_n^2).$$

Отсюда:

$$x_1 = \lambda_1 x_1^1 + \lambda_2 x_1^2,\; x_2 = \lambda_1 x_2^1 + \lambda_2 x_2^2,\; \ldots,\; x_m = \lambda_1 x_m^1 + \lambda_2 x_m^2,$$
$$x_{m+1} = \lambda_1 x_{m+1}^1 + \lambda_2 x_{m+1}^2 = 0,\; \ldots,\; x_n = \lambda_1 x_n^1 + \lambda_2 x_n^2 = 0.$$

Так как $x_j > 0$, $j = \overline{1,m}$, и $\lambda_1 > 0$, $\lambda_2 > 0$, то отсюда следует что $x_j^1 > 0$, $x_j^2 > 0$, $j = \overline{1,m}$. Так как $x_j = 0$, $j = \overline{m+1,n}$, и $\lambda_1 > 0$, $\lambda_2 > 0$, следует, что $x_j^1 = 0,\; x_j^2 = 0,\; j = \overline{m+1,n}$. Получили, что точки X_1 и X_2 имеют ту же структуру, что и точка *X*, т.е.:

$$X_1 = (x_1^1, x_2^1, ..., x_m^1, 0, ..., 0),\, X_2 = (x_1^2, x_2^2, ..., x_m^2, 0, ..., 0). \qquad (10.23)$$

Поскольку (10.23) допустимые решения, то они должны удовлетворять векторному равенству (10.21):

$$A_1 x_1{}^1 + A_2 x_2{}^1 + ... + A_m x_m{}^1 = B,$$
$$A_1 x_1{}^2 + A_2 x_2{}^2 + ... + A_m x_m{}^2 = B.$$

Вычтем из первого уравнения второе, получим:

$$A_1 (x_1{}^1 - x_1{}^2) + A_2 (x_2{}^1 - x_2{}^2) + ... + A_m (x_m{}^1 - x_m{}^2) = 0. \qquad (10.24)$$

Т.к. векторы $A_1, A_2, ..., A_m$ – линейно независимы, то равенство (10.24) выполняется при условии $x_1^1 = x_1^2,\; x_2^1 = x_2^2,\; \ldots,\; x_m^1 = x_m^2$, т.е. $X_1 = X_2$. Пришли к противоречию: точку X невозможно представить как выпуклую комбинацию двух различных крайних точек многогранника решений, следовательно точка X – крайняя точка многогранника решений.

<u>Основная теорема ЛП</u>

Теорема. *Если задача ЛП имеет решение, то ЦФ достигает экстремального значения хотя бы в одной из крайних точек многогранника решений. Если же ЦФ достигает экстремального значения более чем в одной крайней точке, то она достигает того же значения в любой точке, являющейся их выпуклой линейной комбинацией.*

Доказательство. Пусть X^* – допустимое решение, в котором ЦФ достигает своего, например, максимального значения, т.е. $\max F = f(X^*)$, тогда

$$f(X^*) \geq f(X\ \ ), \quad X \in ОДР. \tag{10.25}$$

Если X^* совпадает с одной из крайних точек, то первая часть теоремы доказана.

Предположим, что X^* не является крайней точкой многогранника решений. Тогда X^* можно представить в виде выпуклой линейной комбинации крайних точек $X_1, X_2,..., X_k$:

$$X^* = \sum_{i=1}^{k} \lambda_i X_i,\ \lambda_i > 0,\ i = \overline{1,k},\ \sum_{i=1}^{k} \lambda_i = 1.$$

В силу линейности функции f имеем:

$$f(X^*) = \lambda_1 f(X_1) + \lambda_2 f(X_2) + ... + \lambda_k f(X_k). \tag{10.26}$$

Обозначим через M максимальное значение ЦФ среди всех крайних точек, т.е.

$$M = \max(f(X_1), f(X_2),..., f(X_k)). \tag{10.27}$$

Из равенства (10.26) в силу условия (10.27) имеем:

$$f(X^*) \leq \lambda_1 M + \lambda_2 M + ... + \lambda_k M = M \text{, или } \ f(X^*) \leq M. \tag{10.28}$$

Из неравенств (10.25) и (10.28) приходится сделать единственный вывод, что $f(X^*) = M$. Но M – значение ЦФ в одной из крайних точек, поэтому X^* совпадает с одной из них. Первая часть теоремы доказана.

Для доказательства второй части теоремы допустим, что f достигает максимального значения более чем в одной крайней точке, например в точках $X_1, X_2,..., X_k$, т.е.

$$f(X_1) = f(X_2) = ... = f(X_k) = M. \tag{10.29}$$

Составим выпуклую линейную комбинацию этих точек:

$$X = \sum_{i=1}^{k} \lambda_i X_i, \ \lambda_i > 0, \ i = \overline{1,k}, \ \sum_{i=1}^{k} \lambda_i = 1.$$

Учитывая условие (10.29) и линейность функции f, получаем:

$$f(X) = \lambda_1 f(X_1) + \lambda_2 f(X_2) + ... + \lambda_m f(X_m) = \lambda_1 M + \lambda_2 M + ... + \lambda_m M = M,$$

т.е. линейная функция f принимает максимальное значение в произвольной точке X, являющейся выпуклой линейной комбинацией крайних точек $X_1, X_2, ..., X_k$, в которой ЦФ принимает максимальное значение.

Симплексный метод. Построение начального опорного плана

Пусть задача ЛП представлена системой основных ограничений в каноническом виде:

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j = b_i, \ b_i \geq 0, \ i = \overline{1,m}.$$

Говорят, что ограничение–равенство имеет **предпочтительный вид**, если при неотрицательности правой части левая часть содержит переменную с коэффициентом равным единице, а в остальные ограничения эта переменная входит с коэффициентом равным нулю.

Система ограничений имеет **предпочтительный вид**, если каждое ограничение–равенство имеет предпочтительный вид.

В этом случае легко найти ее **опорное** решение (базисное с неотрицательными координатами): все свободные переменные нужно приравнять нулю, а предпочтительные переменные (базисные) свободным членам.

Пусть система основных ограничений имеет вид:

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j \leq b_i, \ b_i \geq 0, \ i = \overline{1,m}.$$

Сведем задачу к каноническому виду, для этого добавим к левым частям неравенств дополнительные неотрицательные переменные $x_{n+i} \geq 0$, $i = \overline{1,m}$. Получим систему, эквивалентную исходной вида:

$\sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j + x_{n+i} = b_i,\ \ b_i \ge 0,\ \ i = \overline{1, m}$, которая имеет предпочтительный вид. И, следовательно, начальный опорный план запишется в виде: $X_0 = (\underbrace{0,\ 0,\ ...,\ 0}_{n},\ \underbrace{b_1,\ b_2,\ ...,\ b_m}_{m})$.

В ЦФ, как отмечалось выше, дополнительные переменные вводятся с коэффициентами, равными нулю, т.е. $c_{n+i} = 0,\ \ i = \overline{1, m}$.

Симплексная таблица. Признак оптимальности опорного плана

Задачу ЛП, как было показано выше, можно преобразовать к виду:

$$\max(\min) F = \Delta_0 - \sum_{j=m+1}^{n} \Delta_j x_j\ , \tag{10.30}$$

$$\sum_{j=m+1}^{n} \alpha_{ij} x_j \le \beta_i,\ \ \beta_i \ge 0,\ \ i = \overline{1, m}\,, \tag{10.31}$$

$$x_j \ge 0,\ \ \ j = \overline{1, n}\,, \tag{10.32}$$

где $\Delta_0 = c_Б B,\ \ \Delta_j = c_Б A_j - c_j,\ \ \ j = \overline{m+1, n}$.

Для решения задачу (10.30)–(10.32) записывают в **симплексную** таблицу:

БП	1	СП			
		$-x_{m+1}$	$-x_{m+2}$	$\ldots$	$-x_n$
$x_1 =$	β_1	$\alpha_{1,m+1}$	$\alpha_{1,m+2}$	$\ldots$	$\alpha_{1,n}$
$x_2 =$	β_2	$\alpha_{2,m+1}$	$\alpha_{2,m+2}$	$\ldots$	$\alpha_{2,n}$
$\ldots$	$\ldots$	$\ldots$	$\ldots$	$\ldots$	$\ldots$
$x_m =$	β_m	$\alpha_{m,m+1}$	$\alpha_{m,m+2}$	$\ldots$	$\alpha_{m,n}$
F	Δ_0	Δ_{m+1}	Δ_{m+2}	$\ldots$	Δ_n

Последнюю строку называют **индексной строкой (строкой ЦФ)**, число $\Delta_0 = f(X_0) = c_Б B$ – значение ЦФ для начального опорного плана X_0. Числа $\Delta_j = c_Б A_j - c_j,\ \ \ j = \overline{m+1, n}$ называют **оценками свободных переменных**.

Теорема. *Пусть исходная задача решается на максимум. Если для некоторого опорного плана все оценки* $\Delta_j \geq 0,\ j = \overline{1,n}$, *то такой план оптимальный.*

Доказательство. Так как $F = \Delta_0 - \sum_{j=m+1}^{n} \Delta_j x_j$ и по условию $\Delta_j \geq 0,\ j = \overline{1,n}$, то F достигает максимального значения при $\sum_{j=m+1}^{n} \Delta_j x_j = 0$**.** Это возможно лишь при $x_{m+1} = x_{m+2} = \ldots x_n = 0$, т.е. опорный план $(\underbrace{\beta_1,\ \beta_2,\ ...,\ \beta_m}_{m},\ \underbrace{0,\ 0,\ ...,\ 0}_{n-m})$ оптимальный.

Теорема. *Пусть исходная задача решается на минимум. Если для некоторого опорного плана все оценки* $\Delta_j \leq 0,\ j = \overline{1,n}$, *то такой план оптимален.*

Переход к нехудшему опорному плану

Пусть решается задача ЛП с системой ограничений в предпочтительном виде:

$$x_i + \sum_{j=m+1}^{n} \alpha_{ij} x_j = \beta_i,\ \beta_i \geq 0,\ i = \overline{1,m}. \tag{10.33}$$

Ее начальный опорный план имеет вид $X_0 = (\beta_1, \beta_2, ..., \beta_m, 0, 0, ..., 0)$, для которого значение ЦФ $f(X_0) = c_Б B = \Delta_0$.

Например, рассмотрим задачу на максимум. Если $\Delta_j \geq 0,\ j = \overline{1,n}$, то опорный план X_0 оптимальный. Пусть существует индекс j_0, для которого $\Delta_{j_0} < 0$. Вектор–столбец A_{j_0} называется **разрешающим**, а переменная x_{j_0} – **перспективной**. Не изменяя нулевых значений свободных переменных, кроме x_{j_0}, увеличим значение ЦФ.

Из системы ограничений (10.33) в силу того, что $x_{m+1} = ... = x_{j_0 - 1} = x_{j_0 + 1} = ... = x_n = 0$, а $x_{j_0} > 0$, имеем $x_i = \beta_i - \alpha_{ij_0} x_{j_0}$, $i = \overline{1,m}$. Следовательно, увеличивать x_{j_0} следует осторожно, так как ее значение влияет на значения $x_1, x_2, ..., x_m$, которые должны быть неотрицательными. При значительном увеличении x_{j_0} может случиться, что для некоторого индекса i соответствующее β_i станет меньше произведения $\alpha_{ij_0} x_{j_0}$, и, следовательно, получим $x_i < 0$, что недопустимо. В случае, если $\alpha_{ij_0} \le 0,\ i = \overline{1,m}$, такого нарушения не произойдет.

Будем считать, что, например, первые k коэффициентов $\alpha_{ij_0} > 0,\ i = \overline{1,k},\ k \le m$. Тогда x_{j_0} можно увеличивать до тех пор, пока $\beta_i - \alpha_{ij_0} x_{j_0} \ge 0,\ i = \overline{1,k}$, откуда имеем:

$$x_{j_0} \le \beta_i / \alpha_{ij_0},\ \ \alpha_{ij_0} > 0,\ i = \overline{1,k}.$$

Найдем среди отношений $\beta_i / \alpha_{ij_0},\ i = \overline{1,k}$ наименьшее. Назовем его **наименьшим симплексным отношением** и обозначим буквой θ, т.е.

$$x_{j_0} = \min(\beta_i / \alpha_{ij_0}) = \beta_{i_0} / \alpha_{i_0 j_0} = \theta.$$

Если это условие выполняется при нескольких индексах i, то в качестве i_0 можно выбрать любое. Строку с номером i_0 называют **разрешающей**, элемент же $\alpha_{i_0 j_0}$ – **разрешающим**. Переменная x_{i_0}, присутствующая в базисе, является **неперспективной**, ее следует вывести из базиса.

Полагая $x_{m+1} = ... = x_{j_0 - 1} = 0,\ x_{j_0} = \theta,\ x_{j_0+1} = ... x_n = 0$, из равенства (10.33) находим:

$$x_1 = \beta_1 - \alpha_{1j_0}\theta,\ ...,\ x_{i_0-1} = \beta_{i_0-1} - \alpha_{i_0-1,j_0}\theta,$$
$$x_{i_0} = 0,$$
$$x_{i_0+1} = \beta_{i_0+1} - \alpha_{i_0+1,j_0}\theta,\ ...,\ x_m = \beta_m - \alpha_{mj_0}\theta.$$

Новый базис будет состоять из переменных $x_1,\ x_2,\ ...,\ x_{i_0-1},\ x_{j_0},\ x_{i_0+1},\ ...,\ x_{j_0-1},\ x_{i_0},\ x_{j_0+1},\ ...,\ x_n$, а соответствующий ему опорный план:

$$X_1 = (\beta_1 - \alpha_{1j_0}\theta,\ ...,\ \beta_{i_0-1} - \alpha_{i_0-1,j_0}\theta,\ 0,\ \beta_{i_0+1} - \alpha_{i_0+1,j_0}\theta,$$
$$...,\ \beta_m - \alpha_{mj_0}\theta,\ 0,\ ...,\ 0,\ \theta,\ 0,\ ...,\ 0).$$

В результате преобразований получен новый опорный план X_1, в котором переменная x_{i_0} заменена на x_{j_0}, причем $f(X_1) = \Delta_0 - \Delta_{j_0}\theta = f(X_0) - \Delta_{j_0}\theta$. Но $\Delta_{j_0} < 0$, следовательно, $f(X_1) > f(X_0)$

. Новый план X_1 не хуже начального X_0. Далее процесс повторяется. Проверяем, является ли план X_1 оптимальным. Если да, то задача решена. Если нет, то переходим к не худшему опорному плану X_2 и т.д.

Симплексные преобразования

Чтобы завершить шаг преобразований, ведущих к новому опорному плану в новом базисе, выразим новую базисную переменную x_{j_0} из уравнения с номером i_0 системы (10.33) через свободные переменные $x_{m+1},\ \ldots,\ x_{j_0-1},\ x_{i_0},\ x_{j_0+1},\ \ldots,\ x_n$:

$$x_{j_0}=\frac{\beta_{i_0}}{\alpha_{i_0 j_0}}-\left(\frac{\alpha_{i_0,m+1}}{\alpha_{i_0 j_0}}x_{m+1}+\ldots+\frac{\alpha_{i_0,j_0-1}}{\alpha_{i_0 j_0}}x_{j_0-1}+\frac{1}{\alpha_{i_0 j_0}}x_{i_0}+\right.$$
$$\left.+\frac{\alpha_{i_0,j_0+1}}{\alpha_{i_0 j_0}}x_{j_0+1}+\ldots+\frac{\alpha_{i_0 n}}{\alpha_{i_0 j_0}}x_n\right). \qquad (10.34)$$

Подставим выражение (10.34) в остальные ограничения (10.33), получим:

$$x_i=\frac{\beta_i\alpha_{i_0 j_0}-\beta_{i_0}\alpha_{ij_0}}{\alpha_{i_0 j_0}}-\left(\frac{\alpha_{i,m+1}\alpha_{i_0 j_0}-\alpha_{i_0,m+1}\alpha_{i\ j_0}}{\alpha_{i_0 j_0}}x_{m+1}+\ldots-\frac{\alpha_{ij_0}}{\alpha_{i_0 j_0}}x_{i_0}+\right.$$
$$\left.+\ldots+\frac{\alpha_{in}\alpha_{i_0 j_0}-\alpha_{i_0 n}\alpha_{i\ j_0}}{\alpha_{i_0 j_0}}x_n\right),\quad i=\overline{1,m},\quad i\neq i_0. \qquad (10.35)$$

Аналогично, подставив выражение (10.34) в ЦФ (10.30), получим:

$$F=\frac{\Delta_0\alpha_{i_0 j_0}-\Delta_{j_0}\beta_{i_0}}{\alpha_{i_0 j_0}}-\left(\frac{\Delta_{m+1}\alpha_{i_0 j_0}-\Delta_{j_0}\alpha_{i,m+1}}{\alpha_{i_0 j_0}}x_{m+1}+\ldots-\frac{\Delta_{j_0}}{\alpha_{i_0 j_0}}x_{i_0}+\right.$$
$$\left.+\ldots+\frac{\Delta_n\alpha_{i_0 j_0}-\Delta_{j_0}\alpha_{i_0 n}}{\alpha_{i_0 j_0}}x_n\right). \qquad (10.36)$$

Преобразование задачи ЛП к новому базису назовем **симплексным преобразованием**. Из равенств (10.34)–(10.36) вытекают правила для перехода к следующей симплексной таблице.

1) Из выражения (10.34) следует, что элемент новой таблицы, стоящий на месте разрешающего элемента заменяется обратной величиной:

$$\alpha'_{i_0 j_0} = \frac{1}{\alpha_{i_0 j_0}}.$$

2) Из выражения (10.34) следует, что оставшиеся элементы разрешающей строки i_0 новой таблицы равны соответствующим элементам разрешающей строки старой таблицы, деленным на разрешающий элемент:

$$\beta'_{i_0} = \frac{\beta_{i_0}}{\alpha_{i_0 j_0}}, \quad \alpha'_{i_0 j} = \frac{\alpha_{i_0 j}}{\alpha_{i_0 j_0}}, \quad j = \overline{m+1, n}, \quad j \neq j_0.$$

3) Из выражений (10.35) и (10.36) следует, что оставшиеся элементы разрешающего столбца j_0 новой таблицы равны соответствующим элементам разрешающего столбца старой таблицы, деленным на разрешающий элемент и изменением знака на противоположный:

$$\Delta'_{j_0} = -\frac{\Delta_{j_0}}{\alpha_{i_0 j_0}}, \quad \alpha'_{i j_0} = -\frac{\alpha_{i j_0}}{\alpha_{i_0 j_0}}, \quad i = \overline{1, m}, \quad i \neq i_0.$$

4) Из выражения (10.35) и (10.36) следует, что любой другой элемент симплексной таблицы находится по правилу прямоугольника – для получения любого элемента новой симплексной таблицы нужно из соответствующего элемента прежней таблицы вычесть произведение элемента разрешающей строки на элемент разрешающего столбца, разделенное на разрешающий элемент:

$$\beta'_i = \beta_i - \frac{\beta_{i_0}\alpha_{i j_0}}{\alpha_{i_0 j_0}}, \quad \Delta'_0 = \Delta_0 - \frac{\Delta_{j_0}\beta_{i_0}}{\alpha_{i_0 j_0}}, \quad \Delta'_j = \Delta_j - \frac{\Delta_{j_0}\alpha_{i_0 j}}{\alpha_{i_0 j_0}}, \quad \alpha'_{ij} = \alpha_{ij} - \frac{\alpha_{i_0 j}\alpha_{i j_0}}{\alpha_{i_0 j_0}},$$
$$i = \overline{1, m}, \quad j = \overline{m+1, n}, \quad i \neq i_0, \quad j \neq j_0.$$

<u>Признак бесконечности множества оптимальных планов</u>

Теорема. *Если в индексной строке последней симплексной таблицы, содержащей оптимальный план, имеется хотя бы одна нулевая оценка, соответствующая свободной переменной, то задача ЛП имеет бесконечное множество оптимальных планов.*

Доказательство. Пусть в оптимальной плане $\Delta_{j_0} = 0$, где j_0 принадлежит множеству индексов свободных переменных, а минимальное симплексное отношение соответствует строке с индексом i_0. Тогда, введя переменную x_{j_0} в базис, получим новое значение ЦФ:

$$\Delta_0^{'} = \Delta_0 - \frac{\beta_{i_0}^{*}\Delta_{j_0}}{\alpha_{i_0 j_0}} = \Delta_0 - \frac{\beta_{i_0}^{*}\cdot 0}{\alpha_{i_0 j_0}} = \Delta_0 .$$

Значение ЦФ при переходе к новому опорному плану не изменилось.

Если нулевых небазисных оценок в последней симплексной таблице окажется несколько, то, введя каждую из соответствующих переменных в базис, найдем оптимальные планы $X_1^*, X_2^*,..., X_k^*$, для которых значение ЦФ будет одно и то же, т.е. $f(X_1^*) = f(X_2^*) = ... = f(X_k^*)$.

Согласно второй части основной теоремы ЛП, в этом случае оптимальным будет любой план, являющийся линейной комбинацией, т.е. общее решение примет вид:

$$X^* = \lambda_1 X_1^* + \lambda_2 X_2^* + ... + \lambda_k X_k^*,\ \ \lambda_1 + \lambda_2 + ... + \lambda_k = 1,\ \ \lambda_i > 0,\ \ i = \overline{1,k} .$$

Эта формула определяет бесконечное множество оптимальных планов.

Следствие. *Если в индексной строке симплексной таблицы, содержащей оптимальный план, все оценки свободных переменных положительны, то найденный оптимальный план единственный.*

Признак неограниченности ЦФ

Теорема. *Если в индексной строке симплексной таблицы задачи ЛП на максимум содержится отрицательная оценка $\Delta_{j_0} < 0$, а в соответствующем столбце переменной x_{j_0} нет ни одного положительного элемента, то ЦФ на множестве допустимых планов задачи не ограничена сверху.*

Доказательство. Пусть $\Delta_{j_0} < 0$. Тогда, можно попытаться, не изменяя нулевых значений СП x_{m+1}, x_{m+2}, ..., x_n в равенствах (10.30), кроме x_{j_0}, увеличить значение ЦФ. Полагая в равенстве (10.31) все x_j, кроме x_{j_0}, равными нулю, получим $x_i = \beta_i - \alpha_{ij_0} x_{j_0}$, $i = \overline{1,m}$. Так как $x_i \ge 0$, то $\beta_i - \alpha_{ij_0} x_{j_0} \ge 0,\ \ i = \overline{1,m}$.

Пусть все $\alpha_{ij_0} \le 0$, тогда при любом $x_{j_0} \ge 0$, имеем $x_i \ge 0$. Что касается ЦФ, то, взяв в качестве x_{j_0} достаточно большое положительное число, вследствие того, что $\Delta_{j_0} < 0$, можно сделать значение $F = \Delta_0 - (\Delta_{m+1}x_{m+1} + ... + \Delta_{j_0}x_{j_0} + ... + \Delta_n x_n)$ как угодно большим.

В самом деле, так как $\Delta_{j_0} < 0$, при $x_{j_0} \to \infty$ имеем $F = \Delta_0 - \Delta_{j_0}x_{j_0} \to \infty$, т.е. ЦФ не ограничена сверху.

Теорема. *Если в индексной строке симплексной таблицы задачи ЛП на минимум содержится положительная оценка* $\Delta_{j_0} > 0$, *а в соответствующем столбце переменной* x_{j_0} *нет ни одного положительного элемента, то ЦФ на множестве допустимых планов задачи не ограничена снизу.*

Теория двойственности.

Рассмотрим задачу линейного программирования вида:

$$\max F = c_1x_1 + c_2x_2 + ... + c_nx_n,$$
$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + ... + a_{1n}x_n \le b_1, \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots, \\ a_{k,1}x_1 + a_{k,2}x_2 + ... + a_{k,n}x_n \le b_k, \\ a_{k+1,1}x_1 + a_{k+1,2}x_2 + ... + a_{k+1,n}x_n = b_{k+1}, \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots, \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + ... + a_{mn}x_n = b_m, \end{cases}$$
$$x_j \ge 0, \quad j = \overline{1,l},$$
$$x_j \ - \ \textit{произвольные}, \quad j = \overline{l+1,n}.$$

Двойственной по отношению к исходной задаче называется задача:

$$\min \varphi = b_1y_1 + b_2y_2 + ... + b_my_m,$$
$$\begin{cases} a_{11}y_1 + a_{21}y_2 + ... + a_{m1}y_m \ge c_1, \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots, \\ a_{1,l}y_1 + a_{2,l}y_2 + ... + a_{m,l}x_n \ge c_l, \\ a_{1,l+1}y_1 + a_{2,l+1}y_2 + ... + a_{m,l+1}x_n = c_{l+1}, \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots, \\ a_{1n}y_1 + a_{2n}y_2 + ... + a_{mn}x_n = c_n, \end{cases}$$
$$y_i \ge 0, \quad i = \overline{1,k},$$
$$y_i \ - \ \textit{произвольные}, \quad i = \overline{k+1,m}.$$

Сравнивая две задачи, видно, что двойственная задача составляется по следующим правилам:

1) если в прямой задаче ЦФ задается на максимум, то в двойственной задаче на минимум и наоборот;

2) число переменных исходной задачи равно числу основных ограничений в системе двойственной задачи, а число ограничений прямой задачи – числу переменных в двойственной задаче;

3) коэффициентами при неизвестных в ЦФ двойственной задачи являются свободные члены прямой задачи, а правыми частями в основных ограничениях двойственной задачи – коэффициенты при неизвестных в ЦФ прямой задачи;

4) матрица, составленная из коэффициентов при неизвестных в системе ограничений прямой задачи, и аналогичная матрица в двойственной задаче получаются друг из друга транспонированием;

5) если переменная прямой задачи $x_j \geq 0$, то *j*–ое ограничение в системе основных ограничений двойственной задачи является неравенством вида $\geq$, если же переменная x_j прямой задачи может принимать любые значения, то *j*–ое ограничение в системе основных ограничений двойственной задачи является уравнением и, наоборот, если *i*–ое ограничение в системе основных ограничений прямой задачи является неравенством, то переменная двойственной задачи $y_i \geq 0$, если же *i*–ое ограничение – уравнение, то переменная y_i может принимать любые значения.

Основное неравенство теории двойственности

Рассмотрим пару симметричных двойственных задач:

$$\begin{aligned} &\max F = \sum_{j=1}^{n} c_j x_j, \\ &\sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j \leq b_i, \quad i = \overline{1,m}, \\ &x_j \geq 0, \quad j = \overline{1,n}. \end{aligned} \tag{10.37}$$

$$\begin{aligned} &\min \varphi = \sum_{i=1}^{m} b_i y_i, \\ &\sum_{i=1}^{m} a_{ij} y_i \geq c_j, \quad j = \overline{1,n}, \\ &y_i \geq 0, \quad i = \overline{1,m}. \end{aligned} \tag{10.38}$$

Теорема. *Для любых допустимых планов* $X=(x_1,x_2,...,x_n)$ *и* $Y=(y_1,y_2,...,y_m)$ *прямой и двойственной задач ЛП справедливо неравенство:*

$$F(X)\le\varphi(Y),\ \text{т.е.}\ \sum_{j=1}^{n}c_jx_j\le\sum_{i=1}^{m}b_iy_i\ .$$

Доказательство. Учитывая неравенства (10.37) и (10.38), получаем:

$$F(X)=\sum_{j=1}^{n}c_jx_j\overset{(4.2)}{\le}\sum_{j=1}^{n}\left(\sum_{i=1}^{m}a_{ij}y_i\right)x_j=\sum_{i=1}^{m}\left(\sum_{j=1}^{n}a_{ij}x_j\right)y_i\overset{(4.1)}{\le}\sum_{i=1}^{m}b_iy_i=\varphi(Y).$$

Экономическое содержание теоремы. *Для любого допустимого плана производства X и любого допустимого вектора оценок ресурсов Y общая созданная стоимость не превосходит суммарной оценки ресурсов.*

<u>Критерий оптимальности Канторовича</u>

Теорема. *Если для некоторых допустимых планов* X^* *и* Y^* *пары двойственных задач выполняется равенство* $F(X^*)=\varphi(Y^*)$, *то* X^* *и* Y^* *являются оптимальными планами соответствующих задач.*

Доказательство.

Согласно основному неравенству теории двойственности для любого допустимого плана X прямой задачи и допустимого плана Y^* двойственной справедливо неравенство $F(X)\le\varphi(Y^*)$. По условию $F(X^*)=\varphi(Y^*)$. Отсюда в силу транзитивности отношений «$\le$» и «=» получим $F(X)\le F(X^*)$. Но так как X произвольный допустимый план, то $F(X^*)=\max F$, т.е. X^* – оптимальный план прямой задачи ЛП.

Аналогично доказывается, что план Y^* является оптимальным для двойственной задачи.

Экономическое содержание теоремы. *План производства* X^* *и вектор оценок ресурсов* Y^* *являются оптимальными, если цена всей произведенной продукции и суммарная оценка ресурсов совпадают.*

4.4. Малая теорема двойственности

Теорема. *Для существования оптимального плана любой из пары двойственных задач необходимо и достаточно существование допустимого плана для каждой из них.*

Доказательство. *Необходимость.* Пусть задачи двойственной пары имеют оптимальные планы X^* и Y^*. Это значит, что $F(X^*) = \max F$ и $\varphi(Y^*) = \min \varphi$, т.е. X^* и Y^* принадлежат области их допустимых планов. Следовательно, соответствующие системы ограничений пары двойственных задач совместны, они имеют хотя бы по одному допустимому плану X^*и Y^*. Необходимость доказана.

Достаточность. Пусть каждая из пары двойственных задач имеет допустимый план. Докажем, что они имеют оптимальные планы. Пусть Y^*– допустимый план двойственной задачи. Тогда для любого допустимого плана X прямой задачи, согласно основному неравенству теории двойственности, получим:

$$F(X) \le \varphi(Y^*). \tag{10.39}$$

Решая прямую задачу симплексным методом, получаем последовательность опорных планов $X_0, X_1, \ldots$, для которых $F(X_0), F(X_1), \ldots$. В силу неравенства (10.3) эта последовательность ограничена сверху. В ней найдется наибольшее значение целевой функции. Следовательно, существует допустимый план X^*, для которого $F(X) \le F(X^*)$. Аналогично доказывается, что $\varphi(Y) \ge \varphi(Y^*)$.

<u>Основные теоремы двойственности</u>

Теорема 1. *Если одна из пары двойственных задач имеет оптимальное решение, то и другая имеет оптимальное решение, причем экстремальные значения целевых функций равны, т.е.* $F(X^*) = \varphi(Y^*)$. *Если одна из пары двойственных задач неразрешима вследствие неограниченности целевой функции на множестве допустимых решений, то система ограничений другой задачи противоречива.*

Рассмотрим пару симметричных двойственных задач в развернутом виде:

$$\max F = c_1x_1 + c_2x_2 + \ldots + c_nx_n,\qquad \min \varphi = b_1y_1 + b_2y_2 + \ldots + b_my_m,$$

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n \le b_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n \le b_2, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots, \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \ldots + a_{mn}x_n \le b_m, \end{cases}\qquad \begin{cases} a_{11}y_1 + a_{21}y_2 + \ldots + a_{m1}y_m \ge c_1, \\ a_{12}y_1 + a_{22}y_2 + \ldots + a_{m2}y_m \ge c_2, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots, \\ a_{1n}y_1 + a_{2n}y_2 + \ldots + a_{mn}y_m \ge c_n, \end{cases}$$

$$x_j \ge 0,\quad j = \overline{1,n}.\qquad y_i \ge 0,\quad i = \overline{1,m}.$$

Вводя дополнительные переменные $x_i \ge 0,\ i = \overline{1,m}$, в прямую задачу и $y_j \ge 0,\ \ j = \overline{1,n}$, в двойственную, приводим задачи к каноническому виду:

$$\max F = c_1x_1 + c_2x_2 + \ldots + c_nx_n,$$
$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n + x_{n+1} = b_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n + x_{n+2} = b_2, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots, \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \ldots + a_{mn}x_n + x_{n+m} = b_m, \end{cases}$$
$$x_j \ge 0,\quad j = \overline{1,n+m}.$$

$$\min \varphi = b_1y_1 + b_2y_2 + \ldots + b_my_m,$$
$$\begin{cases} a_{11}y_1 + a_{21}y_2 + \ldots + a_{m1}y_m - y_{m+1} = c_1, \\ a_{12}y_1 + a_{22}y_2 + \ldots + a_{m2}y_m - y_{m+2} = c_2, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots, \\ a_{1n}y_1 + a_{2n}y_2 + \ldots + a_{mn}y_m - y_{m+n} = c_n, \end{cases}$$
$$y_i \ge 0,\quad i = \overline{1,m+n}.$$

Между переменными двойственных задач можно установить соответствие: сопоставляя базисным переменным одной задачи свободные переменные другой, и наоборот:

$$\begin{array}{cccccccc} & \mathit{СП} & & & & \mathit{БП} & & \\ x_1 & x_2 & \cdots & x_n & x_{n+1} & x_{n+2} & \cdots & x_{n+m} \\ \updownarrow & \updownarrow & \updownarrow & \updownarrow & \updownarrow & \updownarrow & \updownarrow & \updownarrow \\ y_{m+1} & y_{m+2} & \cdots & y_{m+n} & y_1 & y_2 & \cdots & y_m \\ & \mathit{БП} & & & & \mathit{СП} & & \end{array}$$

Используя данное соответствие, зная решение прямой задачи, можно найти решение двойственной задачи. Оно находится в индексной строке последней симплексной таблицы при решении прямой задачи симплексным методом.

Экономическое содержание теоремы. *Если разрешима задача определения оптимального плана, максимизирующего выпуск продукции, то разрешима и задача определения оценок ресурсов, причем цена произведенной продукции и суммарная оценка ресурсов совпадают. Совпадение значений целевых функций для соответствующих планов пары двойственных задач достаточно для того, чтобы эти планы были оптимальными.*

Теорема 2 (о дополняющей нежесткости). *Для того, чтобы планы* X^* *и* Y^* *пары двойственных задач были оптимальными, необходимо и достаточно выполнение условий:*

$$x_j^*\left(\sum_{i=1}^{m} a_{ij} y_i^* - c_j\right) = 0, \quad j = \overline{1,n}, \quad (10.40) \qquad y_i^*\left(\sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j^* - b_i\right) = 0, \quad i = \overline{1,m}. \quad (10.41)$$

Доказательство.

Необходимость. Пусть X^* и Y^*– оптимальные планы пары двойственных задач вида:

$$\max F = \sum_{j=1}^{n} c_j x_j, \qquad\qquad \min \varphi = \sum_{i=1}^{m} b_i y_i,$$

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j = b_i, \quad i = \overline{1,m}, \quad (4.6) \qquad\qquad \sum_{i=1}^{m} a_{ij} y_i \ge c_j, \quad j = \overline{1,n},$$

$$x_j \ge 0, \quad j = \overline{1,n}. \qquad\qquad y_i \ge 0, \quad i = \overline{1,m}.$$

Согласно предыдущей теореме, для этих планов значения ЦФ совпадают:

$$F(X^*) = \varphi(Y^*) \text{ или } \sum_{j=1}^{n} c_j x_j^* = \sum_{i=1}^{m} b_i y_i^* . \qquad (10.42)$$

Подставим в (4.7) b_i из равенства (4.6), получим:

$$\sum_{j=1}^{n} c_j x_j^* = \sum_{i=1}^{m}\left(\sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j^*\right) y_i^* = \sum_{j=1}^{n} x_j^* \sum_{i=1}^{m} a_{ij} y_i^* ,$$

откуда

$$\sum_{j=1}^{n} x_j^* \sum_{i=1}^{m} a_{ij} y_i^* - \sum_{j=1}^{n} c_j x_j^* = \sum_{j=1}^{n} x_j^* \left(\sum_{i=1}^{m} a_{ij} y_i^* - c_j\right) = 0 . \qquad (10.43)$$

Поскольку $x_j^* \geq 0$ и $\sum_{i=1}^{m} a_{ij} y_i^* - c_j \geq 0$, $j = \overline{1,n}$, то из равенства (10.8) следуют условия (10.4). Условия (10.41) доказываются аналогично.

Достаточность.

Пусть для некоторых допустимых планов X^* и Y^* выполняются (10.4). Докажем их оптимальность. Просуммируем (10.4) по всем $j = \overline{1,n}$, и выполним преобразования, противоположные предыдущим, получим:

$$\sum_{j=1}^{n} x_j^* \left(\sum_{i=1}^{m} a_{ij} y_i^* - c_j \right) = \sum_{j=1}^{n} x_j^* \sum_{i=1}^{m} a_{ij} y_i^* - \sum_{j=1}^{n} c_j x_j^* =$$

$$= \sum_{i=1}^{m} y_i^* \sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j^* - \sum_{j=1}^{n} c_j x_j^* = \sum_{i=1}^{m} b_i y_i^* - \sum_{j=1}^{n} c_j x_j^* = 0 .$$

Получили, что $F(X^*) = \varphi(Y^*)$. Согласно критерия Канторовича, планы X^* и Y^* являются оптимальными.

Из условий (10.40) и (10.41) следует, что если какое–либо ограничение одной из задач ее оптимальным планом обращается в строгое неравенство, то соответствующая компонента оптимального плана двойственной задачи должна равняться нулю, если же какая–либо компонента оптимального плана одной из задач положительна, то соответствующее ограничение в двойственной задаче ее оптимальном планом должно обращаться в строгое равенство.

Экономическое содержание теоремы. *Двойственные оценки могут служить мерой дефицитности ресурсов:* ***дефицитный*** *ресурс – который используется полностью по оптимальному плану производства, имеет положительную оценку, а* ***избыточный*** *ресурс – используемый не полностью, имеет нулевую оценку.*

Теорема 3 (об оценках). *Двойственные оценки показывают приращение функции цели, вызванное малым изменением свободного члена соответствующего ограничения:*

$$\frac{\partial f(X^*)}{\partial b_i} = y_i^*, \; i = \overline{1,m} . \tag{10.44}$$

Доказательство.

Рассмотрим задачу МП вида:

$$\max F = f(X), \tag{10.45}$$

$$\varphi_i(X) = b_i,\ i = \overline{1,m}. \tag{10.46}$$

Перейдем от задачи на условный экстремум к задаче на безусловный экстремум, для этого построим вспомогательную функцию Лагранжа:

$$L(X,Y) = f(X) + \sum_{i=1}^{m} y_i (b_i - \varphi_i(X)), \tag{10.47}$$

где y_i – неопределенные множители Лагранжа.

Запишем необходимые условия экстремума функции Лагранжа, для этого найдем частные производные функции Лагранжа по x_j и y_i и приравняем их нулю:

$$\frac{\partial L(X,Y)}{\partial x_j} = \frac{\partial f(X)}{\partial x_j} - \sum_{i=1}^{m} y_i \frac{\partial \varphi_i(X)}{\partial x_j} = 0, \quad j = \overline{1,n}, \tag{10.48}$$

$$\frac{\partial L(X,Y)}{\partial y_i} = b_i - \varphi_i(X) = 0, \quad i = \overline{1,m}. \tag{10.49}$$

Покажем, что всякое экстремальное значение задачи (10.10)–(10.11) удовлетворяет условиям (10.48)–(10.49).

Пусть X^* – допустимый план, доставляющий ЦФ (10.445) экстремальное значение. Так как X^* – допустимый план, то $\varphi_i(X^*) = b_i$, $i = \overline{1,m}$, и условия (10.49) выполняются. Следовательно, из функции Лагранжа (10.47) следует:

$$L(X^*,Y^*) = f(X^*), \quad \text{откуда} \quad \frac{\partial L(X^*,Y^*)}{\partial x_j} = \frac{\partial f(X^*)}{\partial x_j} = 0,$$

т.е. выполняются условия (10.48).

Итак, каждая допустимая точка X^*, в которой ЦФ достигает экстремального значения, должна быть решением системы (10.48)–(10.49). Это необходимое условие для отыскания экстремума.

Будем считать, что свободные члены системы ограничений (10.46) могут изменяться в некоторых пределах. Тогда в случае задачи ЛП многогранник планов будет изменяться. Его крайние точки становятся функциями правых частей b_i, следовательно, будет изменяться и экстремальное значение ЦФ. Обозначим координаты крайних точек через:

$$x_1(B)=x_1(b_1,b_2,...,b_m),\ \ x_2(B)=x_2(b_1,b_2,...,b_m),\ \ \ldots,\ \ x_n(B)=x_n(b_1,b_2,...,b_m).$$

Рассмотрим теперь функцию Лагранжа как функцию, зависящую от вектора свободных членов *B*:

$$L(B)=f(X(B))+\sum_{i=1}^{m}y_i(b_i-\varphi_i(X(B))). \qquad (10.50)$$

Дифференцируя функцию Лагранжа (10.15) по b_i , получаем:

$$\frac{\partial L(B)}{\partial b_i}=\left(\frac{\partial f}{\partial x_j}-\sum_{i=1}^{m}y_i\frac{\partial\varphi_i}{\partial x_j}\right)\frac{\partial x_j}{\partial b_i}+\sum_{i=1}^{m}(b_i-\varphi_i(X(b)))\frac{\partial y_i}{\partial b_i}+y_i. \qquad (10.51)$$

Учитывая условия (10.13) и (10.14) получим:

$$\frac{\partial L(B)}{\partial b_i}=y_i,\ \ i=\overline{1,m}.$$

Но для оптимального плана $L(X^*,Y^*)=f(X^*)$, следовательно, $\dfrac{\partial f(X^*)}{\partial b_i}=y_i^*,\ \ i=\overline{1,m}$.

Экономическое содержание теоремы. *В равенстве (4.9) дифференциалы заменим приращениями. Получим:* $\Delta f(X^*)\approx y_i^*\Delta b_i,\ \ i=\overline{1,m}$. *При* $\Delta b_i=1$ *имеем* $\Delta f(X^*)\approx y_i^*,\ \ i=\overline{1,m}$. *Отсюда величина двойственной оценки численно равна изменению ЦФ при изменении соответствующего свободного члена ограничений на единицу.*

10.2. Транспортная задача

Постановка транспортной задачи

Пусть имеется m поставщиков $A_1,A_2,\ldots,A_m$, у которых сосредоточен однородный груз в количествах a_i, $i=\overline{1,m}$, единиц. Груз нужно доставить n потребителям $B_1,B_2,\ldots,B_n$, потребность в грузе которых соответственно равна b_j, $j=\overline{1,n}$, единиц. Известна стоимость перевозки единицы груза от *i*–го поставщика *j*–му потребителю c_{ij}, $i=\overline{1,m}$, $j=\overline{1,n}$.

Требуется составить план перевозок груза от поставщиков потребителям $X^* = [x^*_{ij}]_{m \times n}$, при котором суммарные транспортные затраты будут минимальными.

Экономико–математическая модель транспортной задачи (ТЗ) должна отражать все условия и цель задачи в математической форме.

Цель ТЗ – минимизировать общие затраты на реализацию плана перевозок, которые можно представить функцией:

$$\min F = c_{11}x_{11} + c_{12}x_{12} + \ldots + c_{1n}x_{1n} + \ldots + c_{m1}x_{m1} + c_{m2}x_{m2} + \ldots + c_{mn}x_{mn} =$$

$$= \sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} c_{ij} x_{ij} . \qquad (10.1)$$

Переменные x_{ij}, $i=\overline{1,m}$, $j=\overline{1,n}$, должны удовлетворять ограничениям по запасам, потребностям и условиям неотрицательности, которые исключают обратные перевозки. В математической форме эти условия можно записать:

$$\begin{cases} \sum_{j=1}^{n} x_{ij} = a_i, \ i=\overline{1,m}, \\ \sum_{i=1}^{m} x_{ij} = b_j, \ \ j=\overline{1,n}, \end{cases} \qquad (10.2)$$

$$x_{ij} \geq 0, \ \ i=\overline{1,m}, \ \ j=\overline{1,n}. \qquad (10.3)$$

Итак, математически ТЗ ставится так. Даны система ограничений (10.2) при условии (10.3) и линейная функция (10.1). Требуется среди множества решений системы (10.2) найти такое неотрицательное решение, при котором линейная функция (10.1) принимает минимальное значение.

Для наглядности решения условия ТЗ записывают в **распределительную** таблицу, которую иногда называют **табличной** или **матричной** моделью ТЗ:

$B_j(b_j)$ $A_i(a_i)$	$B_1(b_1)$	$B_2(b_2)$		$B_2(b_2)$
$A_1(a_1)$	c_{11} x_{11}	x_{12} x_{12}		c_{1n} x_{1n}
$A_2(a_2)$	c_{21} x_{21}	c_{22} x_{22}		c_{2n} x_{2n}
$A_m(a_m)$	c_{m1} x_{m1}	c_{m2} x_{m2}		c_{mn} x_{mn}

Теорема (о существовании допустимого плана). *Для того, чтобы ТЗ имела допустимые планы, необходимо и достаточно выполнение равенства:*

$$\sum_{i=1}^{m} a_i = \sum_{j=1}^{n} b_j \,. \qquad (10.4)$$

Доказательство.

Необходимость. Докажем, что для допустимого плана выполняется равенство (10.4). Так как план допустимый, то он удовлетворяет основным ограничениям (10.2) ТЗ:

$$\sum_{j=1}^{n} x_{ij} = a_i \,,\ i = \overline{1,m} \,,\quad \sum_{i=1}^{m} x_{ij} = b_j \,,\ j = \overline{1,n} \,.$$

Очевидно, что все элементы x_{ij} суммируются как по строкам, так и по столбцам, различие лишь в перестановке этих элементов. Однако от перестановки слагаемых сумма не меняется, поэтому $\sum_{i=1}^{m} a_i = \sum_{j=1}^{n} b_j$, т.е. равенство (10.4) является необходимым условием разрешимости ТЗ.

Достаточность. Покажем, что если выполняется условие (10.4), то всегда имеется допустимый план. Обозначим $\sum_{i=1}^{m} a_i = \sum_{j=1}^{n} b_j = A$. Переменные x_{ij} выразим через данные задачи следующим образом:

$$x_{ij} = \frac{a_i b_j}{A} \,,\ i = \overline{1,m} \,,\ j = \overline{1,n} \,. \qquad (10.5)$$

Покажем, что переменные (10.5) составляют допустимый план.

Поскольку $a_i \geq 0$, $b_j \geq 0$, то $A > 0$, а поэтому и $x_{ij} \geq 0$, $i = \overline{1,m}$, $j = \overline{1,n}$.

Набор неотрицательных чисел (10.5) будет составлять допустимый план тогда, когда он удовлетворяет системе ограничений (10.2). Просуммируем равенства (10.5) по индексу *j*:

$$\sum_{j=1}^{n} x_{ij} = \sum_{j=1}^{n} \frac{a_i b_j}{A} = \frac{a_i}{A} \sum_{j=1}^{n} b_j = a_i \,,\ i = \overline{1,m} \,.$$

Аналогично, просуммируем равенства (10.5) по индексу *i*:

$$\sum_{i=1}^{m} x_{ij} = \sum_{i=1}^{m} \frac{a_i b_j}{A} = \frac{b_j}{A} \sum_{i=1}^{m} a_i = b_j \,,\ j = \overline{1,n} \,.$$

Следовательно, набор чисел (10.5) удовлетворяет системе ограничений задачи, а поэтому является допустимым планом.

Закрытая и открытая модели ТЗ

Модель ТЗ называется **закрытой**, если суммарный объем груза, имеющегося у поставщиков, равен суммарному спросу потребителей, т.е. выполняется равенство

$$\sum_{i=1}^{m} a_i = \sum_{j=1}^{n} b_j .$$

В случае закрытой модели весь имеющийся груз полностью развозится поставщиками и все потребности потребителей полностью удовлетворены.

Модель ТЗ называется **открытой**, если выполняется одно из условий:

$$\sum_{i=1}^{m} a_i > \sum_{j=1}^{n} b_j , \quad \sum_{i=1}^{m} a_i < \sum_{j=1}^{n} b_j .$$

В случае открытой модели либо все потребители удовлетворены, но при этом у некоторых поставщиков остаются излишки груза, либо весь груз поставщиками вывезен, но потребности потребителей полностью не удовлетворены.

Согласно теореме о существовании допустимого плана для разрешимости ТЗ с открытой моделью необходимо преобразовать ее в закрытую.

Если $\sum_{i=1}^{m} a_i > \sum_{j=1}^{n} b_j$, то необходимо ввести фиктивного *(n+1)*–го потребителя B_{n+1}. Спрос фиктивного потребителя равен $b_{n+1} = \sum_{i=1}^{m} a_i - \sum_{j=1}^{n} b_j$. В табличной модели ТЗ предусматривается дополнительный столбец. Если же $\sum_{i=1}^{m} a_i < \sum_{j=1}^{n} b_j$, то вводится фиктивный *(m+1)*–й поставщик A_{m+1}. В распределительной таблице задачи предусматривается дополнительная строка. Запас груза у фиктивного поставщика равен $a_{m+1} = \sum_{j=1}^{n} b_j - \sum_{i=1}^{m} a_i$. Все тарифы фиктивного потребителя (поставщика) равны нулю, т.е. $c_{i,n+1} = 0$, $i = \overline{1,m}$, $c_{m+1,j} = 0$, $j = \overline{1,n}$.

При преобразовании открытой задачи в закрытую ЦФ не меняется, так как все слагаемые, соответствующие дополнительным перевозкам, равны нулю.

Теорема. *Ранг матрицы A транспортной задачи на единицу меньше числа уравнений r(A)=m+n–1.*

Доказательство. Матрица системы основных ограничений (10.2) имеет вид:

$$A=\begin{bmatrix} 1 & 1 & \dots & 1 & 0 & 0 & \dots & 0 & \dots & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 1 & 1 & \dots & 1 & \dots & 0 & 0 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & \dots & 1 & 1 & \dots & 1 \\ 1 & 0 & \dots & 0 & 1 & 0 & \dots & 0 & \dots & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & \dots & 0 & 0 & 1 & \dots & 0 & \dots & 0 & 1 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & 1 & 0 & 0 & \dots & 1 & \dots & 0 & 0 & \dots & 1 \end{bmatrix}.$$

В каждом столбце матрицы *A* содержатся только два элемента, равных единице, остальные элементы равны нулю. При этом, если сложить первые *m* строк матрицы, получим строку, элементами которой будут единицы. Этот же результат получаем, если сложить последние *n* строк. Обозначая *i*–ю строку через s_i, получаем:

$$s_1+s_2+\ldots+s_m=s_{m+1}+s_{m+2}+\ldots+s_{m+n}\,.$$

Отсюда видно, что любая строка есть линейная комбинация остальных строк, например, $s_1=s_{m+1}+s_{m+2}+\ldots+s_{m+n}-(s_2+\ldots+s_m)$.

Значит, не меняя ранга матрицы *A*, можно вычеркнуть, например, последнюю строку. Минор *(m+n–1)*–го порядка получившейся матрицы, составленный из столбцов коэффициентов при $x_{1n},x_{2n},\ldots,x_{mn},x_{11},x_{12},\ldots,x_{1,n-1}$, будет отличен от нуля, что и доказывает теорему.

Построение исходного опорного плана

Построение опорных планов, а также их преобразование производится непосредственно в распределительной таблице. Если в плане перевозок переменная равна некоторому числу, т.е. $x_{ij}\neq 0$, то эта клетка считается занятой (базисной), если же $x_{ij}=0$, то считается свободной. При этом число занятых опорным планом клеток в соответствии с теоремой о ранге матрицы должно быть *m+n–1*, а остальные *mn–(m+n–1)=(m–1)(n–1)* клеток будут свободными.

Правило “северо–западного угла”. Груз распределяется с загрузки левой верхней, условно называемой северо–западной, клетки *(1,1)*. В клетку *(1,1)* заносится меньшее из чисел a_1 и b_1, т.е. $x_{11} = \min(a_1, b_1)$.

Если $a_1 > b_1$, то $x_{11} = b_1$ и первый потребитель B_1 будет полностью удовлетворен. В дальнейшем первый столбец таблицы в расчет не принимается, в нем переменные $x_{i1} = 0$, $i = \overline{2,m}$. Двигаясь вправо по первой строке таблицы, заносим в соседнюю клетку *(1,2)* меньшее из чисел $a_1 - b_1$ или b_2, т.е. $x_{12} = \min(a_1 - b_1, b_2)$. Если $a_1 - b_1 < b_2$, то $x_{12} = a_1 - b_1$ и запасы первого поставщика исчерпаны, первая строка таблицы в дальнейшем в расчет не принимается. Переходим к аналогичному распределению запаса груза второго поставщика.

Если $a_1 < b_1$, то $x_{11} = a_1$ и запас первого поставщика будет исчерпан. В дальнейшем первая строка таблицы в расчет не принимается, в ней переменные $x_{1j} = 0$, $j = \overline{2,n}$. Двигаясь вниз по первому столбцу таблицы, заносим в клетку *(2,1)* меньшее из чисел $a_2, b_1 - a_1$, т.е. $x_{21} = \min(a_2, b_1 - a_1)$. Если $a_2 > b_1 - a_1$, то $x_{21} = b_1 - a_1$ и первый потребитель будет полностью удовлетворен, первый столбец таблицы в дальнейшем в расчет не принимается. Переходим к аналогичному распределению груза для второго потребителя.

Процесс распределения по второй, третьей и последующим строкам (столбцам) производится аналогично распределению по первой строке или первому столбцу до тех нор, пока не исчерпаются ресурсы. Последней заполняется клетка *(m,n)*.

Правило “минимального элемента”. Просматриваются тарифы в распределительной таблице и в первую очередь заполняется клетка с минимальным значением тарифа. При этом в клетку записывается максимально возможное значение поставки. Затем из рассмотрения исключают строку, соответствующую поставщику, запасы которого полностью израсходованы, или столбец, соответствующий потребителю, спрос которого полностью удовлетворен. После этого из оставшихся клеток таблицы снова выбирают клетку с наименьшим тарифом. Процесс распределения заканчивается, когда все запасы поставщиков исчерпаны, а спрос потребителей полностью удовлетворен.

В результате заполнения таблицы получаем опорный план, который должен содержать *m+n–1* закруженных клеток. Но в процессе заполнения таблицы могут быть одновременно исключены строка и столбец. Так бывает, когда полностью исчерпаны запас груза и полностью удовлетворяется спрос (вырожденная задача). В этом случае в свободной клетке надо записать число *0* – “нуль–загрузку”, условно считая такую клетку занятой. Однако число *0* записывается в те свободные клетки, которые не образуют циклов с ранее занятыми клетками.

Теорема (о потенциалах). *План* $X^* = [x_{ij}^*]_{m\times n}$ *ТЗ является оптимальным, если ему соответствует система из* $m+n$ *чисел* u_i^*, v_j^*, *удовлетворяющие условиям:*

$$u_i^* + v_j^* = c_{ij} \text{ для } x_{ij}^* > 0 \text{ и } \Delta_{ij} = c_{ij} - (u_i^* + v_j^*) \ge 0 \text{ для } x_{ij}^* = 0,\ i = \overline{1,m},\ j = \overline{1,n}.$$

Числа u_i^* *и* v_j^* *называются потенциалами соответственно* i*–го поставщика и* j*–го потребителя.*

Доказательство.

Транспортную задачу (3.1–3.3) можно рассматривать как двойственную задачу к некоторой исходной задаче, решаемой на максимум. Построим эту задачу. i–му ограничению двойственной задачи $x_{i1} + x_{i2} + \ldots + x_{in} = a_i$ в исходной задаче соответствует переменная u_i, $i = \overline{1,m}$, а j–му ограничению $x_{1j} + x_{2j} + \ldots + x_{mj} = b_j$ переменная v_j, $j = \overline{1,n}$. Тогда исходная задача будет иметь вид:

$$\max \varphi = \sum_{i=1}^{m} a_i u_i + \sum_{j=1}^{n} b_j v_j,$$

$$u_i + v_j \le c_{ij},\ i = \overline{1,m},\ j = \overline{1,n}.$$

Оптимальным для двойственной задачи является план X^*, а для исходной $Y^*(u_i, v_j)$. На основании первой теоремы двойственности для пары двойственных задач имеет место равенство $\min F = \max \varphi$, а на основании второй теоремы двойственности выполняются условия $u_i^* + v_j^* = c_{ij}$ *для* $x_{ij}^* > 0$, $u_i^* + v_j^* \le c_{ij}$ для $x_{ij}^* > 0$; $i = \overline{1,m}$, $j = \overline{1,n}$.

Из теоремы следует, что для оптимального плана ТЗ необходимо выполнение условий: каждой занятой клетке в распределительной таблице соответствует сумма потенциалов, равная тарифу этой клетки; каждой свободной клетке соответствует сумма потенциалов, не превышающая тарифа этой клетки.

Для перехода от одного опорного плана (базиса) к другому при решении транспортной задачи используются циклы. В общем случае цикл представляет собой замкнутую ломанную линию, состоящую из звеньев, пересекающихся под прямым углом. Каждое звено соединяет две клетки строки (столбца). Цикл включает одну свободную клетку, остальные клетки цикла заняты. В цикле всегда четное число клеток. Для свободной клетки всегда можно построить единственный цикл. Если из занятых клеток образуется цикл, то план перевозок не является опорным. Цикл строится лишь для свободной клетки. Если ломанная линия, образующая цикл, пересекается, то точки самопересечения не являются вершинами. Вершинами не являются и “транзитные” клетки. Для наиболее перспективной свободной клетки строится замкнутый цикл с вершинами в загруженных клетках. Вершинам этого цикла условно приписываются знаки: свободной клетке “+”, следующей “–”, следующей снова “+” и т.д. Из поставок в клетках цикла с “отрицательными” вершинами выбирается наименьшее количество λ груза, которое и “перемещается” по клеткам этого цикла: прибавляется к поставкам в “положительных” вершинах и вычитается из поставок в “отрицательных” вершинах, в результате чего баланс цикла не нарушится.

Алгоритм метода потенциалов:

1) Сравниваем общий запас груза с суммарным спросом в случае нарушения равенства вводим в рассмотрение фиктивного поставщика (потребителя).

2) Условия ТЗ записываем в форме распределительной таблицы.

3) Строим опорный план по одному из правил.

4) Определяем потенциалы поставщиков и потребителей.

5) Находим оценки Δ_{ij} для всех свободных клеток. Если все $\Delta_{ij} \geq 0$, то полученный план является оптимальным. При этом если все $\Delta_{ij} > 0$, то полученный оптимальный план единственный. В случае, если хотя бы одна оценка $\Delta_{ij} = 0$, имеем бесчисленное множество оптимальных планов с одним и тем же значением ЦФ.

6) Если хотя бы одна из оценок свободных $\Delta_{ij} < 0$, то переходим с помощью цикла к другому опорному плану.

Усложненные постановки ТЗ

Рассмотрим наиболее часто встречающиеся случаи.

1) Нередко целесообразно минимизировать суммарные затраты на производство и транспортировку продукции. С подомной задачей можно столкнуться при решении вопросов, связанных с оптимальным размещением производственных объектов. Здесь может оказаться экономически более выгодно доставлять сырье из отдельного источника, но зато при меньшей его себестоимости. В таких задачах критерием оптимальности служит сумма затрат на производство единицы груза и на его перевозку.

2) Часто необходимо вводимо ограничения, согласно которым, отдельные поставки от определенного поставщика определенному потребителю должны быть исключены, из–за отсутствия достаточного количества транспорта или необходимых условий хранения груза, чрезмерной перегрузки коммуникаций и т. п. Значит, в матрице перевозок, содержащей оптимальный план, определенные клетки должны остаться свободными. Это достигается искусственным завышением показателей c_{ij} в клетках, перевозки через которые следует запретить, до значений, заведомо

больших всех, с которыми их придется сравнивать в процессе решения задачи.

3) Иногда приходится учитывать ограничения по пропускной способности некоторых маршрутов. Если, например, по маршруту $A_k B_s$ можно провести не более *d* единиц груза, то B_s –й столбец матрицы перевозок разбивается на два: $B_s^{'}$ и $B_s^{''}$. В первом спрос принимается равным разности между действительным спросом b_s и ограничением *d*, во втором – ограничению *d*. Тарифы c_{ij} в обеих столбцах одинаковы и равны данным, но в первом в клетке, соответствующей ограничению, вместо истинного тарифа ставится искусственно завышенный тариф *M*. Затем задача решается обычным способом.

	$B_{s-1}(b_{s-1})$	$B_s^{'}(b_s - d)$	$B_s^{''}(d)$	$B_{s+1}(b_{s+1})$
$A_{k-1}(a_{k-1})$	$c_{k-1,s-1}$ $x_{k-1,s-1}$	$c_{k-1,s}$ $x_{k-1,s}^{'}$	$c_{k-1,s}$ $x_{k-1,s}^{''}$	$c_{k-1,s+1}$ $x_{k-1,s+1}$
$A_k(a_k)$	$c_{k,s-1}$ $x_{k,s-1}$	M $x_{k,s}^{'}$	c_{ks} $x_{k,s}^{''}$	$c_{k,s+1}$ $x_{k,s+1}$
$A_{k+1}(a_{k+1})$	$c_{k+1,s-1}$ $x_{k+1,s-1}$	$c_{k+1,s}$ $x_{k+1,s}^{'}$	$c_{k+1,s}$ $x_{k+1,s}^{''}$	$c_{k+1,s+1}$ $x_{k+1,s+1}$

4) Может случиться, что некоторые поставки по определенным маршрутам обязательны и должны войти в оптимальный план независимо от того, выгодно это или нет в условиях всей задачи. Тогда соответственно уменьшают запасы груза у поставщиков и спрос у потребителей и решают задачу относительно тех поставок, которые не обязательны.

Транспортная задача с максимизацией целевой функции

Если в задачах транспортного типа ЦФ максимизируется, то:

1) начальный опорный план составляется правилом “максимального элемента”;

2) оптимальным будет опорный план, которому в распределительной таблице сопутствуют свободные клетки с положительными оценками, т.е. все $\Delta_{ij} \le 0$;

3) выбор клетки, подлежащей заполнению при переходе от одного опорного плана к другому, должен производиться не по отрицательной, а по положительной оценке.

ПРАКТИЧЕСКИЙ РАЗДЕЛ

ТЕМА 1. ОСНОВЫ ТЕОРИИ МНОЖЕСТВ И МАТЕМАТИЧЕСКОЙ СИМВОЛИКИ

1.1. Элементы теории множеств и математической логики

1.2. Комплексные числа и действия над ними

ТЕМА 2. ВЕКТОРНАЯ АЛГЕБРА И МАТРИЧНОЕ ИСЧИСЛЕНИЕ

2.1. Понятие вектора на плоскости и в трехмерном пространстве

2.2. Понятие матрицы и линейные операции над ними.

2.3. Системы линейных алгебраических уравнений

ТЕМА 3. АНАЛИТИЧЕСКАЯ ГЕОМЕТРИЯ

3.1 Аналитическая геометрия на плоскости.

3.2. Элементы аналитической геометрии в пространстве

ТЕМА 4. ФУНКЦИИ ОДНОЙ И НЕСКОЛЬКИХ ПЕРЕМЕННЫХ. ДИФЕРЕНЦИРОВАНИЕ ФУНКЦИЙ.

4.1. Числовая последовательность и ее предел

4.2. Функции одной вещественной переменной

4.3. Дифференциальное исчисление функций одной вещественной переменной

4.4. Функции многих переменных

ТЕМА 5. ИНТЕГРАЛЬНОЕ ИСЧИСЛЕНИЕ ФУНКЦИЙ ОДНОЙ И НЕСКОЛЬКИХ ПЕРЕМЕННЫХ

5.1. Первообразная и неопределенный интеграл

5.2. Определенный интеграл

5.3. Двойные интегралы

ТЕМА 6. ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ

6.1. Обыкновенные дифференциальные уравнения.

ТЕМА 7. ЧИСЛОВЫЕ И ФУНКЦИОНАЛЬНЫЕ РЯДЫ

7.1. Числовые ряды.

7.2. Функциональные и степенные ряды.

ТЕМА 8. ТЕОРИЯ ВЕРОЯТНОСТЕЙ

8.1. Основные понятия и теоремы теории вероятностей

8.2. Схема повторных независимых испытаний

8.3. Случайные величины и их основные законы распределения

ТЕМА 9. МАТЕМАТИЧЕСКАЯ СТАТИСТИКА

9.1. Основы математической статистики

ТЕМА 1. ОСНОВЫ ТЕОРИИ МНОЖЕСТВ И МАТЕМАТИЧЕСКОЙ СИМВОЛИКИ

Задание 1

Даны комплексные числа $z_1 = 2 + 3i, z_2 = 5 - 7i$. Найти:

а) $z_1 + z_2$; б) $z_1 - z_2$; в) $z_1 \cdot z_2$.

Решение

а) $z_1 + z_2 = 2 + 3i + 5 - 7i = (2 + 5) + (3i - 7i) = 7 - 4i$;

б) $z_1 - z_2 = (2 + 3i) - (5 - 7i) = 2 + 3i - 5 + 7i = - 3 + 10i$;

в) $z_1 \cdot z_2 = (2 + 3i)(5 - 7i) = 10 - 14i + 15i - 21i^2 = 31 + i$.

Задание 2

Произведите сложение и вычитание комплексных чисел:

а) $(3 + 5i) + (7 - 2i)$;

б) $(6 + 2i) + (5 + 3i)$;

в) $(- 2 + 3i) + (7 - 2i)$.

Задание 3

Произведите умножение комплексных чисел:

а) $(2 + 3i) \cdot (5 - 7i)$.;

б) $(6 + 4i) \cdot (5 + 2i)$;

в) $(3 - 2i) \cdot (7 - i)$.

Задание 4

Выполните действия:

а) $(3 + 5i)^2$;

б) $(2 - 7i)^2$;

в) $(6 + i)^2$.

Задание 5

Выполните деление:

а) $\frac{5i}{3 + 2i}$;

б) $\frac{-2i}{5 - i}$;

в) $\frac{2 - 3i}{5 + 2i}$.

Задание 6

Решите уравнения:

а) $x^2 - 4x + 13 = 0$;

б) $x^2 + 3x + 4 = 0$;

в) $2{,}5x^2 + x + 1 = 0$;

г) $4x^2 - 20x + 26 = 0$.

Задание 7

Запишите в тригонометрической форме комплексные числа:

а) $z = \sqrt{3} + i$;

б) $z = -3 + 3i$;

в) $z = 2\sqrt{2} - 2i\sqrt{6}$;

г) $z = 5i$.

Задание 8

Докажите, что $\overline{z_1 \cdot z_2} = \bar{z_1} \cdot \bar{z_2}$для любых комплексных чисел z_1 и z_2.

Задание 9

Найдите:

$Re\dfrac{2+7i}{1+4i}$.

Задание 10

Найдите все комплексные числа z такие, что $Rez + Imz = |z|$.

Задание 11

Используя алгебраическую форму комплексного числа, докажите утверждения о комплексно сопряжённых числах:

а) $z = \overline{(\bar{z})}$;

б)$|z| = |\bar{z}|$;

в) $z = \bar{z} \Leftrightarrow z \in R$.

Задание 12

Докажите тождество:$|z_1 + z_2|^2 + |z_1 - z_2|^2 = 2(|z_1| + |z_2|)$.

Задание 13

Решите систему:

$$\begin{cases} z_1 + 2z_2 = 1 + i \\ 3z_1 + iz_2 = 2 - 3i \end{cases}$$

Задание 14

Найдите сумму: $1 + i + i^2 + \dots + i^{100}$.

Задание 15

Выполните действия с числами, предварительно представив их в тригонометрической форме:

а) $(1 + i)(1 - \sqrt{3}i)$;

б) $\dfrac{3i}{i-1}$.

ТЕМА 2. ВЕКТОРНАЯ АЛГЕБРА И МАТРИЧНОЕ ИСЧИСЛЕНИЕ

2.1. Понятие вектора на плоскости и в трехмерном пространстве

Векторы и операции над ними

Задание 1

Даны векторы $\vec{a}(-2;4), \vec{b}(1;-2)$. Коллинеарные ли эти векторы?

Решение:

а) Выясним, существует ли для векторов $\vec{a}(-2;4), \vec{b}(1;-2)$ коэффициент пропорциональности λ, такой, чтобы выполнялись равенства $\begin{cases}\vartheta_1 = \lambda\omega_1 \\ \vartheta_2 = \lambda\omega_2\end{cases}$:

$\begin{cases} -2 = \lambda \cdot 1 \\ 4 = \lambda \cdot (-2)\end{cases} \Rightarrow \lambda = -2$, значит, данные векторы коллинеарные.

Составим пропорцию из отношений соответствующих координат векторов:

$$\frac{-2}{1} = \frac{4}{-2}$$

Сокращаем:

$-2 = -2$, таким образом, соответствующие координаты пропорциональны, следовательно, $a \parallel b$

Задание 2

Даны длины векторов $|\vec{a}| = 13, |\vec{b}| = 19$, и длина этих векторов$|\vec{a} + \vec{b}| = 24$. Найти длину разности этих векторов$|\vec{a} - \vec{b}|$.

Задание 3

Даны векторы $\vec{a}(3;-2;\ 4), \vec{b}(6;-4;8)$. Коллинеарны ли эти векторы?

Задание 4

Даны векторы $\vec{a} = 11, \vec{b} = 23$ и $\vec{a} - \vec{b} = 30$. Найти $\vec{a} + \vec{b}$

Задание 5

Даны точки *A(5;7;2), B(5;4;6), C(9;4;9)*. Выяснить, равнобедренный ли треугольник построенный на этих точках.

Задание 6

Даны два вектора $\vec{a}(1;4;-2), \vec{b}(2,3,-4)$

Найти $\vec{c} = \vec{a} + \vec{b}$

Задание 7

Даны четыре вектора $\vec{a}(3;0;-2), \vec{b}(1;2;-5), \vec{c}(-1;1;1), \vec{d}(8;4;1)$

Найти координаты векторов $\overrightarrow{k_1} = -5\vec{a} + \vec{b} - 6\vec{c} + \vec{d}$ и $\overrightarrow{k_2} = 3\vec{a} - \vec{b} - \vec{c} - \vec{d}$

Задание 8

Упростите выражение, содержащее векторы $\vec{a} - 2 \cdot (\vec{b} + 3 \cdot \vec{a})$

Задание 9

В прямоугольной системе координат заданы векторы $\vec{a}(0;1;-2), \vec{b}(-1;-2;3), \vec{c}(4;-3;2)$, найдите координаты вектора $2 \cdot \vec{a} + 3 \cdot (\vec{b} - \vec{c})$, выполнив необходимые операции.

Задание 10

Даны векторы $\vec{a}(1;-2)$ и $\vec{b}(2;3)$. Найти $2\vec{a}, \vec{a} + \vec{b}, \vec{a} - \vec{b}$

Задание 11

Даны векторы $\vec{a}(0;4;-7)$ и $\vec{b}(7;-9;1)$. Найти $3\vec{a} - 2\vec{b}$, $-\vec{a} + 4\vec{b}$

Задание 12

Даны векторы $\vec{a}(1;-2)$ и $\vec{b}(2;0;), \vec{c}(-4;2;)$

Найти $3\vec{a} - 5\vec{b} + \frac{1}{2}\vec{c}, -2(\vec{a} - 2\vec{c}) + 4\vec{b}$

Задание 13

В треугольной пирамиде $SABC$ известны векторы $\overrightarrow{SA} = \vec{a}, \overrightarrow{SB} = \vec{b}, \overrightarrow{SC} = \vec{c}$. Найти вектор $\overrightarrow{SO}$, если точка O является центром масс треугольника ABC.

Задание 14

Известно, что скалярное произведение двух векторов $(\vec{a};\vec{b}) = 2$, а их длины $|\vec{a}| = 2, |\vec{b}| = 2$. Найти угол между векторами $\vec{a}$ и $\vec{b}$,

Задание 15

Найти угол между векторами $\vec{a}(1;\sqrt{3})$ и $\vec{b}(1;0)$

Разложение вектора по базису. Скалярное Произведение векторов

Задание 1

Разложить вектор $\vec{b} = \{8;1\}$ по базисным векторам $\vec{p} = \{1;2\}$ и $\vec{q} = \{3;1\}$

Решение:

Составим векторное уравнение $x\vec{p} + y\vec{q} = \vec{b}$ которое можно записать в виде системы линейных уравнений

$$\begin{cases} 1x + 3y = 8 \\ 2x + 1y = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 8 - 3y \\ 2(8 - 3y) + y = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 8 - 3y \\ 16 - 6y + y = 1 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x = 8 - 3y \\ 5y = 15 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 8 - 3y \\ y = 3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = -1 \\ y = 3 \end{cases}$$

Ответ: $\vec{b} = -\vec{p} + 3\vec{q}$

Задание 2

Являются ли векторы $\overrightarrow{e_1}$ =(3,-2,1), $\overrightarrow{e_2}$=(2,1,2), $\overrightarrow{e_3}$=(3,-1-2) базисом трехмерного пространства?

Задание 3

Проверить, что система векторов $\overrightarrow{e_1}$ = (1, 0, 3), $\overrightarrow{e_2}$ = (−5, 3, 1), $\overrightarrow{e_3}$= (−1, 1, 2) является базисом в пространстве R^3 и найти координаты вектора $\vec{\vartheta}$ = (1, −1, 2) в этом базисе.

Задание 4

Разложить вектор $\vec{b}(0; 4; 3)$ по базису $\{\overrightarrow{a_1}, \overrightarrow{a_2}, \overrightarrow{a_3}\}$.

Задание 5

На плоскости заданы векторы $\overrightarrow{e_1} = (-1,2), \overrightarrow{e_2} = (2,1), \vec{a} = (0,-2)$. Убедиться, что базис $A = \overrightarrow{e_1}, \overrightarrow{e_2}$ в множестве всех векторов на плоскости. Построить заданные векторы и найти разложение вектора a по базису А.

Задание 6

Вычислить скалярное произведение векторов $\vec{a}$ и $\vec{b}$, если их длины соответственно равны 2 и 5, а угол между ними 30°.

Задание 7

Найти скалярное произведение векторов $\vec{a} = (3, -1)$ и $\vec{b} = (-2, 7)$

Задание 8

Найти скалярное произведение векторов $\vec{a} = (4; 2)$ и $\vec{b} = (1; 8)$

Задание 9

Найти скалярное произведение векторов a и b, если их длины $|\vec{a}| = 3, |\vec{b}| = 6$, а угол между векторами равен 60°.

Задание 10

Найти скалярное произведение векторов $\vec{p} = \vec{a} + 3\vec{b}$ и $\vec{q} = 5\vec{a} - 3\vec{b}$, если их длины $|\vec{a}| = 3, |\vec{b}| = 2$, а угол между векторами $\vec{a}$ и $\vec{b}$ равен 60°.

Задание 11

Найти скалярное произведение векторов $\vec{a} = (1; 2; -5)$ и $\vec{b} = (4; 8; 1)$

Задание 12

Найти скалярное произведение векторов $\vec{c} = -2\vec{a} + \vec{b}$ и $\vec{d} = \vec{a} - \vec{b}$, если известно, что $|\vec{a}| = 4\sqrt{2}, |\vec{b}| = 8, \angle(\vec{a}, \vec{b}) = \frac{\pi}{4}$.

Задание 13

Даны векторы $\vec{a} = \vec{\imath} - 2\vec{\jmath} + 2\vec{k}$ и $\vec{b} = 2\vec{\imath} + 3\vec{\imath} + 2\vec{k}, \vec{c} = \vec{\jmath} - \vec{k}.$ Найти скалярные произведения.

Задание 14

Найти угол между векторами $\vec{a}$ и $\vec{b}$, если известно, $|\vec{a}| = 4, |\vec{b}| = 2\sqrt{2}, \vec{a}\vec{b} = 8$

Задание 15

Проверить ортогональность векторов $\vec{a} = (1; 2; -4)$и $\vec{b} = (6; -1; 1)$

Векторное и смешанное произведение векторов

Задание 1

Найти векторное произведение векторов $\vec{a}(-1; 2; -3), \vec{b}(0; -4; 1)$

Решение: Задача состоит из двух частей: во-первых, необходимо найти само векторное произведение (вектор), а во-вторых – его длину.

1) Найдём векторное произведение:

$$\vec{N} = [\vec{a} \times \vec{b}] = \begin{vmatrix} \vec{\imath} & \vec{\jmath} & \vec{k} \\ -1 & 2 & -3 \\ 0 & -4 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2 & -3 \\ -4 & 1 \end{vmatrix} \cdot \vec{\imath} - \begin{vmatrix} -1 & -3 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} \cdot \vec{\jmath} + \begin{vmatrix} -1 & 2 \\ 0 & -4 \end{vmatrix} \cdot \vec{k}$$

$$= (2 - 12) \cdot \vec{\imath} - (-1 - 0) \cdot \vec{\jmath} + (4 - 0) \cdot \vec{k} = -10\vec{\imath} + \vec{\jmath} + 4\vec{k}$$

В результате получен вектор $\vec{N} = -10\vec{\imath} + \vec{\jmath} + 4\vec{k},$ или, ещё можно записать $\vec{N}(-10; 1; 4)$.

Ответ: $\vec{N}(-10; 1; 4)$

Задание 2

Вычислить объем пирамиды, построенной на векторах $\vec{a} = (2; 3; 5), \vec{b} = (1; 4; 4), \overline{c} = (3; 5; 7)$.

Задание 3

Даны координаты трех векторов в прямоугольной системе координат $\vec{a} = (1, -1, 3), \vec{b} = (-2,2,1), \vec{d} = (3, -2, 5).$ Найдите смешанное произведение $\vec{a}\vec{b}\vec{d}$

Задание 4

Найти $|[-3\vec{a} \times 2\vec{b}]|$, если $|\vec{a}| = \frac{1}{2}, |\vec{b}| = \frac{1}{6}, \angle(\vec{a}, \vec{b}) = \frac{\pi}{2}$.

Задание 5

В правой прямоугольной декартовой системе координат заданы три взаимно перпендикулярных вектора $\vec{a}, \vec{b}$ и $\vec{d},$ образуют правую тройку, их длины равны соответственно 4, 2 и 3. Найдите их смешанное произведение $\vec{a} \cdot \vec{b} \cdot \vec{d}$.

Задание 6

Даны вершины треугольника $A(0;2;0), B(-2;5;0), C(-2;2;6)$. Найти его площадь.

Задание 7

Для заданных векторов $\vec{a} = (2,0,3), \vec{b} = (-3,5,4), \vec{c} = (3,4,-1)$ вычислить проекцию вектора $(\vec{a},\vec{b})$ на вектор $(\vec{a},\vec{b})\vec{c}$.

Задание 8

Даны векторы $\vec{a} = (4,-5,3), \vec{b} = (2,0,7)$. Найти векторное произведение $\vec{a} \times \vec{b}$

Задание 9

Даны векторы $\vec{a} = (4,-5,3), \vec{b} = (2,0,7)$. Найти направляющие косинусы векторного произведения.

Задание 10

Упростить выражение: $[\vec{\imath}, \vec{\jmath} + \vec{k}] - [\vec{\jmath}, \vec{\imath} + \vec{k}] + [\vec{k}, \vec{\imath} + \vec{\jmath} + \vec{k}]$;

Задание 11

Вычислить площадь треугольника с вершинами $A(1;1;1)$, $B(2;3;4)$ и $C(4;3;2)$

Задание 12

Найти угол между векторами $\vec{a}$ и $\vec{b}$, если известно, что $|\vec{a}| = 4, |\vec{b}| = 2\sqrt{2}, \vec{a}\vec{b} = 8$.

Задание 13

Доказать, что при любых $\vec{a}$, $\vec{b}$ и $\vec{c}$ векторы $\vec{a}-\vec{b}$, $\vec{b}-\vec{c}$ и $\vec{c}-\vec{a}$ компланарны. Каков геометрический смысл этого факта?

Задача 14

Проверить ортогональность векторов: $\vec{a}(1;2;-4)$ и $\vec{b}(6;-1;1)$

Задача 15

Найти скалярное произведение векторов $\vec{c} = \vec{a} - 4\vec{b}$, $\vec{d} = -2\vec{a} - \vec{b}$, если $\vec{a}(5;7), \vec{b}(1;1)$.

2.2. Понятие матрицы и линейные операции над ними

<u>Множества. Матрицы</u>

Задание 1

Заданы множества: $A = \{-2,-1,0,1,2\}$ и $B = \{0,2,4,5\}$. Найти $A \cap B, A \cup B; A \times B; B \times A;$ $A \setminus B$; $B \setminus A$ и их мощность.

Решение. Множества A и B состоят из пяти и четырёх элементов, соответственно их мощность: $|A| = 5, |B| = 4$

Объединение ($\cup$) множеств состоит из всех элементов, принадлежащих и множеству A, и множеству B

$A \cup B = \{-2, -1, 0, 1, 2, 4, 5\}$ и $| A \cup B | = 7$.

Пересечение ($\cap$) множеств состоит только из общих для обоих множеств элементов:

$A \cap B= \{0, 2\}$, $| A \cap B | = 2$.

Разность множеств A и B состоит из элементов A, которые не принадлежат множеству B:

$A \setminus B = A - B = \{-2, -1, 1\}$; $| A \setminus B | = 3$.

Аналогично $B \setminus A = B - A = \{4, 5\}$; $| B \setminus A | = 2$.

Прямое (декартово) произведение:

$A \times B = \{(-2, 0); (-2, 2); (-2, 4); (-2, 5); (-1, 0); (-1, 2); (-1, 4); (-1, 5); (0, 0); (0, 2); (0, 4); (0, 5); (1, 0); (1, 2); (1, 4); (1, 5); (2, 0); (2, 2); (2, 4); (2, 5)\}$.

$B \times A = \{(0, -2); (0, -1); (0, 0); (0, 1); (0, 2); (2, -2); (2, -1); (2, 0); (2, 1); (2, 2); (4, -2); (4, -1); (4, 0); (4, 1); (4, 2); (5, -2); (5, -1); (5, 0); (5, 1); (5, 2)\}$.

Из примера видно, что $A \times B \neq B \times A$, но при этом

$| A \times B | = | B \times A | = | A | \cdot | B | = 5 \times 4 = 20$.

Задание 2

Заданы множества $C = \{1; 2; 3; 4\}$ и $D = \{1; 2; 3\}$. Верными для них являются утверждения…

Варианты ответов:

1) «Множество D есть подмножество множества C»

2) «Множества C и D не равны»

3) «Множество C есть подмножество множества D»

4) «Множество C конечно»

5) «Множество D конечно»

Задание 3

Пусть $A = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$ и $B = \{1, 3, 5, 7, 9, 11, 13, 17, 19\}$. Найти $\boldsymbol{A \cup B}$ и $\boldsymbol{A \cap B}$.

Задание 4

Пусть $A = [-2; 1]$ и $B = (0; 3)$. Найти $A \cup B$ и $A \cap B$.

Задание 5

Пусть $A = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$ и $B = \{1, 3, 5, 7, 9, 11, 13, 17, 19\}$. Найти: $A \setminus B$ и $B \setminus A$

Задание 6

Доказать справедливость равенства:

$(A \setminus B) \setminus C = A \setminus (B \cup C)$

Задание 7

Найти транспонированную матрицу A^T, если

$A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 7 \\ 2 & 4 & -1 \end{pmatrix}$

Задание 8

Умножьте матрицу $P = \begin{pmatrix} 5 & 8 & -4 \\ 6 & 9 & -5 \\ 4 & 7 & -3 \end{pmatrix}$ на матрицу $S = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 5 \\ 4 & -1 & 3 \\ 9 & 6 & 5 \end{pmatrix}$.

Задание 9

Найти разность матриц:

$A = \begin{pmatrix} 3 & 5 & -17 \\ -5 & -7 & 0 \end{pmatrix}$

$H = \begin{pmatrix} -4 & 3 & -15 \\ -5 & -7 & 0 \end{pmatrix}$

Задание 10

Транспонировать матрицу $\boldsymbol{B} = \begin{pmatrix} \mathbf{-1} & \mathbf{0} & \mathbf{-2} \\ \mathbf{-5} & \mathbf{4} & \mathbf{-7} \\ \mathbf{6} & \mathbf{-4} & \mathbf{-6} \end{pmatrix}$

Задание 11

Сложить матрицы:

$\boldsymbol{F} = \begin{pmatrix} \mathbf{12} & \mathbf{-1} \\ \mathbf{-5} & \mathbf{0} \end{pmatrix}$ и $\boldsymbol{G} = \begin{pmatrix} \mathbf{-4} & \mathbf{-3} \\ \mathbf{15} & \mathbf{7} \end{pmatrix}$

Задание 12

Умножить матрицу $M = \begin{pmatrix} 2 & -3 \\ 4 & -6 \end{pmatrix}$ на матрицу $N = \begin{pmatrix} 9 & -6 \\ 6 & -4 \end{pmatrix}$.

Задание 13

Найти $A+B$, если $A = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 4 \\ 2 & 0 & -1 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 5 & 2 & 3 \\ 4 & 6 & 2 \end{pmatrix}$

<u>Определители второго и третьего порядков</u>

Задание 1

Вычислить определитель второго порядка $\begin{vmatrix} -1 & 4 \\ -5 & 2 \end{vmatrix}$

Решение: $\begin{vmatrix} -1 & 4 \\ -5 & 2 \end{vmatrix} = -1 \cdot 2 - \left(4 \cdot (-5)\right) = 18$

Задание 2

Вычислить определитель методом треугольников матрицы:

$$\begin{vmatrix} 3 & 3 & -1 \\ 4 & 1 & 3 \\ 1 & -2 & -2 \end{vmatrix}$$

Задание 3

Вычислить определитель матрицы:

$$\begin{vmatrix} 4 & -3 & 5 \\ 3 & -2 & 8 \\ 1 & -7 & -5 \end{vmatrix}$$

Задание 4

Вычислить определить матрицы:

$$\begin{vmatrix} 4 & 2 & -1 \\ 5 & 3 & -2 \\ 3 & 2 & -1 \end{vmatrix}$$

Задание 5

Вычислить определитель, раскрыв его по строке либо столбцу, используя при этом наиболее рациональный способ.

$$\begin{vmatrix} 4 & -2 & 1 \\ 3 & 5 & 2 \\ 0 & -1 & 2 \end{vmatrix}$$

Задание 6

Доказать равенство:

$$\begin{vmatrix} -7 & 8 & 9 \\ 4 & 0 & 6 \\ 1 & -2 & -3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -7 & 8 & 9 \\ 1 & -2 & 6 \\ 4 & 0 & 6 \end{vmatrix}$$

Задание 7

Вычислить определитель матрицы:

$$\begin{vmatrix} 11 & 2 \\ -4 & 1 \end{vmatrix}$$

Задание 8

Вычислить определитель матрицы:

$$\begin{vmatrix} 5 & 7 & 1 \\ -4 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 3 \end{vmatrix}$$

Задание 9

Вычислить определитель матрицы:

$$\begin{vmatrix} 2 & 4 & 1 \\ 0 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 1 \end{vmatrix}$$

Задание 10

Вычислить определитель матрицы:

$$\begin{vmatrix} 1 & -2 & 4 \\ 3 & 2 & 5 \\ -1 & -2 & 3 \end{vmatrix}$$

Задание 11

Вычислить определитель матрицы:

$$\begin{vmatrix} 1 & 3 & -1 \\ 2 & 4 & 2 \\ 3 & 2 & 0 \end{vmatrix}$$

Задание 12

Вычислить определитель матрицы:

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 2 & 2 & 2 \\ 3 & 2 & 1 \end{vmatrix}$$

Задание 13

Вычислить определитель матрицы:

$$\begin{vmatrix} 7 & 4 & 9 \\ 0 & 6 & -3 \\ 4 & -10 & -4 \end{vmatrix}$$

Задание 14

Вычислить определитель третьего порядка:

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & -1 & -2 \\ -1 & 0 & 7 \end{vmatrix}$$

Задание 15

Вычислить определитель матрицы:

$$\begin{vmatrix} 3 & 4 & -5 \\ 8 & 7 & -2 \\ 2 & -1 & 8 \end{vmatrix}$$

<u>Определители n-го порядка</u>

Задание 1

Найти определители n-го порядка.

$$\Delta = \begin{vmatrix} \mathbf{1} & \mathbf{2} & \mathbf{2} & \mathbf{1} \\ \mathbf{0} & \mathbf{2} & \mathbf{3} & \mathbf{0} \\ \mathbf{1} & \mathbf{2} & \mathbf{3} & \mathbf{1} \\ \mathbf{2} & \mathbf{0} & \mathbf{1} & \mathbf{1} \end{vmatrix}$$

Предварительно вычтем из первой и третьей строк элементы четвёртой строки, тогда будем иметь

$$\Delta=\begin{vmatrix}-1 & 2 & 1 & 0\\ 0 & 2 & 3 & 0\\ -1 & 2 & 2 & 0\\ 2 & 0 & 1 & 1\end{vmatrix}$$

В четвёртом столбце полученного определителя три элемента – нули. Поэтому выгоднее разложить этот определитель по элементам четвёртого столбца, так как три первых произведения будут нулями. Поэтому:

$$\Delta=(-1)^{4+4}\cdot\begin{vmatrix}-1 & 2 & 1\\ 0 & 2 & 3\\ -1 & 2 & 2\end{vmatrix}=-2.$$

А в следующем примере показано, как вычисление определителя любого (в данном случае - четвёртого) порядка можно свести к вычислению определителя второго порядка.

Задание 2

Вычислить определитель

$$\Delta=\begin{vmatrix}-2 & 1 & 3 & 2\\ 3 & 0 & -1 & 2\\ -5 & 2 & 3 & 0\\ 4 & -1 & 2 & -3\end{vmatrix}$$

Задание 3

Вычислить определитель четвёртого порядка приводя его к треугольному виду.

$$A=\begin{vmatrix}1 & 2 & 3 & 4\\ 2 & 3 & 4 & 1\\ 3 & 4 & 1 & 2\\ 4 & 1 & 2 & 3\end{vmatrix}$$

Задание 4

Вычислить определитель n-ого порядка приводя к треугольному виду

$$\begin{vmatrix}\mathbf{1} & \mathbf{1} & \mathbf{1} & \mathbf{1}\\ \mathbf{1} & \mathbf{-1} & \mathbf{1} & \mathbf{1}\\ \mathbf{1} & \mathbf{1} & \mathbf{-1} & \mathbf{1}\\ \mathbf{1} & \mathbf{1} & \mathbf{1} & \mathbf{-1}\end{vmatrix}$$

Задание 5

Вычислить определитель n-ого порядка сведя к вычислению определителя второго порядка.

$$\begin{vmatrix}1 & 0 & -1 & -1\\ 0 & -1 & -1 & 1\\ 1 & 2 & 3 & 4\\ -1 & -1 & 1 & 0\end{vmatrix}$$

Задание 6

Вычислить определитель четвёртого порядка методом понижения порядка.

$$A = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 3 & 4 \\ 0 & 3 & 0 & 1 \\ 3 & 0 & 1 & 2 \\ 4 & 1 & 2 & 3 \end{vmatrix}$$

Задание 7

Решить уравнение:

$$\begin{vmatrix} x+2 & x-1 \\ x+4 & 2x-1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & -3 & 4 \\ 2 & 5 & -3 \\ 2 & -2 & 7 \end{vmatrix}$$

Задание 8

Вычислить определитель $\Delta = \begin{vmatrix} 2 & 3 & -3 & 4 \\ 2 & 1 & -1 & 2 \\ 6 & 2 & 1 & 0 \\ 2 & 3 & 0 & -5 \end{vmatrix}$

Задание 9

Вычислите определитель $\Delta = \begin{vmatrix} 3 & -4 & 5 & 2 \\ 2 & 1 & -1 & 4 \\ 5 & 2 & 2 & 6 \\ 3 & 4 & 2 & 3 \end{vmatrix}$

Задание 11

Вычислите определитель $\Delta = \begin{vmatrix} 1 & 2 & -1 & 3 \\ 0 & 1 & 2 & -1 \\ 2 & 1 & -2 & -3 \\ -1 & 2 & -1 & 1 \end{vmatrix}$

Задание 12

Вычислите определитель $\Delta = \begin{vmatrix} 2 & -5 & 1 & 2 \\ -3 & 7 & -1 & 4 \\ 5 & -9 & 2 & -7 \\ 4 & -6 & 1 & 2 \end{vmatrix}$

Задание 13

Вычислите определитель $\Delta = \begin{vmatrix} 3 & 9 & 5 & 6 \\ 2 & -8 & -8 & -5 \\ 2 & 5 & 5 & 4 \\ 2 & 10 & 8 & 7 \end{vmatrix}$

Задание 14

Вычислить определитель n-го порядка

$$\Delta_n = \begin{vmatrix} 3 & 2 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ -2 & 3 & 2 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 3 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 3 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & -2 & 3 \end{vmatrix}.$$

<u>Обратная матрица. Ранг матрицы</u>

Задание 1

Для матрицы $A = \begin{pmatrix} 7 & 4 \\ 5 & 3 \end{pmatrix}$ найти обратную методом присоединенной матрицы.

Решение: Приписываем к заданной матрице А справа единичную матрицу второго порядка:

$A\,|\,E = \left(\begin{matrix} 7 & 4 \\ 5 & 3 \end{matrix}\middle|\begin{matrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{matrix}\right)$

От первой строки отнимаем вторую (для этого от элемента первой строки отнимаем соответствующий элемент второй строки):

$A\,|\,E \sim \left(\begin{matrix} 2 & 1 \\ 5 & 3 \end{matrix}\middle|\begin{matrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{matrix}\right)$

От второй строки отнимаем две первых:

$A\,|\,E \sim \left(\begin{matrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{matrix}\middle|\begin{matrix} 1 & -1 \\ -2 & 3 \end{matrix}\right)$

Первую и вторую строки меняем местами:

$A\,|\,E \sim \left(\begin{matrix} 1 & 1 \\ 2 & 1 \end{matrix}\middle|\begin{matrix} -2 & 3 \\ 1 & -1 \end{matrix}\right)$

От второй строки отнимаем две первых:

$A\,|\,E \sim \left(\begin{matrix} 1 & 1 \\ 0 & -1 \end{matrix}\middle|\begin{matrix} -2 & 3 \\ 5 & -7 \end{matrix}\right)$

Вторую строку умножаем на (-1), а к первой строке прибавляем вторую:

$A\,|\,E \sim \left(\begin{matrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{matrix}\middle|\begin{matrix} 3 & -4 \\ -5 & 7 \end{matrix}\right)$

Итак, слева получили единичную матрицу, а значит матрица, стоящая в правой части (справа от вертикальной черты), является обратной к исходной.

Таким образом, получаем, что

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} 3 & -4 \\ -5 & 7 \end{pmatrix}$$

Задание 2

Найти обратную матрицу для $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$

Задание 3

Найти обратную матрицу к матрице $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 2 & -1 & 1 \\ 1 & 3 & -1 \end{pmatrix}$

Задание 4

Найти ранг матрицы $A = \begin{pmatrix} 0 & 4 & 10 & 1 \\ 4 & 8 & 18 & 7 \\ 10 & 18 & 40 & 17 \\ 1 & 7 & 17 & 3 \end{pmatrix}$

Задание 5

Найти ранг матрицы используя метод окаймления миноров.

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 & -2 \\ 2 & 4 & 3 & 0 \\ -1 & -2 & 6 & 6 \end{pmatrix}$$

Задание 6

Найти методом Гаусса обратную матрицу для матрицы $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 2 \\ 3 & 1 & 2 \end{pmatrix}$

Задание 7

Найти обратную матрицу $A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 7 \\ 2 & 4 & -1 \end{pmatrix}$

Задание 8

Для матрицы A найти обратную матрицу A^{-1}

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 2 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}$$

Задание 9

Найти ранг матрицы $A = \begin{pmatrix} 4 & 0 & -8 & 0 \\ 2 & 0 & -4 & 0 \\ 3 & 0 & -6 & 0 \\ 1 & 0 & -2 & 0 \end{pmatrix}$

Задание 10

Найти ранг матрицы $A = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 3 & 0 & 2 \\ 2 & -4 & 1 & 5 & 3 \\ -4 & 5 & 7 & -10 & 0 \\ -2 & 1 & 8 & -5 & 3 \end{pmatrix}$

Задание 11

Найти ранг матрицы $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 7 & -5 & 3 \\ 2 & 5 & -3 & 9 & 4 \\ 3 & -2 & 8 & 1 & 5 \\ 4 & 6 & -4 & 2 & 6 \end{pmatrix}$

Задание 12

Найти ранг матрицы методом окаймляющих миноров

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & 5 \\ 2 & 4 & -1 & 0 \\ -2 & -4 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$

Задание 13

Найти ранг матрицы с помощью элементарных преобразований

$$\begin{pmatrix} 3 & 1 & -1 & -2 & 8 \\ 7 & 1 & -2 & -1 & 12 \\ 11 & 1 & -3 & 0 & 16 \\ 2 & 2 & -1 & -5 & 12 \end{pmatrix}$$

Задание 14

Найти ранг матрицы методом Гаусса $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 3 & 0 \\ 1 & 4 & 2 & 1 \\ 3 & 2 & 2 & 6 \\ 8 & 5 & 7 & 12 \end{pmatrix}$

Задание 15

Найти ранг и указать базисный минор матрицы $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 3 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 4 & 0 \\ 1 & 2 & 3 & 4 & 0 \end{pmatrix}$

2.3. Системы линейных алгебраических уравнений

Система линейных уравнений. Матричный способ решения

Задание 1

Найти решение СЛАУ матричным методом.

$$\begin{cases} 5x_1 + 2x_2 = 7 \\ 2x_1 + x_2 = 9 \end{cases}$$

Решение. Выпишем матрицу системы $A = \begin{pmatrix} 5 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$ и матрицу $B = \begin{pmatrix} 7 \\ 9 \end{pmatrix}$ правых частей

Найдем обратную матрицу для матрицы системы. Для матрицы второго порядка обратную можно находить по следующему алгоритму:

1) матрица должна быть невырожденная, то есть ее определитель не должен равняться нулю $|A| = 1$;

2) элементы, стоящие на главной диагонали, меняем местами, а у элементов побочной диагонали меняем знак на противоположный и делим полученные элементы на определитель матрицы. Итак, получаем, что:

$A^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ -2 & 5 \end{pmatrix}$

Тогда:

$$X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = A^{-1}B = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ -2 & 5 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 7 \\ 9 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -11 \\ 31 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -11 \\ 31 \end{pmatrix}$$

Две матрицы одного размера равны, если равны их соответствующие элементы, то есть в итоге имеем, что $x_1 = -11$, $x_2 = 31$

Задание 2

Решить системы линейных алгебраических уравнений с помощью обратной матрицы.

$$\begin{cases} 2x_1 + x_2 + x_3 = 2 \\ x_1 - x_2 = -2 \\ 3x_1 - x_2 + 2x_3 = 2 \end{cases}$$

Задание 3

С помощью обратной матрицы найдите решение системы линейных алгебраических уравнений.

$$\begin{cases} 3x_1 - 2x_2 = \dfrac{5}{6} \\ 2x_1 + 3x_2 = 2 \end{cases}$$

Задание 4

Решите системы линейных алгебраических уравнений матричным методом.

$$\begin{cases} x_1 + x_3 = 4 \\ 2x_2 - x_3 = 1 \\ 3x_1 - x_2 = 1 \end{cases}$$

Задание 5

Найдите решение системы линейных алгебраических уравнений с помощью обратной матрицы.

$$\begin{cases} 2y + x + z = -1 \\ -z - y + 3x = -1 \\ -2x + 3z + 2y = 5 \end{cases}$$

Задание 6

Найдите решение системы линейных алгебраических уравнений матричным методом.

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 - 2x_3 = 3 \\ 5x_1 + 7x_2 + x_3 = -1 \\ 3x_1 + x_2 + 5x_3 = 0 \end{cases}$$

Задание 7

Решите системы линейных алгебраических уравнений матричным методом, λ– некоторое действительное число.

$$\begin{cases} (\lambda + 2) \cdot x_1 - 2x_2 = 1 \\ x_1 + \lambda x_2 = 2 \end{cases}$$

Задание 8

Решите системы линейных алгебраических уравнений матричным методом.

$$\begin{cases} x_1 + x_2 - x_3 + x_4 = 2 \\ 2x_1 - x_2 + 3x_3 + 4x_4 = 0 \\ 3x_1 + x_2 + x_3 - 2x_4 = 1 \\ x_1 + 2x_2 - x_4 \end{cases}$$

Задание 9

Решите системы линейных алгебраических уравнений матричным методом.

$$\begin{cases} x_1 - x_2 + 3x_3 - 2x_4 = 3 \\ 2x_1 - 3x_2 + 4x_3 - x_4 = 1 \\ 4x_1 + 2x_2 + 5x_3 + x_4 = 5 \\ 3x_1 - x_2 + 4x_3 - 3x_4 = -1 \end{cases}$$

Задание 10

Решите системы линейных алгебраических уравнений матричным методом.

$$\begin{cases} 2x_1 + x_2 - x_3 = 2 \\ 3x_1 + x_2 - 2x_3 = 3 \\ x_1 + x_3 = 3 \end{cases}$$

Задание 11

Исследовать на совместимость $\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 = 7 \\ 3x_1 + 2x_2 + x_3 + x_4 - 3x_5 = -2 \\ x_2 + 2x_3 + 2x_4 + 6x_5 = 23 \\ 5x_1 + 4x_2 + 3x_3 + 3x_4 - x_5 = 12 \end{cases}$

Задание 12

Решите системы линейных алгебраических уравнений матричным методом

$$\begin{cases} 2x_1 - x_2 + x_3 = 0 \\ 3x_1 - 2x_2 - x_3 = 5 \\ x_1 + x_2 + x_3 \end{cases}$$

Задание 13

Решите системы линейных алгебраических уравнений матричным методом

$$\begin{cases} x_1 + 3x_2 - x_3 + x_4 - x_5 = 1 \\ 4x_1 + 2x_2 - x_3 + x_4 = 22 \\ -x_1 + 6x_2 + x_4 - x_5 = 10 \end{cases}$$

Задание 14

Решите системы линейных алгебраических уравнений матричным методом

$$\begin{cases} x_1 + x_2 - x_3 - x_4 = 1 \\ -2x_1 - 3x_2 + x_3 - 2x_4 = -2 \\ -x_1 + x_2 - 3x_3 + 3x_4 = 3 \\ 3x_1 - x_2 - x_3 - 13x_4 = -1 \end{cases}$$

Задание 15

Решите системы линейных алгебраических уравнений матричным методом

$$\begin{cases} x_1 - 2x_2 - 4x_3 - 3x_4 = -1 \\ 2x_1 - 3x_2 - 3x_3 + 2x_4 = 2 \\ 4x_1 - 2x_2 + x_3 - 5x_4 = -2 \\ x_1 + 3x_2 - 4x_3 + 5x_4 = 3 \end{cases}$$

Формулы Крамера. Метод Гаусса

Задание 1

Найти решение системы линейных алгебраических уравнений при помощи метода Крамера.

$$\begin{cases} 5x_1 + 2x_2 = 7 \\ 2x_1 + x_2 = 9 \end{cases}$$

Решение. Вычисляем определитель матрицы системы:

$$\Delta = \begin{vmatrix} 5 & 2 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} = 5 \cdot 1 - 2 \cdot 2 = 1 \neq 0$$

Так как $\Delta \neq 0$, то по теореме Крамера система совместна и имеет единственное решение. Вычислим вспомогательные определители. Определитель Δ_1 получим из определителя Δ заменой его первого столбца столбцом свободных коэффициентов. Будем иметь:

$$\Delta_1 = \begin{vmatrix} 7 & 2 \\ 9 & 1 \end{vmatrix} = 7 - 18 = -11$$

Аналогично, определитель Δ_2 получается из определителя матрицы системы Δ заменой второго столбца столбцом свободных коэффициентов:

$$\Delta_2 = \begin{vmatrix} 5 & 7 \\ 2 & 9 \end{vmatrix} = 45 - 14 = 31$$

Тогда получаем, что:

$$x_1 = \frac{\Delta_1}{\Delta} = \frac{-11}{1} = -11, x_2 = \frac{\Delta_2}{\Delta} = \frac{31}{1} = 31$$

Задание 2

Решить систему линейных уравнений третьего порядка, используя формулы Крамера:

$$\begin{cases} 2x_1 + x_2 + x_3 = 2 \\ x_1 - x_2 = -2 \\ 3x_1 - x_2 + 2x_3 = 2 \end{cases}$$

Задание 3

Решить систему линейных уравнений третьего порядка, используя формулы Крамера:

$$\begin{cases} 2x_1 + x_2 - x_3 = 2 \\ 3x_1 + x_2 - 2x_3 = 3 \\ x_1 + x_3 = 3 \end{cases}$$

Задание 4

Решить систему линейных уравнений третьего порядка, используя формулы Крамера.

$$\begin{cases} x_2 + 3x_3 = -1 \\ 2x_1 + 3x_2 + 5x_3 = 3 \\ 3x_1 + 5x_2 + 7x_3 = 6 \end{cases}$$

Задание 5

Решить систему линейных уравнений третьего порядка, используя формулы Крамера:

$$\begin{cases} 2x_1 - x_2 + 3x_3 = 9 \\ 3x_1 - 5x_2 + x_3 = -4 \\ 4x_1 - 7x_2 + x_3 = 5 \end{cases}$$

Задание 6

Решить систему линейных уравнений методом Гаусса.

$$\begin{cases} 2x_1 + x_2 + x_3 = 2 \\ x_1 - x_2 = -2 \\ 3x_1 - x_2 + 2x_3 = 2 \end{cases}$$

Задание 7

Найдите решение системы уравнений методом Гаусса.

$$\begin{cases} 3x_1 + 2x_2 + x_3 + x_4 = -2 \\ x_1 - x_2 + 4x_3 - x_4 = -1 \\ -2x_1 - 2x_2 - 3x_3 + x_4 = 9 \\ x_1 + 5x_2 - x_3 + 2x_4 = 4 \end{cases}$$

Задание 8

Найдите решение системы уравнений самым рациональным методом

$$\begin{cases} 3x + 2y - z = 4 \\ 2x - y + 5z = 23 \\ x + 7y - z = 5 \end{cases}$$

Задание 9

Найдите решение системы уравнений самым рациональным методом

$$\begin{cases} x_1 - 2x_2 - 4x_3 - 3x_4 = -1 \\ 2x_1 - 3x_2 - 3x_3 + 2x_4 = 2 \\ 4x_1 - 2x_2 + x_3 - 5x_4 = -2 \\ x_1 + 3x_2 - 4x_3 + 5x_4 = 3 \end{cases}$$

Задание 10

Найдите решение системы уравнений самым рациональным методом

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 - x_3 + 2x_4 = 4 \\ 2x_1 - 3x_2 + x_3 - x_4 = -2 \\ 3x_1 + x_2 - 2x_3 + 3x_4 = 3 \\ 5x_1 + 2x_3 + 2x_4 = 4 \end{cases}$$

Задание 11

Найдите решение системы уравнений самым рациональным методом

$$\begin{cases} x_1 + 3x_2 - x_3 + x_4 = 2 \\ 2x_1 - 3x_2 + 2x_3 + x_4 = 1 \\ 4x_1 + x_2 + 4x_3 - x_4 = 3 \\ x_1 + 5x_2 - x_3 + 2x_4 = 6 \end{cases}$$

Задание 12

Найдите решение системы уравнений самым рациональным методом

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 3 \\ 2x_1 + x_2 - 3x_3 + 2x_4 = 4 \\ -x_1 - 3x_2 + 4x_3 + x_4 = 2 \\ 2x_1 - x_2 + 3x_3 = 1 \end{cases}$$

Задание 13

Найдите решение системы уравнений самым рациональным методом

$$\begin{cases} x_1 + x_2 - x_3 + x_4 = 2 \\ 2x_1 - x_2 + 3x_3 + 4x_4 = 0 \\ 3x_1 + x_2 + x_3 - 2x_4 = 1 \\ x_1 + 2x_2 - x_4 = 5 \end{cases}$$

Задание 14

Найдите решение системы уравнений самым рациональным методом

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 - x_4 = 1 \\ 3x_1 + x_2 + 2x_3 - 2x_4 = 2 \\ 2x_1 - 4x_2 - 3x_3 + x_4 = 5 \\ x_1 + 5x_2 + 3x_3 - 2x_4 = 4 \end{cases}$$

Задание 15

Найдите решение системы уравнений самым рациональным методом

$$\begin{cases} 2x_1 - x_2 + 3x_3 + 4x_4 = 5 \\ 4x_1 - 2x_2 + 5x_3 + 6x_4 = 7 \\ 6x_1 - 3x_2 + 7x_3 + 8x_4 = 9 \\ ax_1 - 4x_2 + 9x_3 + 10x_4 = 11 \end{cases}$$

Теорема Кронекера-Капелли. Однородные системы линейных уравнений

Задание 1

Найти общее решение системы уравнений, где a и b - произвольные числа:

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 = a \\ x_1 + x_2 - x_3 = b \end{cases}$$

Решение: Прежде всего, найдём ранг матрицы $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix}$ системы и ранг расширенной матрицы $A^* = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & a \\ 1 & 1 & -1 & b \end{pmatrix}$

Миноры второго порядка, содержащиеся во-вторых и третьих столбцах обеих матриц, являются ненулевыми, поэтому $rang(A) = rang(A^*) = 2$, то есть согласно теореме Кронекера-Капелли система является совместной. Повторяя решение однородной задачи и оставляя в левой части переменные, отвечающие базисному минору, получаем систему:

$$\begin{cases} x_2 + x_3 = a - x_1 \\ x_2 - x_3 = b - x_1 \end{cases},$$

Найдём какое-либо её решение, например, при $x_1 = 0$, которое имеет вид

$$x_{\text{чн}} = \left(0, \frac{(a+b)}{2}, \frac{(a-b)}{2}\right)^T$$

Общее решение неоднородной системы есть сумма $X_{\text{чн}}$ и X_{OO}.

Задание 2

Исследовать на совместность систему уравнений, используя теорему Кронекера-Капели:
$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 0 \\ x_2 + x_3 + x_4 + x_5 = 0 \\ x_1 + 2x_2 + 3x_3 = 2 \\ x_2 + 2x_3 + 3x_4 = -2 \\ x_3 + 2x_4 + 3x_5 = 2 \end{cases}$$

Задание 3

При каком значении параметра λ система линейных уравнений является совместной?

$$\begin{cases} 2x_1 - x_2 + x_3 + x_4 = 1 \\ x_1 + 2x_2 - x_3 + 4x_4 = 2 \\ x_1 + 7x_2 - 4x_3 + 11x_4 = \lambda \end{cases}$$

Задание 4

Найти фундаментальную систему решений и записать общее решение системы линейных однородных уравнений:

$$\begin{cases} 5x_1 - 8x_2 + 3x_3 + 3x_4 = 0 \\ 4x_1 - 6x_2 + 2x_3 + x_4 = 0 \end{cases}$$

Задание 5

Найти фундаментальную систему решений и записать общее решение системы линейных однородных уравнений:

$$\begin{cases} 2x_1 - x_2 + 3x_3 - 2x_4 + 4x_5 = 0 \\ 4x_1 - 2x_2 + 5x_3 + x_4 + 7x_5 = 0 \\ 2x_1 - x_2 + x_3 + 8x_4 + 2x_5 = 0 \end{cases}$$

Задание 6

Найти фундаментальную систему решений и записать общее решение системы линейных однородных уравнений:

$$\begin{cases} 2x_1 + 4x_2 + 6x_3 = 0 \\ 3x_1 + 6x_2 + 9x_3 = 0 \\ x_1 + x_2 - 4x_3 = 0 \\ x_2 + 2x_3 = 0 \end{cases}$$

Задание 7

Найти фундаментальную систему решений и записать общее решение системы линейных однородных уравнений:

$$\begin{cases} x_1 + 3x_2 + 2x_3 = 0 \\ 2x_1 - x_2 + 3x_3 = 0 \\ 3x_1 - 5x_2 + 4x_3 = 0 \\ x_1 + 17x_2 + 4x_3 = 0 \end{cases}$$

Задание 8

Исследовать на совместность систему уравнений, используя теорему Кронекера-Капелли

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 + 3x_3 - x_4 = 1 \\ 3x_1 + 2x_2 + x_3 - x_4 = 1 \\ 2x_1 + 3x_2 + x_3 + x_4 = 1 \\ 2x_1 + 2x_2 + 2x_3 - x_4 = 1 \\ 5x_1 + x_2 + 2x_3 = 2 \end{cases}$$

Задание 9

Исследовать на совместность систему уравнений, используя теорему Кронекера-Капелли

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 = 7 \\ 3x_1 + 2x_2 + x_3 + x_4 - 3x_5 = -2 \\ x_2 + 2x_3 + 2x_4 + 6x_5 = 23 \\ 5x_1 + 4x_2 + 3x_3 + 3x_4 - x_5 = 12 \end{cases}$$

Задание 10

Исследовать на совместность систему уравнений, используя теорему Кронекера-Капелли

$$\begin{cases} 2x_1 + x_2 - x_3 + x_4 = 1 \\ 3x_1 - 2x_2 + 2x_3 - 3x_4 = 2 \\ 5x_1 + x_2 - x_3 + 2x_4 = -1 \\ 2x_1 - x_2 + x_3 - 3x_4 = 4 \end{cases}$$

Задание 11

Исследовать на совместность и найти решение в зависимости от параметра α в заданиях 11-14.

$$\begin{cases} \alpha x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 1 \\ x_1 + \alpha x_2 + x_3 + x_4 = 1 \\ x_1 + x_2 + \alpha x_3 + x_4 = 1 \\ x_1 + x_2 + x_3 + \alpha x_4 = 1 \end{cases}$$

Задание 12

$$\begin{cases} 2x_1 - x_2 + 3x_3 + 4x_4 = 5 \\ 4x_1 - 2x_2 + 5x_3 + 6x_4 = 7 \\ 6x_1 - 3x_2 + 7x_3 + 8x_4 = 9 \\ \alpha x_1 - 4x_2 + 9x_3 + 10x_4 = 11 \end{cases}$$

Задание 13

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 + x_3 = 1 \\ 2x_1 + \alpha x_2 + x_3 = 1 \\ 3x_1 + x_2 + 5x_3 = 1 \end{cases}$$

Задание 14

$$\begin{cases} \alpha x_1 + x_2 - x_3 = 1 \\ 2x_1 + \alpha x_2 - x_3 = 2 \\ 3x_1 + 2x_2 + \alpha x_3 = -1 \end{cases}$$

Задание 15

Найдите решение системы уравнений самым рациональным методом

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 3 \\ 2x_1 + x_2 - 3x_3 + 2x_4 = 4 \\ -x_1 - 3x_2 + 4x_3 + x_4 = 2 \\ 2x_1 - x_2 + 3x_3 = 1 \end{cases}$$

ТЕМА 3. АНАЛИТИЧЕСКАЯ ГЕОМЕТРИЯ

3.1. Аналитическая геометрия на плоскости

Уравнение прямой на плоскости

Задание 1

Дано общее уравнение прямой $2x + 3y - 6 = 0$. Составить уравнение этой прямой с угловым коэффициентом и уравнение в отрезках.

Решение:

1. Так как прямая непараллельно оси OY ($B = 3 \neq 0$), можно разрешить уравнение относительно y.

Получаем $y = -\frac{2}{3}x + 2$

Угловой коэффициент $k = -\frac{2}{3}$

2. Так как прямая пересекает обе оси и не проходит через начало координат ($A = 2 \neq 0$, $B = 3 \neq 0$, $C = -6 \neq 0$), преобразуем уравнение к виду $\frac{x}{3} + \frac{y}{2} = 1$.

Отрезки, отсекаемые прямой на осях координат: $a = 3$, $b = 2$.

Задание 2

Составить уравнение прямой с угловым коэффициентом $k = -1$, проходящей через точку $M(2, -3)$.

Задание 3

Составим уравнение прямой, проходящей через точки $M_1(0, -1)$ и $M_2(2, 1)$.

Задание 4

Составить уравнение прямой, проходящей через точку $M(1,1)$ перпендикулярно прямой $2x + 3y - 1 = 0$.

Задание 5

Составить общее уравнение прямой на плоскости, если она проходит через точку $M_0(-2; 3)$ и её направляющий вектор $\vec{p}(4; 5)$.

Задание 6

Задано общее уравнение прямой на плоскости: $7x - 4 + 3 = 0$. Записать направляющий вектор к этой прямой.

Задание 7

Дано уравнение прямой с угловым коэффициентом $y = 14x-6$. Записать уравнение этой прямой в общем виде и направляющий вектор этой прямой.

Задание 8

Составить уравнение прямой, проходящей через точки $K(8; 2), L\left(3; \frac{3}{4}\right)$.

Задание 9

Найти расстояние от точки $P(2;-1)$ до прямой $4x + 3y + 10 = 0$.

Задание 10

Составить уравнение прямой с угловым коэффициентом $k = \frac{3}{2}$, если известно, что точка $A(3; -2)$ принадлежит данной прямой.

Задание 11

Составить уравнение прямой по точке $M(1;2)$ и направляющему вектору $\vec{p}(2;1)$.

Задание 12

Составить уравнение прямой по двум точкам $A\left(\frac{3}{2};\frac{7}{3}\right)$, $B(-1;7)$.

Задание 13

Составить уравнение прямой по точке $M(-1;3)$ и вектору нормали $\vec{n}(3;-1)$. Найти направляющий вектор прямой.

Задание 14

Прямая отсекает на координатных осях равные положительные отрезки. Составить уравнение прямой, если площадь треугольника, образованного этими отрезками равна 8 см^2.

Задание 15

Составить параметрические уравнения прямой $2x+y-5=0$.

Кривые второго порядка

Задание 1

Записать классическое уравнение гиперболы $y=\frac{1}{x}$ в канонической форме. Сделать чертёж.

Решение:

$y=\frac{1}{x} \Rightarrow yx-1=0,$

Сделаем замену переменных:

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos a & -\sin a \\ \sin a & \cos a \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix},$$

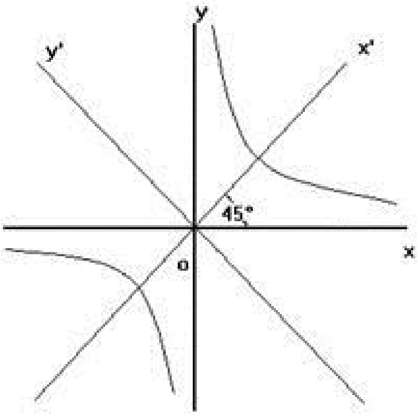
$(x'\cos\alpha - y'\sin\alpha)(x'\sin\alpha + y'\cos\alpha) - 1 = 0,$

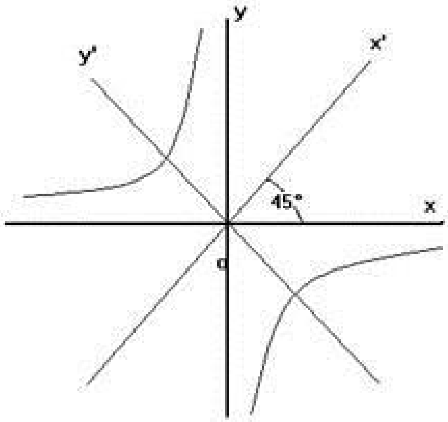
$x'^2 cos^2\alpha - y'^2\cos\alpha\sin\alpha + x'y'(cos^2\alpha - sin^2\alpha) - 1 = 0,$

$(cos^2\alpha - sin^2\alpha) = 0 \Rightarrow a = 45° \Rightarrow \frac{x'^2}{2} - \frac{y'^2}{2} = 1.$

Совершенно аналогично, каноническое уравнение для гиперболы

$y = -\frac{1}{x}$ будет иметь вид: $\frac{x'^2}{2} - \frac{y'^2}{2} = -1$ или $\frac{x'^2}{2} - \frac{y'^2}{2} = 1$





Задание 2

Определить вид кривой, найти ее центр (вершину) и вычислить основные параметры: $4x^2 - 8x + 3y + 3 = 0$.

Задание 3

Написать уравнение параболы, зная, что парабола проходит через точки (0;0); (3;6) и симметрична относительно оси *Ox*.

Задание 4

Определить вид кривой, найти ее центр (вершину) и вычислить основные параметры: $9x^2 + 18x - 4y^2 + 16y + 29 = 0$.

Задание 5

Написать каноническое уравнение эллипса, фокусы которого лежат на оси ординат и симметричны относительно начала координат, если расстояние между директрисами равно 9, а расстояние между фокусами равно 4.

Задание 6

Составить уравнения касательных к эллипсу $\frac{x^2}{32} + \frac{y^2}{18} = 1$, проведенных из точки *M*(12; -3).

Задание 7

Определить уравнение асимптот гиперболы $y = \frac{x-3}{x+2}$.

Задание 8

Построить эллипс, заданный уравнением $\frac{x^2}{16} + \frac{y^2}{7} = 1$.

Задание 9

Привести к каноническому виду и построить кривую, заданную уравнением $4x^2 + 4xy + y^2 - 16x + 20y = 0$.

Задание 10

Построить график линии, заданной уравнением $x^2 - 2y + y^2 - 3 = 0$.

Задание 11

Привести к каноническому виду и построить кривую, заданную уравнением: $3x^2 - 4xy - 12xy + 8y + 4 = 0$.

Задание 12

Преобразовать к каноническому виду и изобразить кривую:
$3x^2 - 2xy + 3y^2 - 4x - 4y - 12 = 0$.

Задание 13

Установить вид кривой и построить ее график:
$-x^2 + 2y^2 - 2x - 8y + 3 = 0$.

Задание 14

Написать каноническое уравнение гиперболы, зная, что вещественная полуось равна 5, эксцентриситет $\varepsilon = 1{,}4$.

Задание 15

Написать уравнение параболы, зная, что парабола проходит через точки (0;0); (4;2) и симметрична относительно оси *Oy*.

3.2. Элементы аналитической геометрии в пространстве

Плоскость. Уравнение прямой в пространстве

Задание 1

Составить уравнения прямой в пространстве, перпендикулярной плоскости $2x - 3y + 4z - 8 = 0$ и проходящей через точку пересечения этой плоскости с осью *Oz*.

Решение:

Найдём точку пересечения данной плоскости с осью *Oz*. Так как любая точка, лежащая на оси *Oz*, имеет координаты $(0; 0; z)$, то, полагая в заданном уравнении плоскости $x = y = 0$, получим $4z - 8 = 0$ или z = 2. Следовательно, точка пересечения данной плоскости с осью *Oz* имеет координаты *(0; 0; 2)*. Поскольку искомая прямая перпендикулярна плоскости, она параллельна вектору её нормали $\vec{n} = (2; -3; 4)$. Поэтому направляющим вектором прямой может служить вектор нормали $\vec{s} = (2; -3;\ 4)$ заданной плоскости.

Теперь запишем искомые уравнения прямой, проходящей через точку
$A = (0;\ 0;\ 2)$ в направлении вектора $\vec{s}(2; -3; 4)$:

$$\frac{x-0}{2} = \frac{y-0}{-3} = \frac{z-2}{4} \text{ или } \frac{x}{2} = \frac{y}{-3} = \frac{z-2}{4}$$

Так как $\vec{s} = (-6, 0\ ,7)$, то искомая прямая перпендикулярна оси *Oy*.

Задание 2

Составьте уравнение плоскости, зная, что точка A (1,-1, 3) служит основанием перпендикуляра, проведенного из начала координат к этой плоскости.

Задание 3

Составить уравнение прямой в пространстве, проходящей через точки $M_1(2;3;-5)$ и $M_2(-4;3;2)$.

Задание 4

Написать каноническое уравнение плоскости, перпендикулярной вектору $\vec{n}=(3;1;1)$ и проходящей через точку M(2;-1;1).

Задание 5

Составьте уравнение плоскости, зная, что точка A(1;-1;3) служит основанием перпендикуляра, проведенного из начала координат к этой плоскости.

Задание 6

Составьте уравнение плоскости, проходящей через ось Oz и образующей с плоскостью $2x+y-\sqrt{5}z-7=0$ угол 60°.

Задание 7

Составить канонические уравнения прямой в пространстве, заданной общими уравнениями:

$$\begin{cases} 2x-5y+z+4=0 \\ x+2y-z+2=0 \end{cases}$$

Задание 8

В координатном пространстве $Oxyz$ (в прямоугольной системе координат) заданы вершины A(1;2;3), B(3;0;2), C(7;4;6) треугольника. Требуется составить уравнение прямой, содержащей высоту AH треугольника.

Задание 9

В пучке, определяемом плоскостями $2x–y+5z–3 = 0$ и $x+y+2z+1 = 0$, найти две перпендикулярные плоскости, одна из которых проходит через точку M(1;0;1).

Задание 10

Найдите координаты любого направляющего вектора прямой, которая задана в прямоугольной системе координат $Oxyz$ в трехмерном пространстве уравнениями двух пересекающихся плоскостей

$$\begin{cases} x+2y-3z-2=0 \\ x-z+4=0 \end{cases}$$

Задание 11

Прямая в трехмерном пространстве задана уравнениями двух пересекающихся плоскостей. Напишите канонические и параметрические уравнения этой прямой.

$$\begin{cases} 2x + y - z - 1 = 0 \\ x + 3z - 2z = 0 \end{cases}$$

Задание 12

Составить параметрические уравнения прямых $y+1 = 0$ и $z-5 = 0$.

Задание 13

Составить уравнения прямой, проходящей через точки $M_1(0; 8; 1), M_2(0; 7; 1)$

Задание 14

В пучке, определяемом плоскостями $2x-y+5z-3=0$ и $x+y+2z+1=0$, найти две перпендикулярные плоскости, одна из которых проходит через точку $M(1;0;1)$.

Задание 15

Записать каноническое уравнения прямой d: $\begin{cases} 2y + z + 5 = 0 \\ x - 2y = 0 \end{cases}$

Поверхности 2-ого порядка

Задание 1

Написать уравнение поверхности вращения, образованной вращением вокруг оси Ox линии, заданной уравнением $\begin{cases} x^2 = 2y \\ z = 0 \end{cases}$

Решение:

Выразим первое уравнение системы через x

$$\begin{cases} y = \dfrac{x^2}{2} \\ z = 0 \end{cases}$$

Далее возведем каждое из уравнений в квадрат и сложим

$$\begin{cases} y^2 = \left(\dfrac{x^2}{2}\right)^2 \rightarrow y^2 + z^2 = \left(\dfrac{x^2}{2}\right)^2 \\ z^2 = 0 \end{cases}$$

Получили уравнение поверхностного вращения.

Задание 2

Построить плоскость $3x - 2y + 12z - 6 = 0$.

Задание 3

Найти уравнение проекции сечения эллиптического параболоида $y^2 + z^2 = x$, плоскостью $x + 2y - z = 0$ на координатной плоскости.

Задание 4

Установить, что плоскость $x-2=0$ пересекает эллипсоид $\frac{x^2}{16}+\frac{y^2}{12}+\frac{z^2}{4}=1$ по эллипсу. Найти его полуоси и вершины.

Задание 5

Найти область определения функции *2-х* переменных и построить соответствующую поверхность функции: $z=\sqrt{3-x^2-y^2}$.

Задание 6

Определить, при каком значении m плоскость $x-2y-2z+m=0$, касается эллипсоида $\frac{x^2}{144}+\frac{y^2}{36}+\frac{z^2}{9}=1$.

Задание 7

Составить уравнение плоскости, перпендикулярной к вектору $\vec{n}$= {2; -1; -2} и касающейся эллиптического параболоида $\frac{x^2}{3}+\frac{y^2}{4}=2z$.

Задание 8

Составить уравнение поверхности, образованной вращением эллипса $\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1,$ $x=0$ вокруг оси Oy.

Задание 9

Составить уравнение поверхности, образованной вращением эллипса $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1,$ $z=0$ вокруг оси Ox.

Задание 10

Составить уравнение конуса, вершина которого находится в начале координат, а направляющая дана уравнениями: $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1\ , z=0$.

Задание 11

Ось Oz является осью круглого конуса с вершиной в начале координат, точка M_1(3; -4; 7) лежит на его поверхности. Составить уравнение этого конуса.

Задание 12

Составить уравнение цилиндра, образующие которого параллельны вектору $\vec{l}$= {2; -3; 4}, а направляющая дана уравнениями, $z=1$ и $x^2+y^2=9$.

Задание 13

Цилиндр, образующие которого перпендикулярны к плоскости $x + y - 2z - 5 = 0$ описан около сферы $x^2 + y^2 + z^2 = 1$. Составить уравнение этого цилиндра.

Задание 14

Установить, что плоскость $x - 2 = 0$ пересекает эллипсоид по эллипсу $\frac{x^2}{16} + \frac{y^2}{12} + \frac{z^2}{4} = 1$, найти его полуоси и вершины.

Задание 15

Составить уравнение цилиндра, описанного около двух сфер $x^2 + y^2 + z^2 = 25$ и $(x-2)^2 + (y-1)^2 + z^2 = 25$

ТЕМА 4. ФУНКЦИИ ОДНОЙ И НЕСКОЛЬКИХ ПЕРЕМЕННЫХ. ДИФЕРЕНЦИРОВАНИЕ ФУНКЦИЙ.

4.1. Числовая последовательность и ее предел

Задание 1

Найти общий член последовательности $1, -\frac{1}{3}, \frac{1}{5}, -\frac{1}{7}, \frac{1}{9}, \dots$

Решение:

$$|a_1| = |1| = 1 = \frac{1}{1}, |a_2| = \left|-\frac{1}{3}\right| = -\left(-\frac{1}{3}\right) = \frac{1}{3} = \frac{1}{2+1}$$

$$|a_3| = \left|\frac{1}{5}\right| = \frac{1}{5} = \frac{1}{2\cdot 2+1}, |a_4| = \left|-\frac{1}{7}\right| = \frac{1}{7} = \frac{1}{2\cdot 3+1}, \dots$$

Задание 2

Найти общий член последовательности $1, 4, 9, 16, 25, \dots$

Задание 3

Доказать, что последовательность с общим членом $a_n = \frac{1}{n^2}$ имеет предел, равный нулю.

Задание 4

Написать формулу общего члена последовательности.

а) $\frac{2}{3}; \frac{4}{9}; \frac{6}{27}; \frac{6}{81}; \dots$

б) $\frac{2}{3\cdot 1}; \frac{3}{4\cdot 2}; \frac{4}{5\cdot 3}, \frac{5}{6\cdot 4}; \dots$

Задание 5

Найти

$$\lim_{n\to\infty} \frac{5n^2 + 3n + 2}{2n^2 - n + 1}$$

Задание 6

Найти предел последовательности с общим членом $a_n = \frac{n!}{(n+1)!-n!}$

Задание 7

Найти предел последовательности с общим членом.

$$\lim_{n\to\infty} \left(\frac{1}{4} + \frac{1}{4^2} + \ldots + \frac{1}{4^n}\right)$$

Задание 8

Найти предел

$\lim\limits_{n\to\infty}\frac{n^2+3n+4}{n(2-5n)}$

Задание 9

Найти предел

$$\lim_{n\to\infty}\frac{(n+4)!}{(n+3)!+(n+2)!}$$

Задания 10

Написать первые четыре члена последовательности и найти её предел

$\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1+3+\ldots+(2n-1)}{3n^2}$

Задание 11

Найти предел последовательности $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{3^{n+1}+2\cdot 4^n}{4^{n+1}-5}$

Задание 12

Найти предел последовательности $\lim\limits_{n\to\infty}\sin\frac{n!}{n^2}$.

Задание 13

Найти предел последовательности $\lim\limits_{n\to\infty}\left((1-3n^2)arctg^2\frac{n}{3n^2-1}\right)$

Задание 14

Вычислить $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{3n^2+4}{3n^2-1}\right)^{n^2}$.

Задание 15

Вычислить предел функции $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{arctg3x}{x}\right)^{x+2}$

<u>Предел функции в точке. Бесконечно малые и бесконечно большие функции</u>

Задание 1

Вычислить предел $\lim\limits_{x\to1}(9x^2-6x+8)$

Решение:

$$\lim_{x\to1}(9x^2-6x+8)=9\left(\lim_{x\to1}x\right)\left(\lim_{x\to1}x\right)-6\lim_{x\to1}x+\lim_{x\to1}8=9-6+8=11$$

Задание 2

Вычислить предел $\lim\limits_{x\to-1}\frac{2x^2-3x-5}{x+1}$

Задание 3

Вычислить предел $\lim\limits_{x\to 1}\frac{x-1}{\sqrt{x}-1}$

Задание 4

Вычислить предел $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{2x^2-3x-5}{1+x+3x^2}$

Задание 5

Вычислить предел $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{7x^3+15x^2+9x+1}{5x^4+6x^2-3x-4}$

Задание 6

Вычислить предел $\lim\limits_{x\to -1}(x^4-3x^2+16x+1)$

Задание 7

Вычислить предел $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{2x^2-5x+4}{20x-5}$

Задание 8

Вычислить предел $\lim_{x\to 2}\frac{8-2x^2}{x^2+4x-12}$

Задание 9

Найти предел $\lim_{x\to 3}\frac{\sqrt{x+6}-\sqrt{10x-21}}{5x-15}$

Задание 10

Вычислить предел $\lim_{x\to 0}\frac{\left(1-cos\frac{x}{2}\right)^2}{tg\ 2x\cdot\ln(1+2x^3)}$

Задание 11

Найти предел $\lim_{x\to 0}\frac{arctg^3 5x}{tg\ 7x\cdot\ln(1-x)}$

Задание 12

Найти предел функции, используя эквивалентные бесконечно малые величины и другие преобразования

$$\lim_{x\to 0}\frac{\left(\sqrt{1-6x}-1\right)\sin 4x}{ln^2(1-2x)}$$

Задание 13

Доказать, что

$$\lim_{x\to 2}(3x+5)=11$$

Задание 14

Вычислить $\lim\limits_{x\to 0}\left(\frac{x^2-2x+3}{x^2-3x+2}\right)^{\frac{\sin x}{x}}$

Задание 15

Вычислить $\lim\limits_{x\to 1}\left(\frac{x-1}{x^2-1}\right)^{\frac{1}{x-1}}$

Первый и второй замечательные пределы

Задание 1

Найти предел $\lim\limits_{x\to0}\frac{\sin 7x}{3x}$

Решение:

$$\lim_{x\to0}\frac{\sin 7x}{3x}=\frac{0}{0}=\lim_{x\to0}\frac{\sin 7x}{3\cdot\frac{1}{7}\cdot 7x}=\frac{1}{\frac{3}{7}}=\frac{7}{3}$$

Задание 2

Доказать, что $\lim\limits_{x\to0}\frac{tgx}{x}=1$

Задание 3

Найти предел $\lim\limits_{x\to0}\frac{\sin 5x}{\sin 3x}$

Задание 4

Найти предел $\lim\limits_{x\to0}\frac{5x^2}{sin^2\frac{x}{2}}$

Задание 5

Найти предел $\lim\limits_{x\to0}\frac{tg2x}{2x^2}$

Задание 6

Найти предел $\lim\limits_{x\to0}\frac{1-cos4x}{5x}$

Задание 7

Найти предел $\lim\limits_{x\to0}\frac{ctgx\cdot(1-cos^2 3x)}{(x^2+5x)}$

Задание 8

Найти предел $\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{3x}\right)^{4x}$

Задание 9

Найти предел $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\frac{x-2}{x+1}\right)^{2x+3}$

Задание 10

Найти предел $\lim\limits_{x\to0}(1+tg\ x)^{\frac{1}{2x}}$

Задание 11

Найти предел $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\frac{3x+1}{3x-5}\right)^{4x+7}$

Задание 12

Найти предел $\lim\limits_{x\to0}(cos2x)^{\frac{1}{sin^2 3x}}$

Задание 13

Найти предел $\lim\limits_{x\to\infty}\left(x(\ln(x+1)-lnx)\right)$

Задание 14

Найти предел $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\frac{\mathrm{x}-1}{\mathrm{x}+1}\right)^{\mathrm{x}}$

Задание 15

Найти предел $\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{x^2}\right)^x$

4.2. Функции одной вещественной переменной

Функции. Область определения. График

Задание 1

Определите область определения функции $g(x)=\sqrt{x+7}$

Решение: Областью определения функции являются все допустимые выражения $g(x)$. То есть область определения будут все значения x, при которых подкоренное выражение будет больше или равно нулю:

$x+7\geq 0$

$x\geq -7$

Ответ: $x\in[-7;+\infty)$

Задание 2

Функция задана формулой: $f(x)=2x+1$

Найдите: $f(1)$; $f(2)$; $f(3)$; $f(7{,}1)$.

Задание 3

Дана функция $y=x^2+8$. Найдите область определения и область значений заданной функции.

Задание 4

Дана функция $y = 3x - 2$. Постройте график данной функции. Найдите область определения функции.

Задание 5

Найти область определения и множество значений функций.

$$f(x)=\begin{cases}3, x>1\\ 1, x=1\\ -3, x<1\end{cases}$$

Задание 6

Постройте график функции: $y = cos(x{-}\pi 6) + 2$

Задание 7

В одной системе координат изобразите график функций $y = 3x + 2$ и $y = -\frac{1}{2}x + 1$. Найдите координаты точек пересечения графиков:

1) с осью Оx;
2) с осью Оy;
3) между собой;
4) с прямой $y = -2$.

Задание 8

Найти область определения функции $f(x) = -\frac{2}{4-x^2}$

Задание 9

Найти область определения функции $f(x) = \frac{1}{\ln(x+3)}$

Задание 10

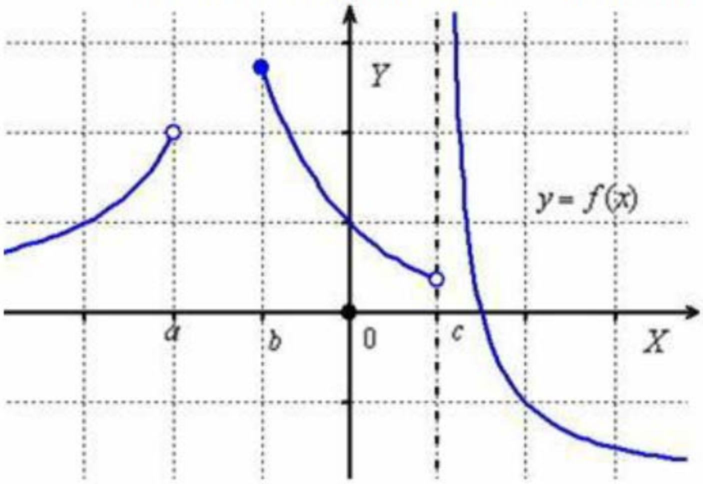
Найти область определения функции: $y = \sqrt{\frac{\lg x}{\cos x} + tg\ x}$

Задание 11

Найти область определения функции $f(x) = arcsin(3 - 2x)$

Задание 12

Указать по графику область определения функции:



Задание 13.

Укажите область значений функции $y = arcsinx$.

Задание 14.

Найдите множество значений функции $y = x^4 - 5x^3 + 6x^2$ на отрезке [1; 4].

Задание 15.

Постройте график функции $y = 3cos(2x)$.

Непрерывность функции. Точки разрыва

Задание 1

Доказать, что функция $y = sinx$ непрерывна при любом значении x.

Решение:

Пусть x_0 – произвольная точка. Придавая ей приращение Δx, получим точку $x = x_0 + \Delta x$.

Тогда $y = f(x) - f(x_0) = \sin(x_0 + \Delta x) - \sin x_0 = 2\cos(x_0 + \frac{\Delta x}{2}) \cdot \sin\frac{\Delta x}{2}$.

Получаем $\lim\limits_{x \to 0} \Delta y = 0$.

Задание 2 Исследовать функцию $f(x) = x^2 - \frac{|x+1|}{x+1} - 1$ на непрерывность. Определить характер разрывов функции, если они существуют. Выполнить чертёж.

Задание 3

Исследовать функцию $f(x) = \frac{|x^2 - x|}{x-1}$ на непрерывность. Определить характер разрывов функции, если они существуют. Выполнить чертёж.

Задание 4

Доказать непрерывность функции $f(x) = 2x + 3$ при любом x.

Задание 5

Исследовать на непрерывность функцию $f(x) = \frac{1}{x}$, найти точки разрыва и определить их тип.

Задание 6

Установить, какого рода разрыв в точке $x = x_0$ имеет функция $f(x) = \frac{x^2+7}{x-4}$, $x_0 = 4$.

Задание 7

Установить, какого рода разрыв в точке $x = x_0$ имеет функция $f(x) = \frac{sinx}{-x^4+4}$, $x_0 = \sqrt{2}$.

Задание 8

Найти точки разрыва функции и определить их тип. $f(x) = \frac{x^2-25}{x-5}$

Задание 9

Исследовать на непрерывность функцию и построить график функции

$$f(x) = \begin{cases} x+2, \text{если } x \le -1 \\ x^2+1, \text{если } -1 < x \le 1 \\ -x+3, \text{если } x > 1 \end{cases}$$

Задание 9

Задание 10

Исследовать на непрерывность функцию $f(x) = \frac{3sin^2x+cos^2x-1}{5cosx}$

Задание 11

Можно ли устранить разрыв функции $f(x) = \frac{1}{x-2}$ в точке $x = 2$?

Задание 12

Найти точки разрыва функции $f(x) = \begin{cases} \frac{x+1}{(x-2)(x-5)}, \text{при } x < 3, \\ 4x-7, \text{при } x > 3 \end{cases}$ и определить их тип.

Задание 13

Исследовать на непрерывность функцию и построить ее схематический график.

$f(x) = \frac{2^{\frac{1}{x+1}}}{3-x}$

Задание 14

Исследовать на непрерывность функцию $f(x) = e^{\frac{1}{1-x}}$ и выполнить схематический чертёж.

Задание 15

Исследовать на непрерывность функцию $f(x) = \frac{2x^2sinx+8x^3}{lnx}$, найти точки разрыва и определить их тип.

<u>Функции непрерывные на отрезке</u>

Задание 1

Имеет ли функция $f(x) = x^3 - 17x + 2 = 0$ корни, принадлежащие отрезку [-1; 1]?

Решение:

Данная функция непрерывна на всей числовой оси. Найдём значения функции на концах отрезка, т.е. в $x = -1$ и $x = 1$: $f(-1) = 18, f(1) = -14$. На концах отрезка [-1;1] функция принимает значения разных знаков. Тогда на данном интервале существует точка, значение функции в которой равно нулю. Следовательно, уравнение имеет корень, принадлежащий интервалу.

Задание 2

Имеет ли функция $f(x) = x^6 - 2x^2 + 5x - 5 = 0$ корни, принадлежащие отрезку [0; 2]?

Задание 3

Имеет ли функция $f(x) = sinx + x = 0$ корни, принадлежащие отрезку $[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}]$?

Задание 4

Имеет ли функция $f(x) = x^3 + 4x - 10 = 0$ корни, принадлежащие отрезку [1; 10]?

Задание 5

Имеет ли функция $f(x) = x^3 - 5x + 1 = 0$ корни, принадлежащие отрезку [1; 2]?

Задание 6

Существуют ли на отрезке [-10; 10] точки, где функция $f(x) = cosx + 4x$ равна нулю?

Задание 7

Существуют ли на отрезке [-2; 2] точки, где функция $f(x) = 3x^2 + 1$ равна нулю?

Задание 8

Существуют ли на отрезке [-3; 3] точки, где функция $f(x) = x^2 + 4$ равна нулю?

Задание 9

Выделить промежуток, на котором уравнение $x^3 + 3x - 7 = 0$ имеет действительный корень.

Задание 10

Исследовать на непрерывность и построить графики функции: $f(x) = \lim\limits_{n\to\infty} sin^n\ x$.

Задание 11

Исследовать функцию $y = f(x) = \frac{x^3 - x^2}{x-1}$ на непрерывность.

Задание 12

Существуют ли на отрезке [3; 10] точки, где функция $f(x) = lnx$ равна нулю?

Задание 13

Принимает ли функция $f(x) = x^3 - 2x^2 + x - 2$ значение 0 внутри отрезка [1; 3]?

Задание 14

Исследовать функцию $f(x) = x^2 - \frac{|x+1|}{x+1} - 1$ на непрерывность. Определить характер разрывов функции, если они существуют. Выполнить чертёж.

Задание 15

Исследовать функцию на непрерывность и построить график функции:

$$f(x) = \begin{cases} x + 2, \text{если } x \le -1, \\ x^2 + 1, \quad \text{если} - 1 < x \le 1, \\ -x + 3, \text{если } x > 1\,. \end{cases}$$

4.3. Дифференциальное исчисление функций одной вещественной переменной

Производная функции. Основные правила дифференцирования

Задание 1

Найти производную функции $y = \sqrt{x}$.

Решение:

$$y' = (\sqrt{x})' = \frac{1}{2\sqrt{x}}.$$

Задание 2

Найти производную функции $y = 12cos\,x$.

Задание 3

Найти производную функции $y = 3x^5 - 12x^4 + x^3 + 10x^2 - 2x + 1$.

Задание 4

Найти производную функции $y = 5^x$.

Задание 5

Найти производную функции $y = x^3 \arcsin x$.

Задание 6

Найти производную функции $y = 6 + x + 3x^2 - \sin x - 2\sqrt[3]{x} + \frac{1}{x^2} -$ $-11ctg\,x$.

Задание 7

Найти производную функции $y = (x^2 + 7x - 1)\log_3 x$.

Задание 8

Найти производную функции $y = (3x - 4) \cdot (1 - cos^2 x)$.

Задание 9

Найти производную функции $y = \frac{x^3 - cosx}{x^2 + x}$.

Задание 10

Найти производную функции $y = \frac{2(3x-4)}{x^2+1}$.

Задание 11

Найти производную функции $y = \frac{x}{e^{-x}}$.

Задание 12

Показать, что функция $y = cosx$ удовлетворяет дифференциальному уравнению $y'' + y = 0$.

Задание 13

Удовлетворяет ли функция $y = 3x^3 + 4x$ дифференциальному уравнению $y'x - y = x^3$?

Задание 14

Удовлетворяет ли функция $y = 2x^3 + 6x$ дифференциальному уравнению $y'x - y = 4x^3$?

Задание 15

Удовлетворяет ли функция $y = x^3 + 4x^2$ дифференциальному уравнению $y'x - 2y = x^3$?

Логарифмическое дифференцирование. Геометрический и физический смысл производной

Задание 1

Найти производную функции $y = (sin3x)^{cos5x}$ с помощью логарифмического дифференцирования.

Решение:

Прологарифмируем функцию: $\ln y = \ln(sin3x)^{cos5x} = cos5x \cdot \ln(sin3x)$.

Теперь продифференцируем обе части равенства по x:

$(\ln y)' = (cos5x \cdot \ln(sin3x))'$;

$\frac{y'}{y} = (cos5x \cdot \ln(sin3x))'$;

$\frac{y'}{y} = (cos5x)' \cdot \ln(sin3x) + cos5x \cdot (\ln(sin3x))'$;

$\frac{y'}{y} = -5sin5x \cdot \ln(sin3x) + cos5x \cdot \frac{1}{sin3x} \cdot 3cos3x$;

Выразим y': $y' = y(-5sin5x \cdot \ln(sin3x) + 3cos5x \cdot ctg3x)$.

Подставим y: $y' = (sin3x)^{cos5x} \cdot (-5sin5x \cdot \ln(sin3x) + 3cos5x \cdot ctg3x)$.

Задание 2

Найти производную функции $y = \frac{\sqrt[3]{x+1} \cdot \sqrt{x^2+1}}{\sqrt[3]{x+2}}$ с помощью логарифмического дифференцирования.

Задание 3

Найти производную функции $y = x^x$ с помощью логарифмического дифференцирования.

Задание 4

Найти производную функции $y = \frac{(x+7)^2(x-3)^2}{\sqrt{x^2+3x-1}}$ с помощью логарифмического дифференцирования.

Задание 5

Найти производную функции $y = (cosx + x)^{2x}$ с помощью логарифмического дифференцирования.

Задание 6

Найти производную функции $y = ln\frac{\sqrt{3x-1} \cdot (2x+3)^3}{x-1}$ с помощью логарифмического дифференцирования.

Задание 7

Найти угловой коэффициент касательной к графику функции $y = sinx$ в точке $x_0 = \frac{\pi}{2}$.

Задание 8

Определить в какой точке касательная к параболе $y = x^2$ образует с прямой $y = 3x + 5$ угол 45°.

Задание 9

Составить уравнение касательной к графику функции $y = x + e^{-2x}$, параллельной прямой $y = -x$.

Задание 10

Найти угол между осью Ox и кривой $y = \frac{1}{1-x}$ в точке с абсциссою $x_0 = 0$.

Задание 11

Найти угол между кривыми $y = sinx$ и $y = cosx$ в точках их пересечения.

Задание 12

Материальная точка движется прямолинейно по закону $x(t) = 6t^2 - 48t + 17$, где $x(t)$ – расстояние от точки отсчета в метрах, t – время в секундах, измеренное с начала движения. Найдите ее скорость (м/с) в момент времени $t = 9$ с.

Задание 13

Материальная точка движется прямолинейно по закону $x(t) = t^3 + 3t^2 - 14t + 17$, где $x(t)$ – расстояние от точки отсчета в метрах, t – время в секундах, измеренное с начала движения. Найдите ее скорость (м/с) в момент времени $t = 4$ с.

Задание 14

Материальная точка совершает колебательные движения по закону $x(t) = 2sin3t$, где $x(t)$ – расстояние, t – время. Найдите ускорение.

Дифференцируемость функции. Дифференциал функции

Задание 1

Найти дифференциал функции $y = cosx$.

Решение:

$y' = (cosx)' = -sinx$;
$dy = -sinx \cdot dx$.

Задание 2

Вычислить приращение функции $y = x^3$ в точке $x_0 = 2$.

Задание 3

Найти дифференциал функции $y = \frac{a}{x} + arctg\frac{x}{a}$.

Задание 4

Найти дифференциал функции $y = lnx^2$

Задание 5

Вычислить дифференциал функции $y = x^3 - 6x^2$ в точке $x = 2$.

Задание 6

Вычислить дифференциал функции $y = x^4 - 2x^3 + 4x^2 + 6x$ в точке $x = 2$.

Задание 7

Вычислить дифференциал функции $y = 2cos2x + x^2$ в точке $x = \frac{\pi}{2}$.

Задание 8

$y = x^2 - 2x$. Найти приближенно, с помощью дифференциала, изменение y (т.е. Δy), когда x изменяется от 3 до 3,01.

Задание 9

Вычислить приближенно приращение функции $y = x^2 + 5x + 8$ при изменении x от значения 2 до значения 2,02.

Задание 10

Пользуясь понятием дифференциала, вычислить приближенно $tg46°$.

Задание 11

Пользуясь понятием дифференциала, вычислить приближенно $\sqrt[3]{2}$.

Задание 12

Вычислить дифференциал функции $f(x) = -ln\left|\sqrt{x-1} - \sqrt{x+1}\right|$ в точке $x = \sqrt{2}$. В ходе решения производную максимально упростить.

Задание 13

Вычислить приближенно приращение функции $y = x^2 + 5x + 8$ при изменении x от значения 2 до значения 2,02.

Задание 14

Известно, что затраты ТС фирмы изменяются по закону $TC = 3q^2 + 2q - 11$, где q – объёмы реализации. Найти приблизительно затраты при q= 500 т. шт./мес.

Задание 15

Затраты на снаряжение самолета в полет составляют $TC = 1000 + 0{,}25s^2 + 0{,}35$, где s – расстояние полета. Определить прибыль от сокращения маршрута на $\Delta s = 38{,}43$ км, если ранее он составлял 1300 км.

4.4. Функции многих переменных

Производные и дифференциалы высших порядков

Задание 1

Найти вторую производную от функции $y = 2x - 1$.

Решение:

Для того чтобы найти вторую производную, как многие догадались, нужно сначала найти первую производную:

$y' = (2x - 1)' = 2.$

Теперь находим вторую производную:

$y'' = (y')' = (2)' = 0.$

Задание 2

Найти дифференциал второго порядка d^2u функции $f(u) = \sqrt{u}$, где $u(x)=3x+7$ и x – независимая переменная.

Задание 3

Найти d^3z, если $z = e^y sinx$.

Задание 4

Найти $y^{(10)}$ для функции $y = ln(2x\text{-}1)$.

Задание 5

Записать формулу производной n-го порядка для функции $y = ln(4 -$
$- 2x)$.

Задание 6

Найти дифференциал шестого порядка d^6y функции $y = cos2x$.

Задание 7

Записать формулу производной n-го порядка для функции $y = \frac{4x+7}{2x+3}$.

Задание 8

Найти дифференциал десятого порядка $d^{10}y$ функции $y = \sin 2x$.

Задание 9

Найти дифференциал третьего порядка d^3y функции $y = (5x + 1) \cdot 4^x$.

Задание 10

Найти дифференциалы 1-го и 2-го порядков следующей функции: $y = x^3 + 3x^2 - x^3$.

Задание 11

Найти дифференциал третьего порядка d^3y функции $y = x^4 sin5x$.

Задание 12

Найти дифференциалы 1-го и 2-го порядков функции $y = x^3 + 3xlnx$.

Задание 13

Найти дифференциалы 1-го и 2-го порядков функции $y = tgx + ctgx$

Задание 14

Найти дифференциалы 1-го и 2-го порядков функции $y = xln\frac{1}{x}$.

Задание 15

Найти дифференциалы 1-го и 2-го порядков функции $y = (x + cosx)e^x$.

Дифференцирование неявных и параметрически заданных функций. Основные теоремы дифференциального исчисления

Задание 1

Найти производную функции заданной неявно

$$\log_4\left(\frac{4x^2}{y}\right) = 4.$$

Решение:

Продифференцируем левую и правую часть данного уравнени учитывая, что y функция от x и производная от неё берется как от сложно функции:

$$\log_4\left(\frac{4x^2}{y}\right)' = (4)'.$$

Сначала в левой части равенства берем производную как о логарифмической функции, а в правой части равенства производна константы равна нулю:

$$\frac{1}{\left(\frac{4x^2}{y}\right)ln4} \cdot \left(\frac{4x^2}{y}\right)' = 0\,.$$

По правилу дифференцирования частного

$$\frac{y}{4x^2 ln4} \cdot \frac{8xy - 4x^2 y'}{y^2} = 0 .$$

Выразим из полученного уравнения y':

$$\frac{y \cdot 8xy}{4x^2 y^2 ln4} - \frac{4x^2 yy'}{4x^2 y^2 ln4} = 0$$

$$\frac{2}{xln4} - \frac{y'}{yln4} = 0$$

$$y' = \frac{2yln4}{xln4}$$

$$y' = \frac{2y}{x}.$$

Ответ: $y' = \frac{2y}{x}$.

Задание 2

Найти производную от функции, заданной неявно: $3x^4 y^5 + e^{7x-4y} = = 4x^5 + 2y^4$.

Задание 3

Найти производную от функции, заданной параметрически: $\begin{cases} x = \sqrt{2t - t^2} \\ y = arcsin(t-1) \end{cases}$.

Задание 4

Вычислить производную y'_x, если дифференцируемая функция $y = = y(x)$ задана неявно равенством $x^3 y + xy^3 + 3x^2 + 3y^2 + e^{xy} = 0$.

Задание 5

Найти дифференциал функции $y = y(x)$, заданной неявно равенством $x^2 + y^2 + \sqrt{xy} = 0$.

Задание 6

Найти вторую производную $y''(x)$ неявной функции $x^2 + xy^2 = 1$.

Задание 7

Найти производную y'_x от функции, заданной параметрически: $\begin{cases} x = t - sint \\ y = 2 - cost \end{cases}$.

Задание 8

Найти вторую производную y''_{xx} от функции, заданной параметрически:
$\begin{cases} x = cos2t \\ y = \frac{2}{cos^2 t} \end{cases}$.

Задание 9

Найти вторую производную y''_{xx} от функции, заданной параметрически: $\begin{cases} x = lnt \\ y = arctgt \end{cases}$.

Задание 10

Найти вторую производную y''_{xx} от функции заданной параметрически: $\begin{cases} x = 3 + cos^2 t \\ y = ctg^2 t - 2 \end{cases}$.

Задание 11

Найти вторую производную y''_{xx} от функции, заданной параметрически:
$\begin{cases} x = \frac{t^2}{2} \\ y = arctgt \end{cases}$.

Задание 12

Найти вторую производную y''_{xx} от функции, заданной параметрически:
$\begin{cases} x = \ln(tgt) \\ y = \frac{1}{sin^2 t} \end{cases}$.

Задание 13

Найти производную y'_x от функции, заданной параметрически:
$\begin{cases} x = ln^2(1 - 3t) \\ y = \ln(sin^2 5t) \end{cases}$.

Задание 14

Найти производную y'_x от функции, заданной параметрически:
$\begin{cases} x = 6sintcos4t \\ y = 3cost - tsint \end{cases}$.

Задание 15

Найти производную y'_x от функции, заданной параметрически:
$\begin{cases} x = t - sint \\ y = 2 - cost \end{cases}$.

Правило Лопиталя. Формулы Тейлора и Маклорена

Задание 1

Найти предел, используя правило Лопиталя $\lim\limits_{x\to 0}\frac{1-\cos 4x}{x^2}$.

Решение:

$$\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos 4x}{x^2}=\left|\frac{0}{0}\right|=\lim\nolimits_{x\to 0}\frac{4\sin 4x}{2x}=\lim\nolimits_{x\to 0}\frac{16\cos 4x}{2}=8.$$

Ответ: 8.

Задание 2

Найти предел, используя правило Лопиталя $\lim\limits_{x\to 0}\frac{1-cos6x}{2x^2}$.

Задание 3

Найти предел, используя правило Лопиталя

$$\lim_{x\to 0}\frac{\ln x}{1+2\ln\sin x}.$$

Задание 4

Найти число e с точностью до 0,001.

Задание 5

Найти предел, используя правило Лопиталя $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{e^x}{x^2}$.

Задание 6

Найти предел, используя правило Лопиталя $\lim\limits_{x\to 0}\frac{e^x-e^{-x}-2x}{x-sinx}$.

Задание 7

Вычислить предел функции с помощью правила Лопиталя $\lim\limits_{x\to 0}(xln^2x)$.

Задание 8

Вычислить предел функции с помощью правила Лопиталя $\lim\limits_{x\to 0}x^{sinx}$.

Задание 9

Вычислить предел $\lim\limits_{x\to 0}(1+\frac{1}{3x})^{4x}$.

Задание 10

Пользуясь формулой Тейлора, вычислить с точностью до 10^{-4} приближенное значение $\sqrt[5]{33}$.

Задание 11

Написать формулу Тейлора второго порядка для функции $f(x) = e^{x}$ при $x_0 = 2$.

Задание 12

Пользуясь формулой Тейлора, вычислить с точностью до 10^{-3} приближенное значение $sin\ 20^{\circ}$.

Задание 13

Написать формулу Тейлора второго порядка для функции $f(x) = \sqrt{x}$ при $x_0 = 1$.

Задание 14

Записать многочлен Тейлора функции $y = \frac{1}{x}$ в точке $x_0 = 1$.

Задание 15

Пользуясь формулой Тейлора, вычислить с точностью до 10^{-3} приближенное значение $arcsin\ 0{,}5$.

ТЕМА 5. ИНТЕГРАЛЬНОЕ ИСЧИСЛЕНИЕ ФУНКЦИЙ ОДНОЙ И НЕСКОЛЬКИХ ПЕРЕМЕННЫХ

5.1. Первообразная и неопределенный интеграл

Задание 1

Найти первообразную для функции $f(x) = 2x$;

Решение

Так как $(x^2)' = 2x$, то, по определению, функция $F(x) = x^2$ будет являться первообразной для функции $f(x) = 2x$.

Задание 2

Найти первообразную для функции $f(x) = sin(3x - 2)$;

Задание 3

Вычислить неопределенный интеграл.

$$\int x^5 dx.$$

Задание 4

Вычислить неопределенный интеграл.

$$\int \frac{dx}{\sqrt{3 - 2x^2}}.$$

Задание 5

Вычислить неопределенный интеграл.

$$\int (\sqrt{x} + \sqrt[3]{x})dx.$$

Задание 6

Вычислить неопределенный интеграл.

$$\int \left(\frac{1}{x} + x^2 \ln 5 - \frac{2}{\sqrt{x}} + \frac{4}{\sqrt{1 - x^2}}\right) dx.$$

Задание 7

Вычислить неопределенный интеграл.

$$\int \frac{\pi dx}{\sqrt{a^2 - x^2}}.$$

Задание 8

Вычислить неопределенный интеграл.

$$\int \frac{(1 - x)^3}{x\sqrt[3]{x}} dx.$$

Задание 9

Вычислить неопределенный интеграл.

$$\int \frac{\left(\sqrt{2x} - \sqrt[3]{3x}\right)^2}{x} dx.$$

Задание 10

Вычислить неопределенный интеграл.

$$\int \left(1 - \frac{1}{x^2}\right) \sqrt{x\sqrt{x}}dx.$$

Задание 11

Вычислить неопределенный интеграл.

$$\int (1 + \sin x + \cos x)\, dx.$$

Задание 12

Вычислить неопределенный интеграл.

$$\int 5^{2x}\, dx.$$

Задание 13

Вычислить неопределенный интеграл.

$$\int \frac{2 - \sqrt{1 - x^2}}{\sqrt{1 - x^2}} dx.$$

Задание 14

Вычислить неопределенный интеграл.

$$\int \frac{x + 1}{\sqrt{x}} dx.$$

Задание 15

Вычислить неопределенный интеграл.

$$\int \frac{(1 - x)^3}{x\sqrt[3]{x}} dx.$$

<u>Интегрирование методом подстановки</u>

Задание 1

Найти неопределенный интеграл $\int \frac{dx}{x+\sqrt{x}}$.

Решение

$$\int \frac{dx}{x + \sqrt{x}} = (\text{положим } x = t^2, \text{тогда } dx = 2tdt) =$$
$$\int \frac{2dt}{t^2 + t} = 2 \int \frac{dt}{t + 1} = 2ln|t + 1| + C = 2ln\left|\sqrt{x} + 1\right| + C.$$

Задание 2

Найти неопределенный интеграл.

$$\int \frac{dx}{5 - 2x}.$$

Задание 3

Найти неопределенный интеграл.

$$\int cos\frac{x}{2}dx.$$

Задание 4

Найти неопределенный интеграл.

$$\int 4^{5x}dx.$$

Задание 5

Найти неопределенный интеграл.

$$\int \sin(3x+1)\,dx.$$

Задание 6

Найти неопределенный интеграл.

$$\int \frac{dx}{\sqrt[3]{(3-4x)^2}}dx.$$

Задание 7

Найти неопределенный интеграл.

$$\int \frac{\sqrt[3]{\ln(3x+1)}}{3x+1}dx.$$

Задание 8

Найти неопределенный интеграл.

$$\int \frac{x^5}{\sqrt{1-x^2}}dx.$$

Задание 9

Найти неопределенный интеграл.

$$\int x^5(2-5x^3)^{\frac{2}{3}}dx.$$

Задание 10

Найти неопределенный интеграл.

$$\int \cos^5 x\sqrt{\sin x}\,dx.$$

Задание 11

Найти неопределенный интеграл.

$$\int \frac{dx}{e^{\frac{x}{2}} + e^{x}}.$$

Задание 12

Найти неопределенный интеграл.

$$\int \frac{\ln x\, dx}{x + \sqrt{1 + \ln x}}.$$

Задание 13

Найти неопределенный интеграл.

$$\int \frac{dx}{x\sqrt{x^2 - 1}}, \text{при } (\mathrm{x} > 0).$$

Задание 14

Найти неопределенный интеграл.

$$\int \frac{\operatorname{arctg}\sqrt{x}}{\sqrt{x}} \cdot \frac{dx}{1 + x}.$$

Задание 15

Найти неопределенный интеграл.

$$\int \sqrt{\frac{a + x}{a - x}}\, dx.$$

<u>Интегрирование по частям</u>

Задание 1

Найти неопределенный интеграл.

$$\int \ln x\, dx.$$

Решение:

$$\int \ln x\, dx = \left(\begin{matrix} u = \ln x \\ dv = dx \end{matrix} \middle| \begin{matrix} du = \dfrac{dx}{x} \\ v = x \end{matrix} \right) = x \ln x - \int x \cdot \frac{dx}{x} =$$

$$= x \ln x - \int dx = x \ln x - x + C.$$

Задание 2

Найти неопределенный интеграл.

$$\int \ln(x+1)\,dx.$$

Задание 3

Найти неопределенный интеграл.

$$\int xe^x dx.$$

Задание 4

Найти неопределенный интеграл.

$$\int x\cos 6x\,dx.$$

Задание 5

Найти неопределенный интеграл.

$$\int (x^3-1)\mathrm{tg}^2 x dx.$$

Задание 6

Найти неопределенный интеграл.

$$\int x^2 \mathrm{arctg} x dx.$$

Задание 7

Найти неопределенный интеграл.

$$\int e^x \sin x\,dx.$$

Задание 8

Найти неопределенный интеграл.

$$\int \frac{\ln^2 x}{x^2} dx.$$

Задание 9

Найти неопределенный интеграл.

$$\int x \ln \frac{1+x}{1-x} dx.$$

Задание 10

Найти неопределенный интеграл.

$$\int \operatorname{arctg} \sqrt{x} dx.$$

Задание 11

Найти неопределенный интеграл.

$$\int \sin x \ln(\operatorname{tg} x)\, dx.$$

Задание 12

Найти неопределенный интеграл.

$$\int x \sin^x 2x\, dx.$$

Задание 13

Найти неопределенный интеграл.

$$\int \frac{1}{x^3} \sin \frac{1}{x}\, dx.$$

Задание 14

Найти неопределенный интеграл.

$$\int \frac{x \sin x}{\cos^3 x} dx.$$

Задание 15

Найти неопределенный интеграл.

$$\int \ln(x + \sqrt{1 + x^2})\, dx.$$

Интегрирование рациональных функций

Задание 1

Вычислить интеграл

$$\int \frac{2x + 3}{x^2 - 9}.$$

Решение:

Разложим подынтегральное выражение на простейшие дроби:

$$\frac{2x + 3}{x^2 - 9} = \frac{2x + 3}{(x - 3)(x + 3)} = \frac{A}{x - 3} + \frac{B}{x + 3};$$

Сгруппируем слагаемые и приравняем коэффициенты при членах с одинаковыми степенями:

$$A(x + 3) + B(x - 3) = 2x + 3, \Rightarrow Ax + 3A + Bx - 3B = 2x + 3,$$
$$\Rightarrow (A + B)x + 3A - 3B = 2x + 3.$$

Следовательно,

$$\begin{cases} A + B = 2 \\ 3A - 3B = 3 \end{cases}, \Rightarrow \begin{cases} A = \dfrac{3}{2} \\ B = \dfrac{1}{2} \end{cases}.$$

Тогда

$$\frac{2x + 3}{x^2 - 9} = \frac{\frac{3}{2}}{x - 3} = \frac{\frac{1}{2}}{x + 3};$$

Теперь вычислим исходный интеграл

$$\int \frac{2x + 3}{x^2 - 9} dx = \frac{3}{2} \int \frac{dx}{x - 3} + \frac{1}{2} \int \frac{dx}{x + 3} = \frac{3}{2} \ln|x - 3| + \frac{1}{2} \ln|x + 3| + C.$$

Задание 2

Вычислить интеграл

$$\int \frac{x^2 - 2}{x + 1} dx.$$

Задание 3

Вычислить интеграл

$$\int \frac{dx}{x^2 + 4x + 8}.$$

Задние 4

Вычислить интеграл

$$\int \frac{x^2 dx}{(x-1)(x-2)(x-3)}.$$

Задание 5

Вычислить интеграл

$$\int \frac{dx}{x^3 + 1}.$$

Задание 6

Вычислить интеграл

$$\int \frac{x^4 + 1}{x^3 + 1} dx.$$

Задание 7

Вычислить интеграл

$$\int \frac{4x^4 + 8x^3 - 3x - 3}{x^3 + 2x^2 + x} dx.$$

Задание 8

Вычислить интеграл

$$\int \frac{x^2 - 19x + 6}{(x-1)(x^2 + 5x + 6)} dx.$$

Задание 9

Вычислить интеграл

$$\int \frac{x^2 - 6x + 8}{x^3 + 8} dx.$$

Задание 10

Вычислить интеграл

$$\int \frac{x^3 - 3}{(x-1)(x^2-1)} dx.$$

Задание 11

Вычислить интеграл

$$\int \frac{x+2}{(x^2+6x+10)^2} dx.$$

Задание 12

Вычислить интеграл

$$\int \frac{x^4 + 2x^2 + 8x + 5}{(x^2+2)(x-1)^2(x+2)} dx.$$

Задание 13

Вычислить интеграл

$$\int \frac{x^4 - 4x^3 + x^2 + 16x - 11}{(x-1)\,(x+2)(x-3)} dx.$$

Задание 14

Вычислить интеграл

$$\int \frac{2x^3 - 40x - 8}{x^3 + 2x^2 - 8x} dx.$$

Задание 15

Вычислить интеграл

$$\int \frac{x^3 + x - 1}{(x^2+2)^2} dx.$$

Интегрирование тригонометрических функций

Задание 1

Найти неопределённый интеграл

$$\int \sin 5x \sin 7x \, dx\,.$$

Решение:

В подынтегральном выражении находится произведение двух функций. В данном случае используем тригонометрическую формулу

$$\sin x \sin y = \frac{\cos(x-y) - \cos(x+y)}{2};$$

которая превращает произведение в сумму.

$$\int \sin 5x \sin 7x \, dx = \int \frac{\cos(5x-7x)-\cos(5x+7x)}{2} dx;$$

Используем свойства линейности неопределённого интеграла – интеграл от суммы равен сумме интегралов; константу выносим за знак интеграла. Под интегралами остаются простейшие из сложных функций, интегралы от которых удобнее найти методом подведения под знак дифференциала, а так же с помощью табличных формул.

$$\int \frac{\cos(5x-7x)-\cos(5x+7x)}{2} dx = \frac{1}{2}\int \cos 2x \, dx - \frac{1}{2}\int \cos 12x \, dx =$$

$$= \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}\int \cos 2x \, d(2x) - \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{12}\int \cos 12x \, d(12x) = \frac{\sin 2x}{4} - \frac{\sin 12x}{24} +$$

$+ C$, где $C = const$.

Задание 2

Найти неопределённый интеграл

$$\int \sin\frac{x}{2}\cos\frac{x}{4} \, dx.$$

Задание 3

Найти неопределённый интеграл

$$\int tgx \, dx.$$

Задание 4

Найти неопределённый интеграл

$$\int ctg 2x \, dx.$$

Задание 5

Найти неопределённый интеграл

$$\int ctg^2 x \, dx.$$

Задание 6

Найти неопределённый интеграл

$$\int tg^2\frac{x}{2} \, dx.$$

Задание 7

Найти неопределённый интеграл

$$\int \cos^2 x \, dx.$$

Задание 8

Найти неопределённый интеграл

$$\int sin^2\frac{3x}{2}dx.$$

Задание 9

Найти неопределённый интеграл

$$\int sin^4x\,dx.$$

Задание 10

Найти неопределённый интеграл

$$\int sin^2xcos^2x\,dx.$$

Задание 11

Найти неопределённый интеграл

$$\int\frac{dx}{3+2\cos x-\sin x}.$$

Задание 12

Найти неопределённый интеграл

$$\int\frac{dx}{5-3\cos x}.$$

Задание 13

Найти неопределённый интеграл

$$\int\frac{dx}{4sin^2x-5cos^2x}.$$

Задание 14

Найти неопределённый интеграл

$$\int\cos x\cos 2x\cos 5x\,dx.$$

Задание 15

Найти неопределённый интеграл

$$\int sin^2 3x\,dx.$$

<u>Интегрирование некоторых иррациональных функций</u>

Задание 1

Найти неопределённый интеграл

$$\int\frac{dx}{\sqrt{x}(x+3)}.$$

Решение:

Производим замену переменной. Выносим константу за пределы интеграла; числитель и знаменатель сокращаем на t. Выделяем квадрат в знаменателе, получившийся интеграл является табличным. Интегрируем по таблице. Производим обратную замену.

$$\int \frac{\mathrm{dx}}{\sqrt{\mathrm{x}}(\mathrm{x}+3)} = [x = t^2 \Rightarrow dx = 2tdt] = \int \frac{2tdt}{t(t^2+3)} =$$

$$= 2\int \frac{dt}{t^2+3} = 2\int \frac{dt}{(\sqrt{3})^2+t^2} = \frac{2}{\sqrt{3}} arctg \frac{t}{\sqrt{3}} + C = [t = \sqrt{x}] =$$

$$= \frac{2}{\sqrt{3}}\, arctg \sqrt{\frac{x}{3}} + C, \text{где } C = const.$$

Задание 2

Найти неопределённый интеграл

$$\int \frac{dx}{\sqrt{x}+3}.$$

Задание 3

Найти неопределённый интеграл

$$\int \frac{\sqrt{x+2}dx}{x-3}.$$

Задание 4

Найти неопределённый интеграл

$$\int \frac{dx}{\sqrt[3]{5x+3}+1}.$$

Задание 5

Найти неопределённый интеграл

$$\int \frac{\left(x+\sqrt{x}+\sqrt[3]{x^2}\right)dx}{x\,(1+\sqrt[3]{x})}.$$

Задание 6

Найти неопределённый интеграл

$$\int \frac{\sqrt{x}\,dx}{1-\sqrt[4]{x}}.$$

Задание 7

Найти неопределённый интеграл

$$\int \frac{\sqrt{\mathrm{x}^2-1}\,\mathrm{dx}}{\mathrm{x}}$$

Задание 8

Найти неопределённый интеграл

$$\int \frac{x^3dx}{\sqrt{x^2 + 4}}$$

Задание 9

Найти неопределённый интеграл

$$\int \frac{\sqrt{x^2 + 4}\,dx}{x^2}$$

Задание 10

Найти неопределённый интеграл

$$\int \frac{dx}{\sqrt{(x^2 - 1)^3}}$$

Задание 11

Найти неопределённый интеграл

$$\int \frac{dx}{\sqrt{x+1} + \sqrt{x-1}}$$

Задание 12

Найти неопределённый интеграл

$$\int \frac{dx}{\sqrt{5 - x^2 - 4x}}$$

Задание 13

Найти неопределённый интеграл

$$\int \frac{dx}{\sqrt{1 - 2x - x^2}}$$

Задание 14

Найти неопределённый интеграл

$$\int \frac{dx}{\sqrt{2 + 3x - 2x^2}}$$

Задание 15

Найти неопределённый интеграл

$$\int \frac{dx}{\sqrt{4x - x^2}}$$

5.2. Определенный интеграл

Определённый интеграл. Формула Ньютона-Лейбница

Задание 1

Вычислить определённый интеграл

$$\int_1^2 2x^2\,dx$$

Решение:

Выносим константу за знак интеграла. Интегрируем по таблице. Используя формулу Ньютона-Лейбница, сначала подставляем в x^3 верхний предел, затем нижний. Проводим дальнейшие вычисления и получаем окончательный ответ.

$$\int_1^2 2x^2\,dx = 2\int_1^2 x^2\,dx = \frac{2}{3}(x^3)\Big|_1^2 = \frac{2}{3}(2^3 - 1^3) = \frac{2}{3}(8-1) = \frac{2}{3}\cdot 7 = 4\frac{2}{3}$$

Задание 2

Вычислить определённый интеграл

$$\int_0^8 \sqrt[3]{x}\,dx$$

Задание 3

Вычислить определённый интеграл

$$\int_1^2 e^{2x}dx$$

Задание 4

Вычислить определённый интеграл

$$\int_1^5 \frac{7dx}{x}$$

Задание 5

Вычислить определённый интеграл

$$\int_{-2}^4 (8+2x-x^2)dx$$

Задание 6

Вычислить определённый интеграл

$$\int_1^3 \left(x+\frac{3}{x}\right)dx$$

Задание 7

Вычислить определённый интеграл

$$\int_{-3}^{1} (2x^2 + 3x - 1)dx$$

Задание 8

Вычислить определённый интеграл

$$\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} cos^2\varphi\, d\varphi$$

Задание 9

Вычислить определённый интеграл

$$\int_{0}^{\sqrt{3}} \frac{xdx}{\sqrt{x^4 + 16}}$$

Задание 10

Вычислить определённый интеграл

$$\int_{0}^{1} \frac{x + x^2 - x^3 - 1}{(1 + x^2)} dx$$

Задание 11

Вычислить определённый интеграл

$$\int_{0}^{\frac{\pi}{2}} sin^3 2\varphi\, d\varphi$$

Задание 12

Вычислить определённый интеграл

$$\int_{\frac{x}{2}}^{x} \frac{sinx \cdot xdx}{cos^2x + 1}$$

Задание 13

Вычислить определённый интеграл

$$\int_{0}^{\frac{x}{4}} xtg^2x \cdot xdx$$

Задание 14

Вычислить определённый интеграл

$$\int_{1}^{3} \frac{dx}{(1+x)^3}$$

Задание 15

Вычислить определённый интеграл

$$\int_{0}^{a} (x^2 - ax)dx$$

Замена переменной и интегрирование по частям в определённым интеграле

Задание 1

Вычислить определённый интеграл

$$\int_{0}^{\sqrt{3}} \frac{x\,dx}{\sqrt{x^4 + 16}}$$

Решение:

Сначала готовим интеграл к замене.

$$\int_{0}^{\sqrt{3}} \frac{x\,dx}{\sqrt{x^4 + 16}} = \int_{0}^{\sqrt{3}} \frac{x\,dx}{\sqrt{(x^2)^2 + 16}}$$

Напрашивается замена $t = x^2$. Соответственно $dt = 2xdx \Rightarrow xdx = \frac{dt}{2}$.

Находим новые пределы интегрирования: $t_1 = 0^2 = 0;\ t_2 = \sqrt{3}^2 = 3.$

В соответствии с заменой записываем новый интеграл с новыми пределами интегрирования. Это простейший табличный интеграл, интегрируем по таблице. Используем формулу Ньютона-Лейбница.

$$\int_{0}^{\sqrt{3}} \frac{x\,dx}{\sqrt{(x^2)^2 + 16}} = \frac{1}{2}\int_{0}^{3} \frac{dt}{\sqrt{t^2 + 16}} = \frac{1}{2}\left(ln\left|t + \sqrt{t^2 + 16}\right|\right)\Big|_0^3 =$$

$$= \frac{1}{2}\left(ln\left(3 + \sqrt{25}\right) - ln\left(0 + \sqrt{0+16}\right)\right) = \frac{1}{2}(ln8 - ln4) = \frac{1}{2}ln\left(\frac{8}{4}\right) = \frac{ln2}{2}$$

Задание 2

Вычислить определённый интеграл

$$\int_{-4}^{0} (x^2 + 7x + 12)cosxdx$$

Задание 3

Вычислить определённый интеграл

$$\int_{-2}^{0}(x^2-4)cos3xdx$$

Задание 4

Вычислить определённый интеграл

$$\int_{0}^{\frac{x}{4}}x\,tg^2x\,dx$$

Задание 5

Вычислить определённый интеграл

$$\int_{-1}^{0}(x^2+4x+3)cosxdx$$

Задание 6

Вычислить определённый интеграл

$$\int_{0}^{\frac{\pi}{2}}\frac{cos\,x\,dx}{6-5\,sin\,x+\ sin^2x}$$

Задание 7

Вычислить определённый интеграл

$$\int_{1}^{2}x\sqrt{2-x}dx$$

Задание 8

Вычислить определённый интеграл

$$\int_{\sqrt{2}}^{2}x^2\sqrt{8-2x^2}dx$$

Задание 9

Вычислить определённый интеграл

$$\int_{-2}^{0}(x+2)^2cos3xdx$$

Задание 10

Вычислить определённый интеграл

$$\int_{-2}^{2}\sqrt{27-3x^2}dx$$

Задание 11

Вычислить определённый интеграл

$$\int_{-4}^{0}(x^2+7x+12)cosxdx$$

Задание 12

Вычислить определённый интеграл

$$\int_{1}^{2}\frac{x\,dx}{(1+x)^2\sqrt{2+\ x^2}}$$

Задание 13

Вычислить определённый интеграл

$$\int_{0}^{2}\sqrt{2x-\ x^2\,dx}$$

Задание 14

Вычислить определённый интеграл

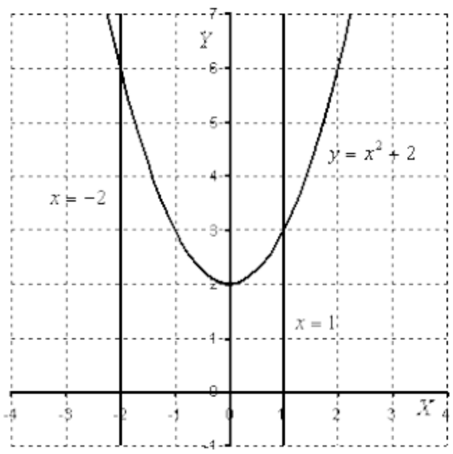
$$\int_{0}^{\frac{\pi}{6}}\frac{\sin x\,dx}{3+\sin 2x}$$

Задание 15

Вычислить определённый интеграл

$$\int_{1}^{2}(x-3)e^{x-1}dx$$

<u>Вычисление площадей плоских фигур</u>



Задание 1

Вычислить площадь фигуры, ограниченной линиями $y=x^2+2, y=0, x=\ -2, x=1$.

Решение:

Выполним чертёж.

В данном случае очевидно, о какой площади идёт речь.

На отрезке $[-2;1]$ график функции $y = x^2 + 2$ расположен над осью Оx, поэтому:

$$S = \int_{-2}^{1}(x^2 + 2)dx = \left(\frac{x^3}{3} + 2x\right)\Big|_{-2}^{1} = \frac{1}{3} + 2 - \left(-\frac{8}{3} - 4\right) = 9 \text{ (кв. ед.)}.$$

Задание 2

Вычислить площадь фигуры, ограниченной линиями $y = x^2 - 8x + 18$ и $y = -2x + 18$

Задание 3

Вычислить площадь фигуры, ограниченной линиями $y = \sqrt{2x - 1}, y = 0, x = 5$

Задание 4

Найти площадь плоской фигуры, ограниченной линиями $y = 2x - x^2, y = -x$

Задание 5

Найти площадь фигуры, ограниченной линиями $y = x^2 - 2, y = 2x + 1$.

Задание 6

Найти площадь фигуры, ограниченной линиями $x + y = 4, xy = 3$.

Задание 7

Вычислить площадь фигуры, ограниченной линиями $y = x^2 - 4x + 3, y = x - 2$

Задание 8

Вычислить площадь фигуры, ограниченной линиями

$$3x^2 + 4y = 0, 2x + 4y + 1 = 0.$$

Задание 9

Вычислить площадь фигуры, ограниченной линиями $y = x^2 - 2, y = 2x + 1$

Задание 10

Вычислить площадь фигуры, ограниченной линиями $y = \sin^3 x, y = 0, 0 \leq x \leq \pi$

Задание 11

Вычислить площадь фигуры, ограниченной линиями $y = arcctg\, x$, $x = 1$ и координатными осями.

Задание 12

Вычислить площадь фигуры, ограниченной линиями $y = ln\, x, x = e, x = e^2, y = 0$.

Задание 13

Вычислить площадь фигуры, ограниченной линиями $y = x^2 + 2x, y = x + 2$.

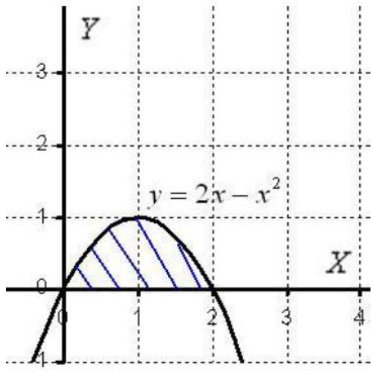
Задание 14

Вычислить площадь фигуры, ограниченной линиями $y = 3 + 2x - x^2$ и осью Оx.

Задание 15

Вычислить площадь фигуры, ограниченной линиями $y = 6x - x^2, y = 0$.

Вычисление объёмов тел



Задание 1

Вычислить объем тела, полученного вращением фигуры, ограниченной линиями $y = 2x - x^2, y = 0$ вокруг оси Оx.

Решение:

Выполним чертёж.

Искомая фигура заштрихована синим цветом, именно она и вращается вокруг оси Оx.

Вычислим объем тела вращения, используя форм

$$V = \pi \int_a^b f^2(x)dx:$$

$$V = \pi \int_0^2 (2x - x^2)^2 d = \pi \int_0^2 (4x^2 - 4x^3 + x^4)dx =$$

$$= \pi\left(\frac{32}{2} - 16 + \frac{32}{5} - 0\right) = \frac{16}{15}\pi \text{ (куб. ед.).}$$

Задание 2

Найти объем тела, образованного вращением вокруг оси Оx фигуры, ограниченной линиями $2x - y - 2 = 0, y = 0, x = 3$.

Задание 3

Вычислить объем тела, полученного при вращении вокруг оси абсцисс фигуры, ограниченной линиями $y = 2x + 1, y = x + 4, x = 0$ и $x = 1$.

Задание 4

Вычислить объем тела, образованного вращением относительно оси Оx плоской фигуры, ограниченной линиями

$y = sin\frac{x}{2}, y = cos\frac{x}{2}$, где $0 \leq x \leq \frac{\pi}{2}$.

Задание 5

Дана плоская фигура, ограниченная линиями

$y = 3 + \sqrt{x}, y = 3 - \sqrt{x}, y = x + 1$.

Найти объем тела, полученного вращением плоской фигуры, ограниченной данными линиями, вокруг оси Оy.

Задание 6

Дана плоская фигура, ограниченная линиями $x = 2, y = -ln$ x и осью Ox. Вычислить объем тела, полученного вращением плоской фигуры, ограниченной данными линиями, вокруг оси Oy.

Задание 7

Вычислить объем тела, образованного вращением вокруг оси Oy фигуры, ограниченной кривыми $y = \frac{2}{1+x^2}$ и $y = x^2$.

Задание 8

Вычислить объем тела, полученного вращением криволинейной трапеции, ограниченной линиями $y^2 = 6x, x = 2$ и осью Ox вокруг оси Ox.

Задание 9

Вычислить объем тела, полученного вращением криволинейной трапеции, ограниченной линиями $2y = x^2, 2x + 2y - 3 = 0$ вокруг оси Ox.

Задание 10

Вычислить объем тела, полученного вращением криволинейной трапеции, ограниченной линиями $y = e^{-2x} - 1, y = e^{-x} + 1, x = 0$ вокруг оси Oy.

Задание 11

Вычислить объем тела, полученного вращением криволинейной трапеции, ограниченной линиями $y = x, y = x + sin^2x\ (0 \le x \le \pi)$ вокруг оси Oy.

Задание 12

Вычислить объем тела, полученного вращением криволинейной трапеции, ограниченной линией $y^2 = 4 - x, x = 0$ вокруг оси Oy.

Задание 13

Вычислить объем тела, полученного вращением криволинейной трапеции, ограниченной линиями $y = sin\,x$, осью Oy и прямой $y = \frac{1}{2}$ вокруг оси Oy.

Задание 14

Вычислить объем тела, образованного вращением вокруг оси Ox криволинейной трапеции, ограниченной линией

$$\begin{cases} x(t) = ln\,t \\ y(t) = \sqrt{2t+3} \end{cases}, \text{ если } 2 \le t \le 3.$$

Задание 15

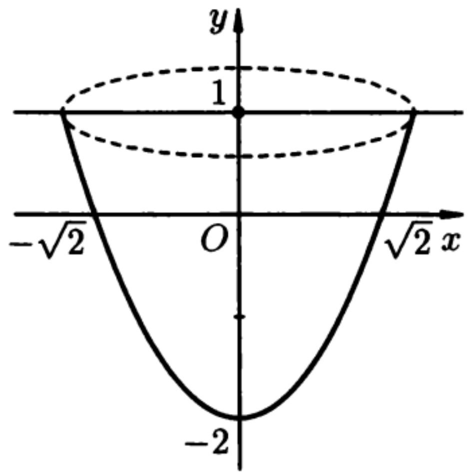
Вычислить объем тела, образованного вращением вокруг оси Ox эллипса $\begin{cases} x(t) = a\,cos\,t \\ y(t) = b\,sin\,t \end{cases}$

Вычисление длин дуг и площадей поверхностей

Задание 1

Найти площадь поверхности, образованной вращением кривой $x^2 = y + 2, y = 1$ вокруг оси Oy.

Решение:



Воспользуемся формулой

$$S_y = 2\pi \int_c^d |x| \sqrt{1 + \left(\varphi'(y)\right)^2} dy$$

где c и d ординаты начала и конца дуги.

Имеем:

$$2xx' = 1, x' = \frac{1}{2x},$$

$$\sqrt{1 + \left(x'_y\right)^2} = \sqrt{1 + \frac{1}{4x^2}} = \sqrt{1 + \frac{1}{4(y+2)}} = \frac{\sqrt{4y+9}}{2\sqrt{y+2}}.$$

$$S_y = 2\pi \int_{-2}^{1} \frac{\sqrt{y+2}\sqrt{4y+9}}{2\sqrt{y+2}} dy = \pi \int_{-2}^{1} \sqrt{4y+9} dy = \frac{\pi}{6}\left(13\sqrt{13} - 1\right) \text{ (кв.ед.)}$$

Задание 2

Найти длину дуги кривой $y = -x^2 + 2x$ от вершины до точки с абсциссой $x = 2$.

Задание 3

Вычислить длину полукубической параболы $y^2 = x^3$ между точками с абсциссами $x = 1$ и $x = 2$.

Задание 4

Вычислить длину дуги кривой $y = \ln x$ от $x = \sqrt{8}$ до $x = \sqrt{15}$.

Задание 5

Найти длину дуги кривой $y^2 = 16x$, отсеченной прямой $x = 4$.

Задание 6

Вычислить длину дуги параболы $y = x^2$ от точки $A(1; 1)$ до точки $B(2; 4)$.

Задание 7

Вычислить площадь поверхности, образованной вращением дуги кривой $r = cos^2\varphi$ вокруг полярной оси, $0 \le \varphi \le \frac{\pi}{2}$.

-

Задание 8

Вычислить площадь поверхности, образованной вращением дуги параболы $y^2 = 2x$, $x \in [0; 4\,]$ вокруг оси Ox.

Задание 9

Вычислить площадь поверхности, образованной вращением одной арки циклоиды $x = a(t - \sin t)$, $y = a(1 - cost)$ вокруг оси Ox.

Задание 10

Вычислить площадь поверхности, образованной вращением дуги кривой

$y = \frac{1}{3}x^3$ от $x = -1$ до $x = 1$ вокруг оси Ox.

Задание 11

Найти площадь фигуры, ограниченной кривой $y = \sin x$, прямыми $x = -\frac{7}{6}\pi$, $x = \frac{\pi}{4}$, $y = 0$.

Задание 12

Вычислить площадь фигуры, ограниченной линиями $y = -x^3$, $y = -9x$.

Задание 13

Найти площади фигур, ограниченных линиями $y^2 = 2x + 1$, $y = x - 1$.

Задание 14

Вычислить площадь фигуры, ограниченной линиями $y = x^2$, $y = 2x$, $y = x$.

Задание 15

Найти площади фигур, ограниченных линиями $y = x^2 - 2x + 3$, $y = 3x - 1$.

<u>Несобственные интегралы 1-го рода</u>

Задание 1

Вычислить несобственный интеграл

$$\int_1^{+\infty} \frac{dx}{x^2}$$

или установить его расходимость:

Решение:

По определению несобственного интеграла 1 рода имеем

$$\int_1^{+\infty} \frac{dx}{x^2} = \lim_{b\to\infty} \int_1^b \frac{dx}{x^2} = \lim_{b\to\infty} \left(-\frac{1}{x}\right)\Big|_1^b = \lim_{b\to\infty} \left(-\frac{1}{b}\right) + \lim_{b\to\infty} \left(\frac{1}{1}\right) = 1$$

интеграл сходится и его величина равна 1.

Задание 2

Вычислить несобственный интеграл

$$\int_{0}^{+\infty} \frac{dx}{x}$$

Задание 3

Вычислить несобственный интеграл

$$\int_{0}^{+\infty} \frac{xdx}{x^4 + 1}$$

Задание 4

Вычислить несобственный интеграл

$$\int_{0}^{+\infty} e^{-4x} dx$$

Задание 5

Вычислить несобственный интеграл

$$\int_{0}^{+\infty} \frac{xdx}{\sqrt{x^2 + 1}}$$

Задание 6

Вычислить несобственный интеграл

$$\int_{13}^{+\infty} \frac{dx}{x \ln x}$$

Задание 7

Вычислить несобственный интеграл

$$\int_{1}^{+\infty} \frac{dx}{x^2 + x}$$

Задание 8

Вычислить несобственный интеграл

$$\int_{e^2}^{+\infty} \frac{dx}{x\sqrt{\ln x}}$$

Задание 9

Вычислить несобственный интеграл

$$\int_{0}^{+\infty} \frac{dx}{x^3 + 1}$$

Задание 10

Вычислить несобственный интеграл

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{2}{\sqrt[3]{x^2}} dx$$

Задание 11

Исследовать сходимость интеграла

$$\int_{0}^{+\infty} \frac{x + 2}{x^2 + 2x + 2} dx$$

Задание 12

Исследовать на сходимость интеграл

$$\int_{1}^{+\infty} \frac{dx}{2 + x + 3x^5}$$

Задание 13

Исследовать на сходимость интеграл

$$\int_{1}^{+\infty} \frac{x + 2}{\sqrt[3]{x^2}} dx$$

Задание 14

Исследовать сходимость несобственного интеграла

$$\int_{-\infty}^{0} x \cos x dx$$

Задание 15

Исследовать сходимость несобственного интеграла

$$\int_{-\infty}^{0} \cos 3x dx$$

Несобственные интегралы 2-го рода

Задание 1

Вычислить значение интеграла

$$\int_{0}^{1} ln\, x\, dx$$

Решение:

При $x \to \infty$ функция $ln\, x \to -\infty$. По формуле

$$\int_{a}^{b} f(x)\, dx = \lim_{\varepsilon \to 0} \int_{a+\varepsilon}^{b} f(x)\, dx$$

имеем:

$$\int_{0}^{1} ln\, x\, dx = \lim_{\varepsilon \to 0} \int_{0+\varepsilon}^{1} ln\, x\, dx = \lim_{\varepsilon \to 0}(x \ln x - x)\Big|_{\varepsilon}^{1} = -1 - \lim_{\varepsilon \to 0}(\varepsilon\, ln\, \varepsilon - \varepsilon)$$
$$= -1 - 0 = -1$$

т.к.

$$\lim_{\varepsilon \to 0} \varepsilon\, ln\, \varepsilon = \lim_{\varepsilon \to 0} \frac{ln\, \varepsilon}{\frac{1}{\varepsilon}} = \lim_{\varepsilon \to 0} \frac{\frac{1}{\varepsilon}}{-\frac{1}{\varepsilon^2}} = \lim_{\varepsilon \to 0}(-\varepsilon) = 0$$

Интеграл сходится и равен -1.

Задание 2

Вычислить несобственный интеграл

$$\int_{0}^{1} x \ln x dx$$

Задание 3

Вычислить несобственный интеграл

$$\int_{1}^{2} \frac{dx}{x \ln x}$$

Задание 4

Вычислить несобственный интеграл

$$\int_0^1 \frac{dx}{x-1}$$

Задание 5

Вычислить несобственный интеграл

$$\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{x}}$$

Задание 6

Вычислить несобственный интеграл

$$\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}$$

Задание 7

Вычислить несобственный интеграл

$$\int_0^2 \frac{xdx}{(x^2-1)^{\frac{4}{5}}}$$

Задание 8

Вычислить несобственный интеграл

$$\int_1^3 \frac{dx}{\sqrt{3-x}}$$

Задание 9

Вычислить несобственный интеграл

$$\int_0^3 \frac{dx}{\sqrt{9-x^2}}$$

Задание 10

Вычислить несобственный интеграл

$$\int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{dx}{1-\cos 2x}$$

Задание 11

Вычислить несобственный интеграл

$$\int_2^5 \frac{dx}{(x-4)^2}$$

Задание 12

Исследовать сходимость интеграла

$$\int_{-1}^{1} \frac{dx}{x^2}$$

Задание 13

Исследовать на сходимость интеграл

$$\int_{0}^{1} \frac{dx}{3x^2 + \sqrt[3]{x}}$$

Задание 14

Исследовать сходимость интеграла

$$\int_{0}^{1} \frac{dx}{\sqrt{x - x^2}}$$

Задание 15

Исследовать на сходимость интеграл

$$\int_{0}^{1} \frac{dx}{\sqrt[3]{1 - x^4}}$$

Задание 16

Исследовать на сходимость интеграл

$$\int_{\frac{3}{4}}^{1} \frac{dx}{\sqrt[5]{3 - 4x}}$$

5.3. Двойные интегралы

Вычисление двойного интеграла в декартовых координатах

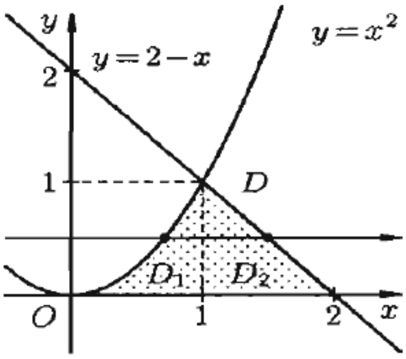
Задание 1

Вычислить

$$\iint_D (x + 2y)\, dx\, dy$$

где область D ограничена линиями $y = x^2$, $y = 0$, $x + y - 2 = 0$.

Решение:



$$\iint_D (x+2y)\,dx\,dy$$

$$= \int_0^1 dy \int_{\sqrt{y}}^{2-y} (x+2y)dx = \int_0^1 dy\left(\frac{x^2}{2}+2yx\right)\Big|_{\sqrt{y}}^{2-y} = \int_0^1 \frac{(2-y)^2}{2}+4y$$

$$-2y^2-\frac{y}{2}-2y^{\frac{3}{2}})dy = \left(\frac{(y-2)^3}{6}+\frac{7y^2}{4}-\frac{2y^3}{3}-\frac{4y^{\frac{5}{2}}}{5}\right)\Big|_0^1 = 1{,}45$$

Ответ: 1,45.

Задание 2

Вычислить двойной интеграл, используя полярные координаты

$$\iint_D dxdy$$

если D: $x^2-2x+y^2=0, x^2-4x+y^2=0, x=\frac{x}{\sqrt{3}}, y=\sqrt{3}x$

Задание 3

Вычислить двойной интеграл:

$$\iint_D \left(1-\frac{x}{3}-\frac{y}{4}\right)dx\,dy$$

в прямоугольной области D, $-1 \le x \le 1, -2 \le y \le 2$.

Задание 4

С помощью двойного интеграла вычислить площадь фигуры, ограниченной линиями $x^2-2y+y^2=0, x^2-6y+y^2=0, x=0, y=\frac{x}{\sqrt{3}}$.

Задание 5

Вычислить двойной интеграл

$$\iint_D xy^2\,dx\,dy$$

если область интегрирования D ограничена линиями $x = 0, y = x, y = 2 - x^2$.

Задание 6

Вычислить двойной интеграл

$$\iint_D dxdy$$

если D: $x^4 = a^2(x^2 - 3y^2)$, $(a > 0)$.

Задание 7

Вычислить повторный интеграл

$$\int_0^2 dx \int_{4-2x^2}^{4-x^2} dy$$

Задание 8

Вычислить двойной интеграл

$$\iint_D (2x + y)dxdy$$

где D: $\begin{cases} y = \sqrt{x}, y = 0, \\ x + y = 6 \end{cases}$

Задание 9

Вычислить двойной интеграл

$$\iint_D (5x + 7y)\,dxdy$$

где область D ограничена линиями $y = 1, y = 5, 3y - 7x - 21 = 0,$ $3y - 6x + 30 = 0.$

Задание 10

Вычислить двойной интеграл:

$$\iint_D \frac{x}{y} dxdy$$

где область D ограничена линиями $y = 3^x, x = 0, y = 3.$

Задание 11

Вычислить двойной интеграл:

$$\iint_D x\,dxdy$$

где область D ограничена линиями $y = 3x, y = 4 - x^2.$

Задание 12

Вычислить двойной интеграл:

$$\iint_D (x-y)dxdy$$

где область D ограничена линиями $x = 0, y = 1, y = 2, x = 1$.

Задание 13

Вычислить двойной интеграл:

$$\iint_D x^2 ydxdy$$

где область D ограничена линиями $y = 0, y = 1 - x^2$.

Задание 14

Вычислить двойной интеграл:

$$\iint_D 4y^2 \sin xy \, dxdy$$

где область D ограничена линиями $x = 0, y = \sqrt{\frac{\pi}{2}}, y = x$.

Задание 15

Вычислить двойной интеграл:

$$\iint_D y^2 \, e^{\frac{-xy}{8}} dxdy$$

где область D ограничена линиями $x = 0, y = 2, y = \frac{x}{2}$.

ТЕМА 6. ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ

6.1. Обыкновенные дифференциальные уравнения

Дифференциальные уравнения. Задача Коши

Задание 1

Найдите общее решение дифференциального уравнения (ДУ) $y' = xe^{2x+3}$. Найдите частное решение этого уравнения, удовлетворяющего начальному условию $y\left(-\frac{3}{2}\right) = 1$

Решение:

Проинтегрировав исходное ДУ, получим $y = \int xe^{2x+3}dx$. Этот интеграл возьмём методом интегрирования по частям:

$$y = \int xe^{2x+3}dx = \begin{bmatrix} u = x & dv = e^{2x+3}dx \\ du = dx & v = \frac{1}{2}e^{2x+3} \end{bmatrix} = \frac{x}{2}e^{2x+3} - \frac{1}{2}\int e^{2x+3}\,dx = \frac{x}{2}e^{2x+3} - \frac{1}{4}e^{2x+3} + C = \frac{e^{2x+3}}{2}\left(x - \frac{1}{2}\right) + C$$

Таким образом, $y = \frac{e^{2x+3}}{2}\left(x - \frac{1}{2}\right) + C$ – общее решение дифференциального уравнения.

$$\frac{e^{2\left(-\frac{3}{2}\right)+3}}{2}\left(-\frac{3}{2} - \frac{1}{2}\right) + C = 1$$

$$C = 2$$

Следовательно, подставив $C = 2$ в общее решение ДУ, получим его частное решение, удовлетворяющее заданному начальному условию.

Задание 2

Определить порядок дифференциального уравнения $y'' - 3' + 2y' - 4 = 0$

Задание 3

Определить порядок дифференциального уравнения $(1 + x)xy' - (1 + 2x)y - (1 + 2x) = 0$

Задание 4

Определить порядок дифференциального уравнения $y^{IV} - 16y'' = 0$

Задание 5

Показать, что функция $y = e^{2x}$ является решением дифференциального уравнения $y''' - 8y = 0$

Задание 6

Показать, что функция $y = x(lnx^2 + C)$ удовлетворяет дифференциальному уравнению $xy' - y = 2x$. Установить, каким решением она является – общим или частным

Задание 7

Показать, что функция $y = \frac{(x+1)^4}{2} + (x+1)^2$ удовлетворяет дифференциальному уравнению $y' - \frac{2}{x+1}y = (x+1)^3$. Установить, каким решением она является – общим или частным

Задание 8

Показать, что функция $y = C_1 e^x sinx$ удовлетворяет дифференциальному уравнению $y'' - 2y' + 2y = 0$

Установить, каким решением она является – общим или частным

Задание 9

Показать, что функция $x^2 + y^2 - C^2 = 0$ удовлетворяет дифференциальному уравнению $x + yy' = 0$.

Установить, каким решением она является – общим или частным

Задание 10

Найти общее решение дифференциального уравнения

$y' - 3x^2 y = 3x^2 e^{x^3}$

Задание 11

Найти общее решение дифференциального уравнения $xy' + y = e^x$

Задание 12

Найти общее решение дифференциального уравнения $xy' + y = 3x^2$

Задание 13

Найти общее решение дифференциального уравнения $(x+3)y' = ln(x+3)$

Задание 14

Найти частное решение дифференциального уравнения $\frac{dy}{dx} = ln\, x$, удовлетворяющее начальному условию $y(1) = 1$

Задание 15

Найти частное решение дифференциального уравнения $y' sin\, x = cos\, x$, удовлетворяющее начальному условию $y(0) = 0$

Дифференциальные уравнения с разделяющимися переменными. Однородные дифференциальные уравнения

Задание 1

Решить дифференциальное уравнение $(2x + y)dx - xdy = 0$.

Решение:

Положим $y = ux$, где u – некоторая новая функция, зависящая от x. Тогда

$$dy = d(ux) = udx + xdu.$$

Подставляя это в дифференциальное уравнение, получаем

$$(2x + ux)dx - x(udx + xdu) = 0.$$

$$2xdx + uxdx - uxdx - xdu = 0.$$

Разделим обе части уравнения на x:

$$xdu = 2dx$$

Выполняя деление на x, мы могли потерять решение $x = 0$. Прямая подстановка показывает, что $x = 0$ действительно является одним из решений нашего уравнения.

$$\int du = 2\int \frac{dx}{x} \text{или} u = 2ln|x| + C$$

Таким образом, уравнение имеет два решения:

$$y = ux = x(2ln|x| + C), x = 0$$

Задание 2

Решить дифференциальное уравнение $9ydy = \frac{dx}{(\cos x)^2}$

Задание 3

Решить дифференциальное уравнение $y' + (2y + 1)ctgx = 0$

Задание 4

Решить дифференциальное уравнение $y' = -2y$ с начальным условием $y(0) = 2$

Задание 5

Решить дифференциальное уравнение $ylny + xy' = 0$ с начальным условием $y(1) = e$

Задание 6

Решить дифференциальное уравнение $\frac{dy}{dx} = y(y + 2)$

Задание 7

Решить дифференциальное уравнение $x\sqrt{1 - y^2}dx + y\sqrt{1 - x^2}dy = 0$

Задание 8

Решить дифференциальное уравнение $e^{x-y}dx - \frac{1}{x}dy = 0$

Задание 9

Проверить дифференциальное уравнение $(x + y)y' + y = 0$ на однородность и найти его общий интеграл

Задание 10

Решить дифференциальное уравнение $(x^3 + xy^2)y' = y^3$

Задание 11

Решить дифференциальное уравнение $xy' = y\, ln\frac{y}{x}$

Задание 12

Решить дифференциальное уравнение $y' \operatorname{ctg}^2 x + tgy = 0$

Задание 13

Найти частное решение дифференциального уравнения $ylny + xy' = 0$, удовлетворяющее начальному условию $y(1) = e$

Задание 14

Найти частное решение дифференциального уравнения $e^{y-x^2}dy - 2xdx = 0$, удовлетворяющее начальному условию $y(0) = ln2$

Задание 15

Найти частное решение дифференциального уравнения $(1 + e^x)y' = e^x$, удовлетворяющее начальному условию $y(0) = 0$

Линейные дифференциальные уравнения 1-го порядка. Дифференциальные уравнения в полных дифференциалах

Задание 1

Найти общее решение дифференциального линейного уравнения $xy' - y = x^3$

Решение:

Общее решение заданного уравнения можно получить в виде произведения двух функций $u(x)$ и $v(x)$. Положим $y = uv$, тогда $y' = u'v + uv'$. Подставив функцию $y = uv$ и её производную в данное уравнение получим

$$x(u'v + uv') - uv = x^3 \text{ или } u(xv' - v) + xu'v = x^3$$

Выберем v так, чтобы выражение в скобках обратилось в нуль. Тогда

$$x\frac{dv}{dx} - v = 0, \frac{dv}{v} = \frac{dx}{x}, lnv = lnx, v = x$$

Заданное уравнение при v=x запишется так:

$$x^2du = x^3dx, \text{или } du = xdx$$

Откуда

$$\text{u} = \frac{x^2}{2} + C$$

Следовательно общее решение заданного уравнения имеет вид

$$y = uv = \left(\frac{x^2}{2} + C\right)x = \frac{x^3}{2} + Cx$$

Задание 2

Найти общее решение дифференциального уравнения $y' + 3y = e^{2x}$, удовлетворяющее начальному условию $x = 0$, $x = 1$

Задание 3

Решить дифференциальное уравнение $xy' = y + 2x^3$

Задание 4

Найти частное решение дифференциального уравнения $y' + \frac{y}{x} - 2e^{x^2} = 0$, удовлетворяющее начальному условию $y(1) = e$

Задание 5

Решить дифференциальное уравнение $x^2y' + xy + 2 = 0$

Задание 6

Решить дифференциальное уравнение $y' + \frac{x}{1-x^2}y = 1$

Задание 7

Найти решение задачи Коши: $y' - \frac{2y}{x+1} = (x+1)^3$, $y(0) = \frac{1}{2}$

Задание 8

Найти решение задачи Коши для данного дифференциального уравнения: $x^2y' = 2xy + 3$, $y(1) = -1$

Задание 9

Найти решение дифференциального уравнения
$(6x^2 - y + 3)dx + (3y^2 - x - 2)dy = 0$

Задание 10

Найти решение дифференциального уравнения
$(3x^2 - 3y^2 + 4x)dx - (6xy + 4y)dy = 0$

Задание 11

Решить дифференциальное уравнение $2xydx + (x^2 + 3y^2)dy = 0$

Задание 12

Найти решение дифференциального уравнения $e^y dx + (2y + xe^y)dy = 0$

Задание 13

Решить дифференциальное уравнение $\frac{1}{y^2} - \frac{2}{x} = \frac{2xy\prime}{y^3}$ с начальным условием $y(1) = 1$

Задание 14

Найти общее решение дифференциального уравнения
$(x^2 + y^2 + y)dx + (2xy + x + e^y)dy = 0$
и частное решение при условии $y(0) = 0$

Задание 15

Решить дифференциальное уравнение $e^y dx + (2y + xe^y)dy = 0$

Дифференциальные уравнения высших порядков. Задача Коши. Уравнения, допускающие понижение порядков

Задание 1

Найти общее решение дифференциального уравнения $y'' = x^2 - 2x$

Решение:

Данное дифференциальное уравнение имеет вид $y'' = f(x)$

Понижаем степень уравнения до первого порядка:

$$y' = \int (x^2 - 2x)dx = \frac{1}{3}x^3 - 2\frac{1}{2}x^2 + C_1 = \frac{x^3}{3} - x^2 + C_1$$

Теперь интегрируем правую часть ещё раз, получая общее решение:

$$y = \int \left(\frac{x^3}{3} - x^2 + C_1\right) dx = \frac{1}{3}\frac{x^4}{4} - \frac{x^3}{3} + C_1 x + C_2 = \frac{x^4}{12} - \frac{x^3}{3} + C_1 x + C_2$$

Общее решение: $y = \frac{x^4}{12} - \frac{x^3}{3} + C_1 x + C_2$, где $C_1, C_1 - const$

Задание 2

Решить дифференциальное уравнение $y'' + sin2x = \sqrt{x}$.

В данном примере сначала необходимо привести уравнение к стандартному виду $y'' = f(x)$

Задание 3

Решить дифференциальное уравнение $y''' = \sin x + \cos x$

Задание 4

Найти частное решение уравнения, соответствующее заданным начальным условиям: $y''' = e^{2x}$, $y(0) = \frac{9}{8}$, $y'(0) = \frac{1}{4}$, $y''(0) = -\frac{1}{2}$

Задание 5

Решить дифференциальное уравнение $x^3 y'' + x^2 y' = 1$

Задание 6

Найти частное решение уравнения, соответствующее заданным начальным условиям: $x^3 y''' = 6$, $y(1) = 0$, $y'(1) = 5$, $y''(1) = 1$

Задание 7

Решить дифференциальное уравнение $y''' = \frac{lnx}{x^2}$

Задание 8

Решить дифференциальное уравнение $y''' = \sqrt{1 + (y'')^2}$

Задание 9

Решить дифференциальное уравнение $y''' - y' = \sin 3x$

Задание 10

Решить дифференциальное уравнение $xy^{(V)} - y^{(IV)} = 0$

Задание 11

Найти частное решение уравнения $y'' = 2y^3$, соответствующее заданным начальным условиям$y(0) = 1$, $y'(0) = 1$

Задание 12

Найти частное решение уравнения $(y-1)y'' = 2(y')^2$, соответствующее заданным начальным условиям $y(0) = 2$, $y'(0) = 2$

Задание 13

Найти частное решение уравнения $y^3 y'' = 4(y^4 - 1)$, соответствующее заданным начальным условиям $y(0) = \sqrt{2}$, $y'(0) = \sqrt{2}$

Задание 14

Найти частное решение уравнения $y'' + 50 \sin y \cos^3 y = 0$, соответствующее заданным начальным условиям $y(0) = 0$, $y'(0) = 5$

Задание 15

Найти частное решение уравнения $y''' + y'' - x = 0$, соответствующее заданным начальным условиям $y(0) = 1, y'(0) = -1, y''(0) = 0$

Линейные однородные дифференциальные уравнения высших порядков. Линейные однородные дифференциальные уравнения с постоянными коэффициентами

Задание 1

Найдите общее решение линейного однородного дифференциального уравнения (ЛОДУ) третьего порядка с постоянными коэффициентами

$$y''' - 3y'' + 3y = 0$$

Решение:

Запишем характеристическое уравнение и найдем его корни, предварительно разложив многочлен в левой части равенства на множители способом группировки:

$$k^3 - k^2 - k + 3 = 0$$
$$k^2(k-3) - (k-3) = 0$$
$$(k^2-1)(k-3) = 0$$
$$k_1 = -1, k_2 = 1, k_3 = 3$$

Все три корня характеристического уравнения действительные и различные, поэтому общее решение ЛОДУ третьего порядка с постоянными коэффициентами имеет вид

$$y_0 = C_1e^{-x} + C_2e^x + C_3e^{3x}$$

Задание 2

Решить уравнение $y'' + 25y = 0$

Задание 3

Найти общее решение дифференциального уравнения $y'' - 6y' + 9y = 0$

Задание 4

Найдите общее решение линейного однородного дифференциального уравнения второго порядка с постоянными коэффициентами

$$y'' + 4y' + 4y = 0$$

Задание 5

Решить однородное дифференциальное уравнение второго порядка

$$y'' - 2y' + 10y = 0$$

Задание 6

Найти общее решение однородного дифференциального уравнения второго порядка с постоянными коэффициентами: $y'' - 4y' - 12y = 0$

Задание 7

Найти общее решение однородного дифференциального уравнения второго порядка с постоянными коэффициентами: $y'' - 12y' + 36 = 0$

Задание 8

Найти общее решение однородного дифференциального уравнения второго порядка с постоянными коэффициентами: $y'' + 2y' + 5y = 0$

Задание 9

Решить дифференциальное уравнение $y''' + 2y'' - y' - 2y = 0$

Задание 10

Решить уравнение $y''' - 7y'' + 11y' - 5y = 0$

Задание 11

Решить уравнение $y^{(4)} - 4y''' + 5y'' - 4y' + 4y = 0$

Задание 12

Решить уравнение $y^{(5)} + 18y''' + 81y' = 0$

Задание 13

Найдите общее решение дифференциального уравнения
$y^{(4)} - 8y''' + 24y'' - 32y' + 16y = 0$

Задание 14

Проинтегрируйте линейное однородное дифференциальное уравнение четвертого порядка с постоянными коэффициентами
$y^{(4)} - 6y''' + 14y'' - 6y' + 13y = 0$

Задание 15

Найдите общее решение ЛОДУ с постоянными коэффициентами
$y^{(4)} - 4y''' + 14y'' - 20y' + 25 = 0$

Линейные неоднородные дифференциальные уравнения. Линейные неоднородные дифференциальные уравнения с постоянными коэффициентами и правой частью специального вида

Задание 1

Решить дифференциальное уравнение $y''' - y' = sin3x$

Решение:

Построим общее решение однородного уравнения

$$y''' - y' = 0$$

Корни характеристического уравнения равны:

$$\lambda^3 - \lambda = 0, \Rightarrow \lambda(\lambda^2 - 1), \Rightarrow \lambda(\lambda - 1)(\lambda + 1) = 0 \Rightarrow \lambda_1 = 0, \lambda_2 = 1, \lambda_3 = -1$$

Следовательно, общее решение однородного уравнения записывается в виде

$$y_0(x) = C_1 + C_2e^x + C_3e^{-x}$$

Где C_1, C_2, C_3 – произвольные числа.

Исходя из вида правой части, будем искать частное решение в виде пробной функции

$$y_1(x) = Asin3x + Bcos3x$$

Производные этой функции имеют следующий вид:

$$y_1' = 3Acos3x - 3Bsin3x$$
$$y_1'' = -9Asin3x - 9Bcos3x$$

$$y_1''' = -27Acos3x + 27Bsin3x$$

Подставляя найденные производные в уравнение, получаем $-27Acos3x + 27Bsin3x - 3Acos3x + 3Bsin3x = sin3x \Rightarrow -30Acos3x + +30Bsin3x = sin3x \Rightarrow \begin{cases} -30A = 0 \\ 30B = 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} A = 0 \\ B = \frac{1}{30} \end{cases}$

Итак, частное решение записывается как

$$y_1(x) = \frac{1}{30}cos3x$$

Соответственно, общее решение неоднородного уравнения описывается выражением

$$y(x) = y_0(x) + y_1(x) = y_0(x) = C_1 + C_2e^x + C_3e^{-x} + \frac{1}{30}cos3x$$

Задание 2

Найти общее решение уравнения $y'' + y' = 5x + 3$

Задание 3

Найти общее решение уравнения $y'' - y' + 5y = (x + 2)e^{3x}$

Задание 4

Найти общее решение уравнения $y'' + 4y' + 5y = 2cosx - sinx$ и выделить из него частное решение, удовлетворяющее начальным условиям: $y(0) = 1, y'(0) = 2$

Задание 5

Найти общее решение уравнения $y'' + 3y' + 2y = 2x^2 - 4x - 17$

Задание 6

Найти общее решение уравнения $y'' + y' = xe^x$

Задание 7

Найти общее решение уравнения $y'' + 4y' = 15cos3x - 30sin3x$

Задание 8

Решите задачу Коши $y'' - 2y' = x^2 + 1, y(0) = 2, y'(0) = \frac{1}{4}$

Задание 9

Найти общее решение дифференциального уравнения $y''' + 3y'' - 10y' = x - 3$

Задание 10

Решить дифференциальное уравнение $y'' + y = \sin(2x)$

Задание 11

Найти общее решение уравнения $y'' + y' - 6y = 36x$

Задание 12

Найти общее решение дифференциального уравнения

$y'' - 2y' = (x^2 + 1)e^x$

Задание 13

Решить линейное неоднородное дифференциальное уравнение
$y'' - 2y' = x + 3$

Задание 14

Решить линейное неоднородное дифференциальное уравнение
$y'' + y = \cos x$

Задание 15

Найти решение дифференциального уравнения
$y'' - 7y' + 12y = 8\sin x + e^{3x}$

ТЕМА 7. ЧИСЛОВЫЕ И ФУНКЦИОНАЛЬНЫЕ РЯДЫ

7.1. Числовые ряды

Числовой ряд и его сумма. Необходимое условие сходимости

Задание 1

Написать первые пять членов ряда, если общий член задан формулой:

$$u_n = \frac{n+1}{5^n(2n+1)}$$

Решение:

Полагая данной формуле $n = 1,2,3,4,5$, получаем:

$$u_1 = \frac{1+1}{5(2{\cdot}1+1)} = \frac{2}{5{\cdot}3} = \frac{2}{15}$$

$$u_2 = \frac{2+1}{5^2(2{\cdot}2+1)} = \frac{3}{5^2{\cdot}5} = \frac{3}{125}$$

$$u_3 = \frac{3+1}{5^3(2{\cdot}3+1)} = \frac{4}{5^3{\cdot}7} = \frac{4}{875}$$

$$u_4 = \frac{4+1}{5^4(2{\cdot}4+1)} = \frac{5}{5^4{\cdot}9} = \frac{5}{1125}$$

$$u_5 = \frac{5+1}{5^5(2{\cdot}5+1)} = \frac{6}{5^5{\cdot}11} = \frac{6}{34375}$$

Задание 2

Записать первые пять членов ряда, если дана формула его общего члена:

$$u_n = \frac{4n-3}{n^2+1}$$

Задание 3

Записать формулу общего члена ряда, если даны пять его первых членов:

$$1 + \frac{4}{3} + \frac{7}{9} + \frac{10}{27} + \frac{13}{81} \dots$$

Задание 4

Исследовать на сходимость ряд:

$$\frac{1}{1\cdot 2} + \frac{1}{2\cdot 3} + \frac{1}{3\cdot 4} + \cdots + \frac{1}{n(n+1)} + \cdots$$

Задание 5

Записать формулу общего члена ряда, если даны пять его первых членов:

$$\frac{2}{3}+\frac{3}{6}+\frac{4}{9}+\frac{5}{12}+\frac{6}{15}+\cdots$$

Задание 6

Записать формулу общего члена ряда, если даны пять его первых членов:

$$\frac{\ln 2}{5}+\frac{\ln 3}{10}+\frac{\ln 4}{17}+\frac{\ln 5}{26}+\frac{\ln 6}{37}+\cdots$$

Задание 7

Вычислить сумму ряда:

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(2n+1)(2n+3)}$$

Задание 8

Вычислить сумму ряда:

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(5n-4)(5n+1)}$$

Задание 9

Вычислить сумму ряда:

$$\sum_{n=3}^{\infty}\frac{3n-1}{n^{3-n}}$$

Задание 10

Вычислить сумму ряда:

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^3+3n^2+2n}$$

Задание 11

Исследовать сходимость ряда:

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{4n-3}{5n+2}$$

Задание 12

Исследовать сходимость ряда:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{3n}{4n+1}$$

Задание 13

Исследовать сходимость ряда:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2n+5}{\sqrt{16n^2-7n+3}}$$

Задание 14

Исследовать сходимость ряда:

$$\sum_{n=2}^{\infty} \frac{n+1}{n-1}$$

Задание 15

Записать первые пять членов ряда, если дана формула его общего члена:

$$u_n = \frac{n+5}{2n!}$$

Признаки сходимости знакоположительных числовых рядов: интегральный, признак сравнения

Задание 1

Исследовать сходимость ряда:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n+1}{3n^3-2n^2+3n-1}$$

Решение:

Необходимый признак выполняется, так как предел общего члена равен нулю:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{n+1}{3n^3-2n^2+3n-1} = 0$$

Сравним заданный ряд с рядом Дирихле:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$$

Который сходится, так как:

$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{n+1}{3n^3-2n^2+3n-1}:\frac{1}{n^2}\right)=\lim_{n\to\infty}\frac{n^3+n^2}{3n^3-2n^2+3n-1}=\frac{1}{3}$$

то данный ряд сходится.

Задание 2

Определить, сходится или расходится ряд:

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{1+10n}$$

Задание 3

Определить, сходится или расходится ряд:

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(n+1)\ln(n+1)}$$

Задание 4

Исследовать ряд на сходимость.

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n}{n^2+1}$$

Задание 5

Определить, сходится или расходится ряд:

$$\sum_{n=0}^{\infty}ne^{-n}$$

Задание 6

Определить, сходится или расходится ряд:

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n^2-1}{n^4}$$

Задание 7

Исследовать сходимость ряда:

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n^2}{n^3-3}$$

Задание 8

Определить, сходится или расходится ряд:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{3n-1}{2n^3-4n+5}$$

Задание 9

Исследовать сходимость ряда с помощью признака сравнения.

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{7^n}{7^{2n}+5}$$

Задание 10

Исследовать сходимость ряда с помощью признака сравнения

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^3+1}$$

Задание 11

Исследовать сходимость ряда с помощью признака сравнения

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n\sqrt[3]{n^2}}$$

Задание 12

Исследовать сходимость ряда с помощью признака сравнения

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt[3]{n^2+3n+5}}$$

Задание 13

Исследовать сходимость ряда с помощью интегрального признака

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(n+1)\sqrt{n}}$$

Задание 14

Исследовать сходимость ряда с помощью интегрального признака

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2+4}$$

Задание 15

Исследовать сходимость ряда с помощью интегрального признака

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(n+2)\ln(n+2)}$$

Признак Даламбера и Коши. Знакочередующиеся ряды, признак Лейбница

Задание 1

Исследовать сходимость

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2+n-1}{4^n}$$

Решение:

Используем признак Даламбера:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{\frac{(n+1)^2+(n+1)-1}{4^{n+1}}}{\frac{n^2+n-1}{4^n}} \lim_{n\to\infty} \frac{4^n \cdot ((n+1)^2+(n+1)-1))}{4^{n+1} \cdot (n^2+n-1)}$$

$$= \lim_{n\to\infty} \frac{4^n \cdot (n^2+2n+1+n+1-1)}{4 \cdot 4^n \cdot (n^2+n-1)}$$

$$= \frac{1}{4} \lim_{n\to\infty} \left(\frac{n^2+3n+1}{n^2+n-1}\right) = \left(\frac{\infty}{\infty}\right) = \frac{1}{4} \lim_{n\to\infty} \left(\frac{\frac{n^2+3n+1}{n^2}}{\frac{n^2+n-1}{n^2}}\right) = \frac{1}{4} < 1$$

Таким образом, исследуемый ряд сходится.

Задание 2

Исследовать сходимость ряда:

$$\frac{4}{3} + \frac{16}{16 \cdot 9} + \frac{64}{81 \cdot 27} + \cdots + \frac{4^n}{n^4 \cdot 3^n} + \cdots$$

Задание 3

Исследовать сходимость ряда с общим членом:

$$u_n = \frac{1}{\ln(n+1)}$$

Задание 4

Исследовать на сходимость ряд:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{2n}{3n+2}\right)^n$$

Задание 5

Исследовать на сходимость ряд:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n}{\sqrt{n^n}}$$

Задание 6

Исследовать, сходится ли знакочередующийся ряд:

$$-1+\frac{1}{2}-\frac{1}{3}+\frac{1}{4}-\cdots+\frac{(-1)^n}{n}+\cdots$$

Решение:

Необходимый признак выполняется, так как:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{(-1)^n}{n} = 0$$

Для исследования сходимости ряда применим признак Лейбница.

Поскольку:

$$1>\frac{1}{2}>\frac{1}{3}>\frac{1}{4}>\cdots>\frac{1}{n}>\cdots$$

и

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} = 0$$

то заданный ряд сходится.

Задание 7

Исследовать ряд на сходимость.

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n n$$

Задание 8

Исследовать ряд на сходимость.

$$\sum_{n=2}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(n-1)(n^2+2)}$$

Задание 9

Сколько членов ряда:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n^3}$$

нужно взять, чтобы вычислить сумму с точностью до 0,0001?

Задание 10

Исследовать сходимость ряда:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(2n+1)3^{2n+1}}$$

Задание 11

Исследовать сходимость ряда:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(n-1)!}{(2n)!} \frac{1}{2^{n+1}}$$

Задание 12

Исследовать сходимость ряда:

$$\frac{1}{2!} + \frac{3}{3!} + \frac{5}{4!} + \cdots$$

Задание 13

Исследовать сходимость ряда:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{3n-2}{7n-5}\right)^n$$

Задание 14

Исследовать сходимость ряда:

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{n+1}{2^n}$$

Задание 15

Исследовать сходимость ряда:

$$\sum_{n=0}^{\infty} 3^n \left(\frac{n-5}{n+2}\right)^{n^2}$$

Знакопеременные ряды, абсолютная и условная сходимости

Задание 1

Исследовать на сходимость ряд:

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{2n+1}{3n+2}$$

Решение:

Попробуем применить признак Лейбница:

$$\lim_{n\to\infty}|a_n| = \lim_{n\to\infty}\frac{2n+1}{3n+2} = \lim_{n\to\infty}\frac{\frac{2n+1}{n}}{\frac{3n+2}{n}} = \lim_{n\to\infty}\frac{2+\frac{1}{n}}{3+\frac{2}{n}} = \frac{2}{3} \neq 0$$

Видно, что модуль общего члена не стремится к нулю при $n \to \infty$.

Отсюда следует, что

$$\lim_{n\to\infty} a_n \neq 0$$

Поэтому данный ряд расходится

Задание 2

Исследовать ряд на абсолютную и условную сходимость.

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{3n+5}$$

Решение:

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{3n+5} = \frac{1}{8} - \frac{1}{11} + \frac{1}{14} - \frac{1}{17} + \ldots$$

Ряд является знакочередующимся

$$\lim_{n\to\infty}|a_n| = \lim_{n\to+\infty}\frac{1}{3n+5} = 0$$

Члены ряда убывают по модулю. Каждый следующий член ряда по модулю меньше, чем предыдущий, значит убывание монотонно.

Ряд сходится по признаку Лейбница. С помощью ряда, составленного из модулей, выясним как именно:

$$\sum_{n=1}^{\infty}|a_n| = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{3n+5}$$

Сравним данный ряд с расходящимся гармоническим рядом:

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}$$

Используем предельный признак сравнения:

$$\lim_{n\to\infty}\frac{3n+5}{n} = \lim_{n\to\infty}\left(3+\frac{5}{n}\right) = 3$$

Получилось конечное число отличное от нуля, значит, ряд из модулей расходится вместе с гармоническим рядом.

Ответ: сходится условно

Задание 3

Исследовать ряд на абсолютную и условную сходимость.

$$\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{2n+1}{3n+2}$$

Задание 4

Исследовать ряд на абсолютную и условную сходимость.

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{n!}$$

Задание 5

Определить, является ли ряд:

$$\sum_{n=2}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}\sqrt{n}}{\ln n}$$

абсолютно сходящимся, условно сходящимся или расходящимся?

Задание 6

Исследовать ряд на абсолютную и условную сходимость.

$$\frac{2}{3!}-\frac{2^2}{5!}+\frac{2^3}{7!}-\frac{2^4}{9!}+\cdots$$

Задание 7

Исследовать, является ли ряд:

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{5n-1}$$

абсолютно сходящимся, условно сходящимся или расходящимся?

Задание 8

Определить, является ли ряд:

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{\sqrt{n(n+1)}}$$

абсолютно сходящимся, условно сходящимся или расходящимся?

Задание 9

Исследовать на абсолютную и условную сходимость.

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{\frac{n(n-1)}{2}}}{6^n}$$

Задание 10

Исследовать на абсолютную и условную сходимость.

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n!}$$

Задание 11

Исследовать на абсолютную и условную сходимость.

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{(5n-1)6^n}$$

Задание 12

Исследовать на абсолютную и условную сходимость.

$$\frac{1}{4}-\frac{1}{7}+\frac{1}{10}-\frac{1}{13}+\frac{1}{17}-\cdots$$

Задание 13

Выяснить, сколько членов ряда нужно взять, чтобы с точностью до 0,001 вычислить сумму ряда:

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{n^5}$$

Задание 14

Выяснить, сколько членов ряда нужно взять, чтобы с точностью до 0,001 вычислить сумму ряда:

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{n2^{n+1}}$$

Задание 15

Выяснить, сколько членов ряда нужно взять, чтобы с точностью до 0,001 вычислить сумму ряда:

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{n\sqrt{n+1}}$$

7.2 Функциональные и степенные ряды

Задание 1

Исследовать сходимость функционального ряда:

$$\cos x+\cos\frac{x}{2}+\ldots+\cos\frac{x}{n}+\ldots$$

Решение:

Возьмём произвольное значение $x = x_0$. При этом значении получим числовой ряд:

$$\cos x_0 + \cos\frac{x_0}{2} + \ldots + \cos\frac{x_0}{n} + \ldots \qquad (*)$$

Найдём предел его общего члена:

$$U_n = \cos\frac{x_0}{n}$$

при $n \to \infty$

$$\lim_{n\to\infty} \cos\frac{x_0}{n} = \cos 0 = 1 \neq 0$$

Следовательно, ряд (*) расходится при произвольно выбранном, т.е. при любом значении x. Область его сходимости – пустое множество.

Задание 2

Исследовать сходимость функционального ряда при значениях $\mathrm{x} = 1$ и $\mathrm{x} = -1$.

$$\frac{x}{1} - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \ldots + (-1)^{n-1}\frac{x^n}{n} + \ldots$$

Задание 3

Найти область сходимости функционального ряда:

$$\sin x + \sin^2 x + \ldots + \sin^n x + \ldots$$

Задание 4

Найти область сходимости функционального ряда:

$$\ln x + \ln^2 x + \ldots + \ln^n x + \ldots$$

Задание 5

Вычислить сумму функционального ряда:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n(n+1)}$$

Задание 6

Найти область сходимости функционального ряда и вычислить его сумму.

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(n+1)}\left(\frac{x}{2x+1}\right)^n$$

Задание 7

Найти область сходимости функционального ряда:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x}{n + x^2}$$

Задание 8

Найти область сходимости функционального ряда:

$$\frac{x-1}{x+1}+\left(\frac{x-1}{x+1}\right)^2+\cdots+\left(\frac{x-1}{x+1}\right)^k+\cdots$$

Задание 9

Найти область сходимости функционального ряда:

$$\frac{x}{2+x^2}+\frac{x^2}{2+x^4}+\cdots+\frac{x^k}{2+x^{2k}}+\cdots$$

Задание 10

При каких *x* сходится функциональный ряд:

$$\sum_{k=1}^{\infty}\left(1+\frac{1}{k}\right)^k 2^{kx}$$

Задание 11

Найти область сходимости и сумму функционального ряда:

$$1+x+x^2+\cdots+x^{n-1}+\cdots$$

Задание 12

Найти область сходимости функционального ряда:

$$a_0+a_1(x-a)+a_2(x-a)^2+\cdots+a_n(x-a)^n+\cdots$$

Задание 13

Найти область сходимости функционального ряда:

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n^n}{(1+x^2)^n}$$

Задание 14

Найти множество *X* сходимости ряда:

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n(x+2)^n}$$

Задание 15

Найти область сходимости функционального ряда:

$$\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{x}{2}\right)^n$$

Равномерная сходимость функциональных рядов. Признак Вейерштрасса. Свойства равномерно сходящихся функциональных рядов

Задание 1

Показать что ряд

$$1 + (x-1) + (x^2 - x) + (x^3 - x^2) + \ldots = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} (x^n - x^{n-1})$$

Сходится на отрезке $0 \le x \le 1$, но не равномерно.

Решение:

Вычислим n-ю частичную сумму $S_n(x)$ ряда. Имеем

$$S_n(x) = \begin{cases} x^n, \text{если } 0 \le x < 1 \\ 1, \text{если } x = 1 \end{cases}$$

Откуда

$$\lim_{n\to\infty} S_n(x) = \begin{cases} 0, \text{если } 0 \le x < 1 \\ 1, \text{если } x = 1 \end{cases}$$

Данный ряд сходится на отрезке $[0,1]$ и его сумма

$$S_n(x) = \begin{cases} 0, \text{если } 0 \le x < 1 \\ 1, \text{если } x = 1 \end{cases}$$

Абсолютная величина разности $S(x) - S_n(x)$ (остатка ряда) равна

$$|S(x) - S_n(x)| = \begin{cases} x^n, \text{если } 0 \le x < 1 \\ 1, \text{если } x = 1 \end{cases}$$

Возьмем число ε такое, что $0 < \varepsilon < 1$. Пусть

$$|S(x) - S_n(x)| \le x^n < \varepsilon$$

Разрешим неравенство $0 < x^n < \varepsilon$ относительно n. Имеем $n \ln x < \ln \varepsilon$, откуда

$$n > \frac{\ln \varepsilon}{\ln ч}$$

(так как $0 < x < 1$, то $\ln x < 0$, и при делении на $\ln x$ знак неравенства меняется на обратный).

Неравенство

$|S(x) - S_n(x)| < \varepsilon$ будет выполняться при

$$n > N(\varepsilon, x) = \left[\frac{\ln \varepsilon}{\ln x}\right] + 1$$

Но $N(\varepsilon, x) \to +\infty$ при $x \to 1$.

Поэтому такого не зависящего от x числа $N(\varepsilon)$, что бы неравенство

$$|S(x) - S_n(x)| \le x^n < \varepsilon$$

Выполнялось для каждого $n > N(\varepsilon)$ сразу для всех x из отрезка $0 \le x \le 1$, не существует.

Если же заменить отрезок $0 \le x \le 1$ меньшим отрезком $0 \le x \le 1 - \delta$, где

$0 < \varepsilon < 1$, то на последнем данный ряд будет сходится к функции $S(x) = 0$ равномерно. В самом деле

$$\frac{\ln \varepsilon}{\ln x} \leq \frac{\ln \varepsilon}{\ln 1 - \delta}$$

При $0 \leq x \leq 1 - \delta$, и поэтому

$$|S(x) - S_n(x)| = x^n < \varepsilon \text{ при } n > \frac{\ln \varepsilon}{\ln 1 - \delta}$$

Сразу для всех $x \in [0; 1 - \delta]$.

Задание 2

Показать, что функциональный ряд равномерно сходится на отрезке $[-1; 1]$.

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n^2}$$

Задание 3

Исследовать ряд на равномерную сходимость

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin nx}{n^3}$$

Задание 4

Исследовать на равномерную сходимость ряд по признаку Вейерштрасса

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos nx}{n^2}$$

Задание 5

Исследовать на равномерную сходимость ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2 + x^2}$$

Задание 6

Показать, что функциональный ряд равномерно сходится на отрезке $[a; b]$

$$1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \ldots + \frac{x^n}{n!} + \cdots$$

Задание 7

Докажите что сумма данного ряда будет непрерывна для любого $x > 1$.

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^x}$$

Задание 8

Равномерно ли сходится данный ряд на промежутке [0,1].

$$x + (x^2 - x) + (x^3 - x^2) + \cdots + (x^n - x^{n-1}) + \cdots$$

Задание 9

Доказать, что функциональный ряд равномерно сходится на отрезке $[0;\ +\infty)$.

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{sin^2 n}{3^n + x}$$

Задание 10

Исследовать на равномерную сходимость функциональный ряд

$$\sin x + \sin\frac{x}{2} + \sin\frac{x}{2^2} + \cdots + \sin\frac{x}{2^n} + \cdots$$

Задание 11

Исследовать на равномерную сходимость ряд по признаку Вейерштрасса

$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{arctg\ nx}{n^2 + x^2}$ на множестве R

Задание 12

Исследовать на равномерную сходимость ряд по признаку Вейерштрасса

$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x}{1 + n^4 x^2}$ на множестве R

Задание 13

Доказать, что ряд сходится равномерно на всей оси x $(-\infty < x < +\infty)$

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\sin nx}{n^2}$$

Задание 14

Доказать, что ряд сходится равномерно на полуоси x $(0 < x < +\infty)$

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{x}{1 + x^4 x^2}$$

Задание 15

Доказать равномерную сходимость функционального ряда на отрезке $[1; 0]$

$$\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{x^n}{6n-11}.$$

Степенные ряды

Задание 1

Найти область сходимости степенного ряда

$1+\frac{x}{2!}+\frac{x^2}{3!}+\cdots+\frac{x^n}{(n+1)!}+\ldots$

Решение:

Радиус сходимости степенного ряда находится по формуле

$$R=\lim_{n\to\infty}\frac{|a_n|}{|a_{n+1}|}$$

Находим отношение $\frac{a_n}{a_{n+1}}$, где $a_n=\frac{1}{(n+1)!}$, а $a_{n+1}=\frac{1}{(n+2)!}$

$$R=\lim_{n\to\infty}\frac{|a_n|}{|a_{n+1}|}=\lim_{n\to\infty}\frac{\left|\frac{1}{(n+1)!}\right|}{\left|\frac{1}{(n+2)!}\right|}=\lim_{n\to\infty}\frac{(n+2)!}{(n+1)!}=\lim_{n\to\infty}\frac{(n+1)!\,(n+2)}{(n+1)!}$$
$$=\lim_{n\to\infty}(n+2)=+\infty$$

Радиус максимальный, интервал $(-\infty;+\infty)$. Область сходимости также $(-\infty;+\infty)$.

Задание 2

Найти область сходимости степенного ряда

$$1+\frac{x}{2}+\frac{x^2}{3}+\cdots+\frac{x^n}{n+1}+\cdots$$

Задание 3

Найти интервал сходимости степенного ряда и исследовать его сходимость на концах найденного интервала

$$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{2^n}{2^n+1}$$

Задание 4

Найти интервал сходимости степенного ряда и исследовать его сходимость на концах найденного интервала

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(x+2)^n}{5^n}$$

Задание 5

Найти радиус и интервал сходимости степенного ряда

$$\sum_{n=0}^{\infty} nx^n$$

Задание 6

Найти область сходимости ряда

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(x+1)^{2n}}{n^2 4^n}$$

Задание 7

Определить радиус и интервал сходимости степенного ряда

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n (x-2)^n}{n^2}$$

Задание 8

Найти область сходимости степенного ряда

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n x^{2n}}{n+1}$$

Задание 9

Найти область сходимости степенного ряда

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(x+3)^{2n}}{n}$$

Задание 10

Найти область сходимости степенного ряда

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} 2^{n-2} x^{2n-2}$$

Задание 11

Найти область сходимости степенного ряда

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(x-2)^{2n-1}}{n^3}$$

Задание 12

Найти область сходимости степенного ряда

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{x^n}{n}$$

Задание 13

Найти область сходимости степенного ряда
$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}x^{2n}}{3^n\sqrt{n}}$$

Задание 14

Найти область сходимости степенного ряда
$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2^n x^n}{\sqrt{2n-1}}$$

Задание 15

Найти область сходимости степенного ряда
$x + 2x^2 + 4x^3 + 8x^4 + \cdots$

<u>Ряды Тейлора и Маклорена</u>

Задание 1

Разложить в ряд Маклорена функцию
$$f(x) = xe^{-x^2}$$

Решение:

Воспользуемся разложением функции e^x в ряд Маклорена, заменив x на $-x^2$.
$$e^{-x^2} = 1 - \frac{x^2}{1!} + \frac{x^4}{2!} - \frac{x^6}{3!} + \cdots + (-1)^n\frac{x^{2n}}{n!} + \cdots.$$
Умножив полученный ряд на x, найдем исходное разложение:
$$xe^{-x^2} = 1 - \frac{x^3}{1!} + \frac{x^5}{2!} - \frac{x^7}{3!} + \cdots + (-1)^n\frac{x^{2n+1}}{n!} + \cdots.$$
Этот ряд сходится при всех x, как и ряд для функций $f(x) = e^x$.

Задание 2

Разложить в ряд Тейлора функцию $f(x) = \frac{1}{x+1}$ по степеням x+3. Найти область сходимости полученного ряда.

Задание 3

Разложить в ряд Маклорена функцию $f(x) = \frac{4}{(1+x)(1-3x)}$. Найти область сходимости полученного ряда.

Задание 4

Разложить функцию в ряд Маклорена по степеням x. Найти область сходимости ряда $f(x) = \frac{\sin 2x}{x}$.

Задание 5

Разложить функцию в ряд Маклорена по степеням x. Найти область сходимости ряда $f(x) = \ln(1 - x^2)$.

Задание 6

Разложить функцию $f(x) = x^3 + 4x^2 - 3x + 2$ в ряд Тейлора по степеням $(x - 1)$.

Задание 7

Разложить функцию $f(x) = \frac{1}{x+3}$ в ряд Тейлора по степеням $(x + 1)$. Найти область сходимости полученного ряда.

Задание 8

Разложить в ряд Тейлора функцию $f(x) = x^4 - 5x^3 + 7x^2 - 6x + + 2$ по степеням $(x + 2)$.

Задание 9

Разложить функцию в ряд Маклорена функцию $f(x) = 2^{-x^2}$

Задание 10

Разложить функцию в ряд Маклорена функцию

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt[3]{1 - x^2}}$$

Задание 11

Разложить функцию в ряд Маклорена функцию

$$f(x) = e^{5x}$$

Задание 12

Разложить функцию в ряд Тейлора функцию

$$f(x) = x^5 - 3x^2 + 5x - 2, x_0 = 2$$

Задание 13

Разложить функцию в ряд Тейлора функцию

$$f(x) = \cos 2x\, , x_0 = \frac{\pi}{6}$$

Задание 14

Разложить функцию в ряд Тейлора функцию

$$f(x) = \frac{1}{x + 3}, x_0 = -2$$

Задание 15

Разложить функцию в ряд Маклорена функцию

$$f(x) = \ln(1 - 3x)$$

Приложения степенных рядов

Задание 1

Вычислить $\sin 1$ с точностью до 0,0001

Решение:

Воспользуемся разложение функции в ряд Маклорена:

$$\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \cdots + (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} + \cdots .$$

Положив в этой формуле x=1, получим

$$\sin 1 = 1 - \frac{1}{3!} + \frac{1}{5!} - \frac{1}{7!} + \cdots = 1 - \frac{1}{6} + \frac{1}{120} - \frac{1}{5040} + \cdots.$$

Этот ряд является знакочередующимся рядом, удовлетворяющим условиям признака Лейбница. Так так погрешность при замене такого ряда суммой его первых n членов не превышает модуля первого отброшенного члена и $\frac{1}{9!} = \frac{1}{362880} < 0{,}0001$, то для того что бы получить искмое значение с заданной точностью, достаточно взять сумму первых четырех членов. Итак

$$\sin 1 \approx 1 - \frac{1}{6} + \frac{1}{120} - \frac{1}{5040} \approx 0{,}8415.$$

Задание 2

Пользуясь стандартным разложением $\cos x$ в ряд, вычислить $\cos 18^\circ$ с точностью до 0, 0001.

Задание 3

Вычислить $\sqrt[5]{1{,}1}$ с точностью до 0, 0001.

Задание 4

Вычислить $\cos 1$ с точностью до 0,0001.

Задание 5

Вычислить число e с точность до 0,0001.

Задание 6

Вычислить $\sqrt[3]{29}$ с точностью до 0,0001

Задание 7

Вычислить $\ln 2{,}2$ с точностью до 0,0001

Задание 8

Вычислить $\sqrt[5]{e^{-2}}$ с точностью до 0,0001

Задание 9

Вычислить arctg(0,8) с точностью до 0,0001

Задание 10

Вычислить $\sin 0{,}8$ с точностью до 0,0001

Задание 11

Вычислить интеграл

$$\int_0^{0{,}1} x^4 \cos x \, dx$$

с точностью до 0,0001.

Задание 12

Вычислить интеграл

$$\int_0^{\frac{1}{4}} e^{-x^2} \, dx$$

с точностью до 0, 0001.

Задание 13

Найти четыре первых члена разложения решения дифференциального уравнения $y' = 2\cos x - xy^2$, $y(0) = 1$.

Задание 14

Найти три первых отличных от нуля члена разложения в степенной ряд решения дифференциального уравнения $y'' = -2xy, y(1) = 1, y'(1) = 0$.

Задание 15

Используя значение $arctg\,\frac{1}{\sqrt{3}} = \frac{\pi}{6}$ и разложение арктангенса в ряд Маклорена вычислить приближённо число π, используя первые пять членов ряда. Оценить количество верных знаков.

Тема 8. ТЕОРИЯ ВЕРОЯТНОСТЕЙ

8.1. Основные понятия и теоремы теории вероятностей

Пространство элементарных событий. Операции над случайными событиями

Задание 1. Два шахматиста играют подряд две партии. Под исходом опыта будем понимать выигрыш одного из них в i-й партии или ничью. Построить пространство Ω элементарных исходов.

Решение. Обозначим события A_i – в i-й партии выиграл первый игрок, B_i – второй, C_i – ничья. Тогда возможны девять исходов игры:

1. Обе партии выиграл первый игрок: A_1A_2.
2. Обе партии выиграл второй игрок: B_1B_2.
3. Обе партии закончились вничью: C_1C_2.
4. В первой партии выиграл первый игрок, во второй – второй: A_1B_2.
5. В первой партии выиграл первый игрок, во второй – ничья: A_1C_2.
6. В первой партии выиграл второй игрок, во второй – первый: B_1A_2.
7. В первой партии выиграл второй игрок, во второй – ничья: B_1C_2.
8. В первой партии ничья, во второй – победа первого игрока: C_1A_2.
9. В первой партии ничья, во второй – победа второго игрока: C_1B_2.

Ответ: $\Omega = \{ A_1A_2,\ B_1B_2,\ C_1C_2,\ A_1B_2,\ A_1C_2,\ B_1A_2,\ B_1C_2,\ C_1A_2,\ C_1B_2 \}$.

Задание 2. Пусть A, B, C – три произвольных события. Найти выражения для событий, состоящих в том, что из *A, B, C:*

а) произошло только A;
б) произошли A и B, но C не произошло;
в) все три события произошли;
г) произошло, по крайней мере, одно из событий;
д) произошли, по крайней мере, два события;
е) произошло одно и только одно событие;
ж) произошли два и только два события;
з) ни одно событие не произошло;
и) произошло не более двух событий.

Решение. а) Обозначим через $\overline{B}$ и $\overline{C}$ события, заключающиеся в том, что события B и C не произошли, тогда событие {произошло только A} можно записать в виде $A\overline{B}\overline{C}$.

б) $AB\overline{C}$.
в) ABC.

г) $A+B+C$.
д) $AB+AC+BC$.
е) $A\overline{B}\overline{C}+\overline{A}B\overline{C}+\overline{A}\overline{B}C$.
ж) $\overline{A}BC+A\overline{B}C+AB\overline{C}$.
з) $\overline{A}\overline{B}\overline{C}$.
и) $\overline{ABC}$, т.е. три события одновременно не произошли.

Задание 3. а) Пространством элементарных событий при подбрасывании одной монеты является множество $\Omega=\{\mathit{\Gamma},P\}$, которое состоит из двух точек $\omega_1=\mathit{\Gamma}$ (герб) и $\omega_2=P$ (решка).

б) При подбрасывании двух игральных костей пространством элементарных событий является множество $\Omega=\{(1,1),(1,2),...,(1,6),(2,1),...,(2,6),...,(6,6)\}$ – 36 пар цифр. Подмножество $A=\{(1,5),(2,4),(3,3),(4,2),(5,1)\}$ этого пространства есть событие, которое состоит в появлении в сумме шести очков на двух гранях костей. Событие A считается свершившимся, если при подбрасывании двух игральных костей сумма очков равна шести.

в) Подбрасывается монета до появления герба. Возможные результаты в этом эксперименте: Г, РГ, РРГ, РРРГ, … Таким образом, пространство элементарных событий в данном случае есть множество Ω, имеющее бесконечное множество точек (элементарных исходов).

г) Продолжительность жизни, например, людей находится во временном интервале $\Omega=[0;+\infty)$.

Задание 4. Бросают две игральные кости. Пусть A – событие, состоящее в том, что сумма очков нечетная; B – событие, заключающееся в том, что хотя бы на одной из костей выпала единица. Составить пространство элементарных событий, связанное с данным опытом.

Задание 5. Потребитель может увидеть рекламу определенного продукта по телевидению, на рекламном стенде или прочитать в газете. Составить пространство элементарных событий для потребителя в этом опыте.

Задание 6. Из множества супружеских пар наугад выбирается одна пара. События $A=\{$Мужу больше 30 лет$\}$, $B=\{$Муж старше жены$\}$, $C=\{$Жене больше 30 лет$\}$. Выяснить смысл событий ABC, $A-AB$, $A\overline{B}C$.

Задание 7. Рабочий обслуживает три автоматических станка. Событие A – первый станок потребует внимания рабочего в течение часа, B – второй станок потребует внимания рабочего в течение часа, C – третий станок потребует внимания рабочего в течение часа. Что означают события: ABC, $A+B+C$, $A+B+C-ABC$, $\overline{A}\overline{B}\overline{C}$?

Задание 8. Производится испытание трех приборов на надежность. Пусть событие A_k – k-й прибор выдержал испытание ($k=1,2,3$).

Представить в виде суммы и произведения событий A_k и $\overline{A_k}$ следующие события: а) хотя бы один прибор выдержал испытание; б) не менее двух приборов выдержали испытание; в) только один прибор выдержал испытание; г) только два прибора выдержали испытание.

Задание 9. События A, B, C означают, что взято хотя бы по одной книге из трех различных собраний сочинений, каждое из которых содержит, по крайней мере, три тома. События A_s и B_k означают соответственно, что из первого собрания сочинений взяты s, а из второго – k томов. Что означают события: $A+B+C$, A_1+B_3, A_2B_2?

Задание 10. Среди студентов, собравшихся на лекцию по теории вероятностей, выбирают наудачу одного. Пусть событие A заключается в том, что выбранный студент окажется юношей. Событие B – в том, что он занимается спортом, а событие C – в том, что он живет в общежитии. а) Описать событие $AB\overline{C}$. б) При каком условии будет иметь место тождество $ABC = A$? в) Когда будет иметь место равенство $\overline{A} = B$? Будет ли оно иметь место, если все юноши спортсмены?

Элементы комбинаторики

Задание 1. Сколько существует трехзначных чисел с разными цифрами?

Решение. В десятичной системе исчисления десять цифр: 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9. На первом месте может стоять любая из девяти цифр (кроме нуля). На втором месте – любая из оставшихся 9 цифр (кроме выбранной). На последнем месте любая из оставшихся 8 цифр. По правилу произведения 9·9·8 = 648 трехзначных чисел имеют разные цифры.

Ответ: 648.

Задание 2. Сколько существует способов выбора одного карандаша из коробки, содержащей 5 красных, 7 синих, 3 зеленых карандаша?

Решение. Один карандаш, по правилу суммы, можно выбрать 5+7+3 = 15 способами.

Ответ: 15.

Задание 3. В соревнованиях участвует 10 человек, трое из них займут 1-е, 2-е, 3-е место. Сколько существует различных вариантов?

Решение. Выбор осуществляется трех элементов из 10 без возвращений и с учетом порядка, тогда число различных вариантов вычисляется по формуле (см. приложение 1) числа размещений без повторений $\left(A_n^k = \dfrac{n!}{(n-k)!}\right)$, т.е.

$$A_{10}^{3} = \frac{10!}{(10-3)!} = \frac{7!\cdot 8\cdot 9\cdot 10}{7!} = 8\cdot 9\cdot 10 = 720.$$

Ответ: 720.

Задание 4. Сколько существует способов расстановки 10 различных книг на полке?

Решение. Так как осуществляется выбор всех 10 элементов и все они различны, то общее число способов расстановки определяется (см. приложение 1) как число перестановок без повторений из 10 элементов и вычисляется по формуле $P_n = n!$, т.е. P_{10} = 10! = 3628800.

Ответ: 3628800.

Задание 5. Сколько существует способов выбора трех человек из десяти.

Решение. В данном случае при выборе для нас важен только состав наборов по три человека, порядок выбора роли не играет, поэтому в отличие от примера 2.3 число способов выбора подсчитаем по формуле (см. приложение 1) числа сочетаний без повторений $\left(C_n^k = \dfrac{n!}{k!(n-k)!}\right)$:

$$C_{10}^{3} = \frac{10!}{(10-3)!3!} = \frac{7!\cdot 8\cdot 9\cdot 10}{7!\cdot 1\cdot 2\cdot 3} = 120.$$

Ответ: 120.

Задание 6. В гостинице 10 комнат, каждая из которых может разместить четырех человек. Сколько существует вариантов размещения прибывших четырех гостей?

Решение. Каждый гость из 4 может быть помещен в любую из 10 комнат (т.е. выбор осуществляется с учетом порядка и с возвращениями), поэтому общее число размещений, по формуле (см. приложение 1) размещений с повторениями ($\overline{A_n^k} = n^k$), равно $\overline{A_{10}^4} = 10^4 = 10\,000$.

Ответ: 10000.

Задание 7. В магазине продается 10 видов тортов. Очередной покупатель выбил чек на три торта. Считая, что любой набор товаров равновозможен, определить число возможных заказов.

Решение. Выбор осуществляется с возвращениями и без учета порядка, поэтому число равновозможных заказов вычисляется (см. приложение 1) с помощью числа сочетаний с повторениями ($\overline{C_n^k} = C_{n+k-1}^k$):

$$\overline{C_{10}^{3}}=C_{10+3-1}^{3}=C_{12}^{3}=\frac{12!}{(12-3)!3!}=\frac{9!\cdot 10\cdot 11\cdot 12}{9!3!}=220.$$

Ответ: 220.

Задание 8. Сколько различных «слов» (необязательно имеющих смысл) можно составить из всех букв слова «кукушка»?

Решение. Осуществляется выбор всех букв из 7, среди которых есть одинаковые. Поэтому количество слов вычисляется (см. приложение 1) с помощью числа перестановок с повторениями:

$$\overline{P}_{n_1,n_2,\ldots,n_m}=\frac{n!}{n_1!\cdot n_2!\cdot\ldots\cdot n_m!},\ n=n_1+n_2+\ldots+n_m,$$

где $m=4$ (количество различных букв в слове «кукушка»), $n_1=3$ (число букв «к»), $n_2=2$ (число букв «у»), $n_3=1$ (число букв «ш»), $n_4=1$ (число букв «а»), $n=n_1+n_2+n_3+n_4=7$. Тогда

$$\overline{P}_{3,2,1,1}=\frac{7!}{3!\cdot 2!\cdot 1!\cdot 1!}=\frac{4\cdot 5\cdot 6\cdot 7}{2}=420.$$

Ответ: 420.

1. Вычислить: а) $A_7^3+A_6^3+A_5^3$; б) $\frac{A_6^5+A_6^4}{A_6^3}$; в) $\frac{P_5+P_6}{P_4}$; г) $P_6(P_7-P_3)$; д) $C_7^5+C_5^0$; е) $\frac{C_{14}^9+C_{14}^{10}}{C_{15}^{10}}$.

Ответ: а) 390; б) 9; в) 35; г) 3624480; д) 22; е) 1.

2. Найти n, если: а) $A_{n-2}^3=4A_{n-3}^2$; б) $A_n^4=15A_{n-2}^3$; в) $A_n^4\cdot P_{n-4}=42P_{n-2}$; г) $P_{n+5}=240A_{n+3}^{m+3}\cdot P_{n-m}$; д) $5C_n^3=C_{n+2}^4$; е) $C_{n+4}^{n+1}=C_{n+3}^n+15(n+2)$.

Ответ: а) 6; б) 6 или 10; в) 7; г) 11; д) 14 или 3; е) 27.

3. Сколько различных трехзначных чисел можно составить из цифр 1, 2, 3, 4, 5 при условии, что в каждом числе нет одинаковых цифр?

Ответ: 60.

4. Группа учащихся изучает 8 различных дисциплин. Сколькими способами можно составить расписание занятий в субботу, если в этот день недели должно быть 3 различных урока?

Ответ: 336.

5. Сколькими способами 8 различных книг можно расставить на одной полке так, чтобы: а) две определенные книги оказались рядом; б) две определенные книги не оказались рядом?

Ответ: а) $P_2\cdot P_7=10080$; б) 30240.

6. Сколько шестизначных чисел можно составить из цифр 0, 1, 2, 3, 4, 5, не повторяя цифр в числе?

Ответ: 600.

7. В урне 10 белых и 5 черных шаров. Сколькими способами из урны можно наугад вынимать 3 шара вместе, чтобы: а) все три шара оказались белыми; б) все три шара оказались черными; в) два шара оказались белыми, а один черным; г) один шар оказался белым, а два черными?

Ответ: а) 120; б) 10; в) 225; г) 100.

8. В розыгрыше личного первенства техникума по шахматам было сыграно 120 игр. Сколько было участников, если каждые два участника встречались между собой один раз?

Ответ: 16.

9. В группе 20 юношей и 10 девушек. Сколькими способами можно избрать трех юношей и двух девушек для участия в слете студентов?

Ответ: 53100.

10. Для разгрузки товаров директору магазина требуется выделить 5 из 20 имеющихся рабочих. Сколькими способами это можно сделать, осуществляя отбор в случайном порядке?

Ответ: 15504.

11. Сколько словарей надо издать, чтобы переводить с 5 языков на любой другой?

Ответ: 10.

12. Служащий банка утратил 5-значный код одного из сейфов, состоящий из различных цифр. Однако он помнит только 2 цифры этого кода. Сколько вариантов он должен перепробовать, чтобы открыть сейф?

Ответ: 6720.

13. Сколько четырехбуквенных «слов» (необязательно имеющих смысл) можно образовать из слова «студент»?

Ответ: 840.

14. Сколько разных перестановок можно получить из букв слова «задача»?

Ответ: 120.

15. В лифте 5 пассажиров, а в доме 9 этажей. Сколько имеется возможностей у пассажиров выйти из лифта на этажах так, чтобы никакие два из них не вышли на одном и том же этаже?

Ответ: 6720.

16. Сколько прямых линий можно провести через 9 точек, из которых ровно 3 лежат на одной прямой?

Ответ: 34.

Классическое определение вероятности

Задание 1. В урне 10 одинаковых по размерам и весу шаров, из которых 4 красных и 6 голубых. Из урны извлекаем 1 шар. Какова вероятность того, что извлеченный шар окажется голубым?

Решение. Событие «извлеченный шар оказался голубым» обозначим буквой A. Данное испытание имеет 10 равновозможных элементарных исходов, из которых 6 благоприятствуют событию A. В соответствии с классическим определением вероятности, делим количество благоприятных исходов на количество всех возможных исходов $\left(P(A)=\dfrac{m}{n}\right)$, получим $P(A)=\dfrac{6}{10}=0,6$.

Ответ: 0,6.

Задание 2. 1 сентября на первом курсе одного из факультетов запланированы по расписанию 3 лекции из 10 различных предметов. Студент, не успевший ознакомиться с расписанием, пытается его угадать. Какова вероятность успеха в данном эксперименте, если считать, что любое расписание из трех предметов равновозможно.

Решение. Студенту необходимо из 10 лекций, которые могут быть поставлены в расписание, причем в определенном порядке, выбрать три. Следовательно, число всех возможных исходов испытания равно (см. приложение 1) числу размещений из 10 по 3, т.е.

$$n=A_{10}^{3}=\frac{10!}{(10-3)!}=\frac{10!}{7!}=10\cdot 9\cdot 8=720.$$

Благоприятный же случай только один, т.е. $m=1$. Искомая вероятность будет равна $P=\dfrac{m}{n}=\dfrac{1}{720}\approx 0,0014$.

Ответ: 1/720.

1. Наудачу выбрано натуральное число, не превосходящее 30. Какова вероятность того, что это число кратно 3?

Ответ: 1/3.

2. В урне a красных и b голубых шаров, одинаковых по размерам и весу. Чему равна вероятность того, что шар, наудачу извлеченный из этой урны, окажется голубым?

Ответ: $b/(a+b)$.

3. Наудачу выбрано натуральное число, не превосходящее 30. Какова вероятность того, что это число является делителем 30?

Ответ: 4/15.

4. В урне 4 голубых и 7 красных шаров, одинаковых по размерам и весу. Из этой урны извлекают один шар и откладывают в сторону. Этот шар оказался красным. После этого из урны вынимают еще один шар. Найти вероятность того, что второй шар также красный.

Ответ: 0,6.

5. Наудачу выбрано натуральное число, не превосходящее 50. Какова вероятность того, что это число является простым?

Ответ: 0,3.

6. Подбрасывается три игральных кубика, подсчитывается сумма очков на верхних гранях. Что вероятнее – получить в сумме 9 или 10 очков?

Ответ: вероятнее получить в сумме 10 очков (27/216), чем получить в сумме 9 очков (25/216).

7. На полке стоят 15 книг, 5 из них в переплете. Берут наудачу три книги. Какова вероятность того, что все три книги в переплете?

Ответ: 2/91.

8. Подбрасывается три игральных кубика, подсчитывается сумма выпавших очков. Что вероятнее – получить в сумме 11 (событие A) или 12 очков (событие B)?

Ответ: $P(A) = 27/216$, $P(B) = 25/216$, $P(A) > P(B)$.

9. В урне 10 лотерейных билетов, причем 4 из них выигрышные. Из урны наугад извлекаются 2 билета. Найти вероятность того, что: а) оба билета выигрышные; б) оба билета без выигрыша; в) один билет выигрышный, а другой – нет.

Ответ: а) 2/15; б) 1/3; в) 8/15.

10. В лифт на первом этаже семиэтажного дома вошли 3 человека. Каждый из них с одинаковой вероятностью выходит на любом этаже, начиная со второго. Найти вероятность того, что: а) все пассажиры выйдут на одном и том же этаже; б) все пассажиры выйдут на 5-ом этаже; в) все пассажиры выйдут на разных этажах?

Ответ: а) 1/36; б) 1/216; в) 5/9.

11. В магазин поступило 40 новых цветных телевизоров, среди которых 7 имеют скрытые дефекты. Наудачу отбирается один телевизор для проверки. Какова вероятность, что он не имеет скрытых дефектов?

Ответ: 0,825.

12. Найти вероятность того, что дни рождения 12 человек придутся на разные месяцы года?

Ответ: 0,00005372.

13. В кондитерской имеются 6 видов пирожных. Очередной покупатель выбил чек на три пирожных. Считая, что любой заказываемый набор пирожных равновероятен, вычислить вероятность того, что покупатель заказал пирожные разных видов?

Ответ: 0,357.

14. В подъезде дома установили замок с кодом. Дверь автоматически отпирается, если в определенной последовательности набрать три цифры из возможных десяти. Некто подошел к двери и, не зная кода, стал наудачу пробовать различные комбинации из трех цифр. На каждую попытку он тратит 15 секунд. Какова вероятность того, что ему удастся открыть дверь за один час?

Ответ: 0,24.

Основные теоремы теории вероятностей

Задача 1. Два стрелка сделали по 1-му выстрелу в мишень, вероятность попадания первого равна 0,8, а второго – 0,6. Найти вероятность событий: $A = \{$оба попали$\}$, $B = \{$попал один$\}$, $C = \{$попал хотя бы один$\}$.

Решение. Обозначим через A_1, A_2 события, обозначающие, соответственно, что первый и второй стрелки попали в цель. По условию $P(A_1) = 0,8$, $P(A_2) = 0,6$.

Событие A наступит при одновременном попадании, поэтому $A = A_1A_2$. Отсюда, в силу независимости событий A_1 и A_2, имеем $P(A) = P(A_1)P(A_2) = 0,48$.

Так как $B = \overline{A_1}A_2 + A_1\overline{A_2}$, то, учитывая несовместность событий $\overline{A_1}A_2$ и $A_1\overline{A_2}$, имеем $P(B) = \left(\overline{A_1}A_2 + A_1\overline{A_2}\right) = P\left(\overline{A_1}A_2\right) + P\left(A_1\overline{A_2}\right)$. Так события $\overline{A_1}$ и A_2, а также A_1 и $\overline{A_2}$ независимы, то

$$P(B) = \left(\overline{A_1}A_2 + A_1\overline{A_2}\right) = P\left(\overline{A_1}\right)P(A_2) + P(A_1)P\left(\overline{A_2}\right) =$$
$$= \left(1-0,8\right)0,6 + 0,8\left(1-0,6\right) = 0,44.$$

Так как $C = A_1 + A_2$, то по формуле сложения вероятностей

$$P(C) = P(A_1 + A_2) = P(A_1) + P(A_2) - P(A_1A_2) =$$
$$= 0,8 + 0,6 - 0,8 \cdot 0,6 = 0,92.$$

Или через противоположное событие $\overline{C} = \{$не попал ни один$\} = \overline{A_1} \cdot \overline{A_2}$, учитывая независимость событий $\overline{A_1}$ и $\overline{A_2}$, получим

$$P(C) = 1 - P\left(\overline{C}\right) = 1 - P\left(\overline{A_1} \cdot \overline{A_2}\right) = 1 - P\left(\overline{A_1}\right)P\left(\overline{A_2}\right) =$$
$$= 1 - (1-0,8)(1-0,6) = 0,92.$$

Ответ: $P(A) = 0,48$; $P(B) = 0,44$; $P(C) = 0,92$.

Задача 2. В урне 2 белых и 3 черных шара. Из урны вынимают подряд 2 шара. Найти вероятность того, что оба шара белые.

Решение. Рассмотрим элементарные события: $A_1 = \{$первым вытащили белый шар$\}$, $A_2 = \{$вторым вытащили белый шар$\}$. Искомое событие $A =$ $\{$оба шара белые$\}$ наступит, если наступят одновременно и A_1, и A_2, т.е. $A = A_1 A_2$. По формуле произведения вероятностей

$$P(A) = P(A_1 A_2) = P(A_1) P(A_2 / A_1) = \frac{2}{5} \cdot \frac{1}{4} = \frac{1}{10}.$$

Ответ: 1/10.

1. Круговая мишень состоит из трех зон. Вероятности попадания в эти зоны при одном выстреле соответственно равны 0,1; 0,35 и 0,4. Найти вероятность: а) попадания в первую или третью зоны; б) промаха по мишени.

Ответ: а) 0,5; б) 0,15.

2. В группе 25 студентов, из них 10 юношей и 15 девушек. Какова вероятность того, что из трех вызванных наудачу студентов: а) все три девушки; б) первые две девушки, третий – юноша; в) все три юноши?

Ответ: а) 91/460; б) 7/46; в) 6/115.

3. Вероятность безотказной работы автомобиля равна 0,9. Автомобиль перед выходом на линию осматривается двумя механиками. Вероятность того, что первый механик обнаружит неисправность в автомобиле, равна 0,8, а второй – 0,9. Если хотя бы один механик обнаружит неисправность, то автомобиль отправляется на ремонт. Найти вероятность того, что: а) автомобиль будет выпущен на линию; б) автомобиль не будет выпущен на линию.

Ответ: а) 0,902; б) 0,098.

4. Из урны, содержащей четыре красных и шесть черных шаров, вынимают два шара (без возвращения первого). Какова вероятность того, что: а) вынуты два шара черного цвета; б) вынуты красный и черный в любой последовательности; в) второй шар будет черным; г) оба шара одного цвета?

Ответ: а) 1/3; б) 8/15; в) 3/5; г) 7/15.

5. Сколько раз необходимо бросить игральную кость, чтобы с вероятностью 0,9 хотя бы один раз выпало не менее четырех очков?

Ответ: 4.

6. В магазин вошли три покупателя. Вероятность того, что каждый что-нибудь купит, равна 0,3. Найти вероятность того, что: а) два из них совершат покупки; б) все три совершат покупки; в) ни один не совершит покупки; г) по крайней мере, два совершат покупки; д) хотя бы один купит товар.

Ответ: а) 0,189; б) 0,027; в) 0,343; г) 0,216; д) 0,657.

7. Через автобусную остановку проходят автобусы семи маршрутов с равной частотой. Пассажир ожидает автобус одного из маршрутов №1, №5, №7. Какова вероятность того, что нужный ему автобус будет одним из первых трех подошедших к остановке?

Ответ: 31/35.

8. Читатель разыскивает книгу в трех библиотеках. Одинаково вероятно, есть или нет в фонде очередной библиотеки книга и также одинаково вероятно, выдана она или нет. Чему равна вероятность того, что читатель найдет нужную книгу?

Ответ: 37/64.

9. Три студента сдают экзамен. Вероятность того, что отдельный студент сдаст экзамен на «отлично» равна для первого студента 0,7, для второго – 0,6, для третьего – 0,2. Какова вероятность того, что экзамен будет сдан на «отлично»: а) только одним из студентов; б) двумя студентами; в) хотя бы одним; г) ни одним?

Ответ: а) 0,392; б) 0,428; в) 0,904; г) 0,096.

10. В первой бригаде 6 тракторов, во второй – 9. В каждой бригаде один трактор требует ремонта. Из каждой бригады наудачу выбирают по одному трактору. Какова вероятность того, что: а) оба трактора исправны; б) один требует ремонта; в) трактор из второй бригады исправен.

Ответ: а) 0,741; б) 0,241; в) 0,889.

Формула полной вероятности и формула Байеса

Задание 1. Команда стрелков состоит из 5 человек, трое из них попадают с вероятностью 0,8, а двое – с вероятностью 0,6. Наудачу из команды берется стрелок и производит выстрел. а) Какова вероятность того, что стрелок попадет? б) Если стрелок попал в цель, то какова вероятность, что это один из трех (один из двух)?

Решение. а) Событие $A=\{$наудачу взятый стрелок попал$\}$ может произойти, если произойдет одно из несовместных событий $H_1=\{$наудачу взятый стрелок один из трех$\}$ или $H_2=\{$наудачу взятый стрелок один из двух$\}$. Так как H_1 и H_2 несовместны и $H_1+H_2=\Omega$ (т.е. в сумме образуют достоверное событие), то события H_1 и H_2 являются полной группой событий. Для определения вероятности события A воспользуемся формулой полной вероятности:

$$P(A)=\sum_{i=1}^{n}P(H_i)P(A/H_i)=$$

$$=P(H_1)P(A/H_1)+P(H_2)P(A/H_2)=\frac{3}{5}\cdot 0{,}8+\frac{2}{5}\cdot 0{,}6=\frac{18}{25}.$$

б) Воспользуемся формулой Байеса:

$$P(H_k/A)=\frac{P(H_k)P(A/H_k)}{\sum_{i=1}^{n}P(H_i)P(A/H_i)}=\frac{P(H_k)P(A/H_k)}{P(A)},$$

тогда

$$P(H_1 / A) = \frac{P(H_1)P(A / H_1)}{P(A)} = \frac{3/5 \cdot 0,8}{18/25} = 2/3,$$

$$P(H_2 / A) = \frac{P(H_2)P(A / H_2)}{P(A)} = \frac{2/5 \cdot 0,6}{18/25} = 1/3,$$

или $P(H_2 / A) = 1 - P(H_1 / A) = 1 - 2/3 = 1/3.$

Ответ: а) 18/25; б) 2/3 (1/3).

1. В первой урне 10 деталей, из них 8 стандартных. Во второй 6 деталей, из которых 5 стандартных. Из второй урны переложили в первую одну деталь. Какова вероятность того, что деталь, извлеченная после этого из второй урны, нестандартная?

Ответ: 1/6.

2. В районе 24 человека обучаются в университете. Из них 6 – на биотехнологическом факультете, 12 – на экономическом и 6 – на факультете банковского дела. Вероятность успешно сдать все экзамены на предстоящей сессии для студентов биотехнологического факультета равна 0,6, экономического – 0,76 и банковского дела – 0,8. Найти вероятность того, что наудачу взятый студент, сдавший успешно все экзамены, окажется студентом факультета банковского дела.

Ответ: 0,27.

3. Стрелковое отделение получило 10 винтовок, из которых 8 пристрелянных, две нет. Вероятность попадания в цель из пристрелянной винтовки равна 0,6, а из не пристрелянной – 0,4. а) Какова вероятность, что стрелок из наудачу взятой винтовки попадает в цель при одном выстреле? б) Стрелок поразил цель, какова вероятность, что он стрелял из пристрелянной винтовки?

Ответ: а) 0,56; б) 0,857.

4. Для посева заготовлены семена 4 сортов пшеницы. Причем 20% всех семян 1-го сорта, 30% – 2-го сорта, 10% – 3-го сорта и 40% – 4-го сорта. Вероятность того, что из зерна вырастет колос, содержащий не менее 40 зерен, для первого сорта равна 0,5, для второго – 0,3, для третьего – 0,2, для четвертого – 0,1. Найти вероятность того, что наудачу взятое зерно даст колос, содержащий не менее 40 зерен.

Ответ: 0,25.

5. Имеется 5 урн. В первой, второй и третьей находится по 4 белых и 6 черных шаров, в четвертой и пятой урнах – по 2 белых и 3 черных шара. Случайно выбирается урна, и из нее извлекается шар. Какова вероятность того, что была выбрана четвертая или пятая урна, если извлеченный шар оказался белым?

Ответ: 0,4.

6. Покупатель с равной вероятностью посещает 3 магазина. Вероятность того, что он купит товар в первом магазине, равна 0,4, во втором – 0,3, в третьем – 0,2. Определить вероятность того, что покупатель купил товар только в одном магазине, если каждый магазин он посетил дважды.

Ответ: 0,503.

7. При переливании крови учитывается группа крови больного и донора. Человеку с четвертой группой крови можно перелить кровь любой группы; со второй и третьей – той же группы или первой; с первой – только первую группу. Среди населения 33,7% имеют первую группу крови, 37,5% – вторую, 20,9% – третью, 7,9% – четвертую. Найти вероятность того, что случайно взятому больному можно перелить кровь случайно взятого донора.

Ответ: 0,574.

8. Счетчик регистрирует частицы трех типов: A, B и C. Вероятность появления частицы A – 0,2, частицы B – 0,5, частицы C – 0,3. Частицы каждого вида счетчик улавливает с вероятностями 0,8, 0,2 и 0,4 соответственно. Счетчик отметил частицу. Определить вероятность того, что это частица B.

Ответ: 0,26.

9. Рабочий обслуживает 3 станка, на которых обрабатываются однотипные детали. Вероятность брака для первого станка равна 0,02, для второго – 0,03, для третьего – 0,04. Обработанные детали складывают в один ящик. Производительность первого станка в три раза больше, чем второго, а третьего – в два раза меньше, чем второго. Какова вероятность того, что взятая наудачу деталь будет бракованной?

Ответ: 0,024.

10. В группе 21 студент, в том числе 5 отличников, 10 хорошо успевающих и 6 занимающихся слабо. На предстоящем экзамене отличники могут получить только отличные оценки. Хорошо успевающие студенты могут получить с равной вероятностью хорошие и отличные оценки. Слабо занимающиеся студенты могут получить с равной вероятностью хорошие, удовлетворительные и неудовлетворительные оценки. Для сдачи экзамена приглашается наудачу один студент. Найти вероятность того, что он получит хорошую или отличную оценку.

Ответ: 17/21.

11. В первой урне 2 голубых и 6 красных шаров, во второй – 4 голубых и 2 красных. Из первой урны наудачу переложили 2 шара во вторую, после чего из второй урны наудачу достали один шар. а) Какова вероятность того, что этот шар голубой? б) Предположим, что шар, взятый из второй урны, оказался голубым. Какова вероятность того, что из первой урны во вторую были переложены 2 голубых шара?

Ответ: а) 9/16; б) 1/21.

8.2. Схема повторных независимых испытаний

Задание 1. Вероятность попадания в цель составляет при отдельном выстреле $p = 0{,}8$. Найти вероятность пяти попаданий при 6 выстрелах.

Решение. Здесь имеем схему Бернулли, количество испытаний $n = 6$, вероятность удачи (попадания) $p = 0{,}8$, вероятность неудачи (промаха) $q = 1 - p = 0{,}2$. Необходимо найти вероятность того, что из 6 испытаний будет 5 удач, т.е. $m = 5$. Используя формулу Бернулли $P_n(m) = C_n^m p^m q^{n-m}$, имеем

$$P_6(5) = \frac{6!}{5!\cdot 1!}\left(0{,}8\right)^5\left(0{,}2\right)^1 = \frac{6144}{15625} \approx 0{,}3932.$$

Ответ: 0,3932.

Задание 2. Всхожесть семян данного сорта растений оценивается вероятностью 0,8. Какова вероятность того, что из 5 посеянных семян взойдет не меньше 4?

Решение. Здесь $n = 5$, $p = 0{,}8$, $q = 1 - p = 0{,}2$, $m \geq 4$ (т.е. 4 или 5). Поэтому по формуле Бернулли

$$P_5(m \geq 4) = P_5\left(4;5\right) = P_5(4) + P_5(5) =$$

$$= C_5^4(0{,}8)^4(0{,}2)^1 + C_5^5(0{,}8)^5(0{,}2)^0 = \frac{2304}{3125} = 0{,}73728.$$

Ответ: 0,73728.

Задание 3. По данным ОТК на сотню металлических брусков, заготовленных для обработки, приходится 30 с зазубринами. Какова вероятность, что из случайно взятых 7 брусков окажется без дефектов не менее трех?

Решение. Пусть событие $A = \{$на бруске зазубрины отсутствуют$\}$. Тогда $P\left(A\right) = p = \dfrac{70}{100} = 0{,}7$ и $P\left(\overline{A}\right) = q = 0{,}3$. Число испытаний $n = 7$, $m \geq 3$ (т.е. принимает значения от 3 до 7). Поэтому искомая вероятность $P_7\left(3;7\right) = P_7(3) + P_7(4) + P_7(5) + P_7(6) + P_7(7)$. Используя противоположное событие, можно уменьшить количество слагаемых:

$$P_7\left(3;7\right) = 1 - P_7\left(0;2\right) = 1 - \left(P_7(0) + P_7(1) + P_7(2)\right) =$$

$$= 1 - \left(C_7^0(0{,}7)^0(0{,}3)^7 + C_7^1(0{,}7)^1(0{,}3)^6 + C_7^2(0{,}7)^2(0{,}3)^5\right) =$$

$$= 1 - 0{,}0287955 = 0{,}9712045.$$

Ответ: 0,9712045.

Задание 4. При автоматической наводке орудия вероятность попадания по быстро движущейся цели равна 0,9. Найти наивероятнейшее число попаданий при 50 выстрелах.

Решение. Здесь $n = 50$, $p = 0,9$, $q = 0,1$. Так как наивероятнейшее число удач m_0 – это целое число, удовлетворяющее двойному неравенству $np - q \le m_0 \le np + p$, то $50 \cdot 0,9 - 0,1 \le m_0 \le 50 \cdot 0,9 + 0,9$, т.е. $44,9 \le m_0 \le 45,9$. Откуда наивероятнейшее число попаданий $m_0 = 45$.

Ответ: 45.

Задание 5. Вычислительный центр обслуживает 100 программистов. Вероятность того, что в течение одной минуты программист обратится в ВЦ, равна 0,01. Найти вероятность того, что в течение одной минуты обратятся в ВЦ 3 программиста.

Решение. Имеем схему Бернулли с большим числом испытаний $n = 100$, так как $\lambda = np = 100 \cdot 0,01 = 1 < 6$, то используем приближенную формулу Пуассона

$$P_n(m) \approx \frac{\lambda^m}{m!} e^{-\lambda}.$$

Тогда, учитывая, что $e \approx 2,71828$, имеем

$$P_{100}(3) \approx \frac{1^3}{3!} e^{-1} \approx 0,0613.$$

Ответ: 0,0613.

Задание 6. По данным ОТК радиозавода, 0,8 всего объема продукции, выпускаемой заводом, не имеет дефектов. Найти вероятность того, что среди наудачу взятых 400 деталей с дефектом окажется 80.

Решение. Имеем схему Бернулли с большим числом испытаний $n = 400$, так как $\lambda = np = 400 \cdot 0,2 = 80 > 6$ и $nq = 400 \cdot 0,8 = 320 > 6$, то используем приближенную локальную формулу Муавра-Лапласа:

$$P_n(m) \approx \frac{\varphi(x)}{\sqrt{npq}}, \; x = \frac{m - np}{\sqrt{npq}}.$$

Так как

$$x = \frac{80 - 400 \cdot 0,2}{\sqrt{400 \cdot 0,2 \cdot 0,8}} = \frac{0}{8} = 0,$$

то по таблице приближенных значений функции Гаусса (см. приложение 2) находим $\varphi(0) = 0,398942$, откуда искомая вероятность

$$P_{400}(80) \approx \frac{0,398942}{8} \approx 0,049868.$$

Ответ: 0,049868.

Задание 7. В партии из 768 арбузов каждый арбуз оказывается неспелым с вероятностью ¼. Найти вероятность того, что количество спелых арбузов будет в пределах от 564 до 600 включительно.

Решение. Имеем схему Бернулли с большим числом испытаний $n = 768$, $p = 0,75$, $q = 0,25$, $564 \le m \le 600$ (много слагаемых). Так как выполняется двойное неравенство

$$\frac{9}{n+9} < p < \frac{n}{n+9}$$

(действительно, $0,012 \approx \frac{9}{777} < 0,75 < \frac{768}{777} \approx 0,988$),

то используем приближенную интегральную формулу Муавра-Лапласа:

$$P_n(m_1;m_2) \approx \frac{1}{2}\big(\Phi(x_2) - \Phi(x_1)\big),\ x_1 = \frac{m_1 - np}{\sqrt{npq}},\ x_2 = \frac{m_2 - np}{\sqrt{npq}}.$$

Вычислим значения

$$x_1 = \frac{564 - 768 \cdot 0,75}{\sqrt{768 \cdot 0,75 \cdot 0,25}} = \frac{564 - 576}{12} = -1,$$

$$x_2 = \frac{600 - 768 \cdot 0,75}{\sqrt{768 \cdot 0,25 \cdot 0,75}} = \frac{600 - 576}{12} = 2.$$

Так как функция Лапласа нечетная, то $\Phi(-1) = -\Phi(1)$. По таблице приближенных значений функции Лапласа находим $\Phi(1) \approx 0,682689$, $\Phi(2) \approx 0,954500$. Тогда

$$P_{768}(564;600) \approx \frac{1}{2}\big(\Phi(2) + \Phi(1)\big) \approx \frac{1}{2}\big(0,954500 + 0,682689\big) \approx 0,818595$$

Ответ: 0,818595.

1. Монета подбрасывается 10 раз. Какова вероятность того, что герб выпадет ровно 3 раза?

Ответ: 15/128.

2. Чему равно наивероятнейшее число нестандартных среди 500 деталей, если вероятность для каждой из них быть нестандартной равна 0,035?

Ответ: 17.

3. Вероятность того, что покупателю необходима мужская обувь 41-го размера, равна 0,25. Найдите вероятность того, что из шести покупателей, по крайней мере, двум необходима обувь 41-го размера.

Ответ: 0,466.

4. Доля изделий высшего сорта на данном предприятии составляет 40%. Чему равно наивероятнейшее число изделий высшего сорта в случайно отобранной партии из 120 изделий?

Ответ: 48.

5. Производятся независимые испытания, в каждом из которых событие A может появиться с вероятностью 0,0015. Какова вероятность того, что при 2000 испытаниях событие A появится три раза?

Ответ: 0,224042.

6. Сколько раз с вероятностью 0,0484 можно ожидать появление события A в 100 независимых испытаниях, если вероятность его появления в отдельном испытании равна 0,5.

Ответ: 55.

7. При введении вакцины против полиомиелита иммунитет создается в 99,99% случаев. Какова вероятность того, что из 1000 вакцинированных детей заболеет: а) один; б) два; в) три; г) четыре ребенка?

Ответ: а) 0,3679; б) 0,183; в) 0,0613; г) 0,0153.

8. Небольшой город ежедневно посещают 100 туристов, которые днем идут обедать. Каждый из них выбирает для обеда один из двух городских ресторанов с равными вероятностями и независимо друг от друга. Владелец одного из ресторанов желает, чтобы с вероятностью, приблизительно равной 0,99, все пришедшие в его ресторан туристы могли там одновременно пообедать. Сколько мест должно быть для этого в его ресторане?

Ответ: 62.

9. Вероятность появления положительного результата в каждом из n опытов равна 0,9. Сколько нужно произвести опытов, чтобы с вероятностью 0,98 можно было ожидать, что не менее 150 опытов дадут положительный результат.

Ответ: 180.

8.3. Случайные величины и их основные законы распределения

Дискретные случайные величины

Задание 1. Пусть закон распределения случайной величины задан таблицей:

x_i	4	10	20
p_i	0,25	0,5	0,25

Определить математическое ожидание MX, дисперсию DX и среднее квадратичное отклонение σX.

Решение. $MX = \sum_{i=1}^{n} x_i p_i = 4 \cdot 0,25 + 10 \cdot 0,5 + 20 \cdot 0,25 = 1 + 5 + 5 = 11.$

$$DX = \sum_{i=1}^{n} x_i^2 p_i - \left(MX\right)^2 = 4^2 \cdot 0,25 + 10^2 \cdot 0,5 + 20^2 \cdot 0,25 - 11^2 = 33.$$

$\sigma X = \sqrt{DX} = \sqrt{33} \approx 5,745.$

Ответ: $MX = 11$, $DX = 33$, $\sigma X \approx 5,745$.

Задание 2. На двух автоматических станках производятся одинаковые детали. Даны законы распределения числа бракованных изделий, производимых в течение смены на каждом из них:

для первого X:

x_i	0	1	2	3
p_i	0,1	0,2	0,4	0,3

для второго Y:

y_j	0	1	2
q_j	0,5	0,2	0,3

Составить закон распределения числа производимых в течение смены бракованных изделий обоими станками. Проверить свойство математического ожидания суммы случайных величин.

Решение. Будем считать, что станки работают независимо друг от друга, т.е. что случайные величины X и Y независимы. Для того чтобы составить закон распределения числа производимых бракованных изделий обоими станками $X + Y$, необходимо перебрать все возможные значения суммы $x_i + y_j$, при этом каждой сумме соответствует вероятность P_{ij}, вычисляемая как произведение соответствующих вероятностей $P_{ij} = p_i q_j$ (так как случайные величины X и Y независимые), т.е.:

$i \backslash j$	1	2	3
1	$x_1 + y_1 = 0 + 0 = 0$, $P_{11} = 0{,}1 \cdot 0{,}5 = 0{,}05$;	$x_1 + y_2 = 0 + 1 = 1$, $P_{12} = 0{,}1 \cdot 0{,}2 = 0{,}02$;	$x_1 + y_3 = 0 + 2 = 2$, $P_{13} = 0{,}1 \cdot 0{,}3 = 0{,}03$;
2	$x_2 + y_1 = 1 + 0 = 1$, $P_{21} = 0{,}2 \cdot 0{,}5 = 0{,}1$;	$x_2 + y_2 = 1 + 1 = 2$, $P_{22} = 0{,}2 \cdot 0{,}2 = 0{,}04$;	$x_2 + y_3 = 1 + 2 = 3$, $P_{23} = 0{,}2 \cdot 0{,}3 = 0{,}06$;
3	$x_3 + y_1 = 2 + 0 = 2$, $P_{31} = 0{,}4 \cdot 0{,}5 = 0{,}2$;	$x_3 + y_2 = 2 + 1 = 3$, $P_{32} = 0{,}4 \cdot 0{,}2 = 0{,}08$;	$x_3 + y_3 = 2 + 2 = 4$, $P_{33} = 0{,}4 \cdot 0{,}3 = 0{,}12$;
4	$x_4 + y_1 = 3 + 0 = 3$, $P_{41} = 0{,}3 \cdot 0{,}5 = 0{,}15$;	$x_4 + y_2 = 3 + 1 = 4$, $P_{42} = 0{,}3 \cdot 0{,}2 = 0{,}06$;	$x_4 + y_3 = 3 + 2 = 5$, $P_{43} = 0{,}3 \cdot 0{,}3 = 0{,}09$.

Складывая вероятности для одинаковых значений суммы $x_i + y_j$, получим:

$x_i + y_j$	0	1	2	3	4	5
$\sum_{i,j} P_{ij}$	0,05	0,1+0,02	0,2+0,04+0,03	0,15+0,08+0,06	0,06+0,12	0,09

Закон распределения запишем в таблицу:

$X+Y$	0	1	2	3	4	5
P	0,05	0,12	0,27	0,29	0,18	0,09

Проверим свойство математического ожидания $M(X+Y) = M(X) + M(Y)$:

$$M(X) = \sum_{i=1}^{n} x_i p_i = 0 \cdot 0{,}1 + 1 \cdot 0{,}2 + 2 \cdot 0{,}4 + 3 \cdot 0{,}3 = 1{,}9,$$

$$M(Y) = \sum_{j=1}^{n} x_j q_j = 0 \cdot 0{,}5 + 1 \cdot 0{,}2 + 2 \cdot 0{,}3 = 0{,}8,$$

$$M(X+Y) = 0 \cdot 0{,}15 + 1 \cdot 0{,}12 + 2 \cdot 0{,}27 + 3 \cdot 0{,}19 + 4 \cdot 0{,}18 + 5 \cdot 0{,}09 = 2{,}7,$$

$$M(X) + M(Y) = 1{,}9 + 0{,}8 = 2{,}7.$$

Таким образом, равенство $M(X+Y) = M(X) + M(Y)$ верно.

Задание 3. Клиенты банка, не связанные друг с другом, не возвращают кредиты в срок с вероятностью 0,1. Составить закон распределения числа возвращенных в срок кредитов из 5 выданных. Найти математическое ожидание, дисперсию и среднее квадратическое отклонение этой случайной величины.

Решение. В качестве случайной величины X выступает число кредитов, возвращенных клиентами в срок. Возможные значения, которые может принять случайная величина X : 0, 1, 2, 3, 4, 5.

Вероятность того, что каждый клиент возвратит кредит в срок, постоянна и равна $p = 0,9$. Вероятность того, что кредит не будет возвращен в срок, равна $q = 1 - 0,9 = 0,1$. Все 5 испытаний независимы. Случайная величина подчиняется биномиальному распределению с параметрами $n = 5$; $p = 0,9$; $q = 0,1$.

Для составления закона распределения вычислим вероятности того, что случайная величина примет каждое из своих возможных значений. Расчет искомых вероятностей осуществляется по формуле Бернулли $P_n(m) = C_n^m p^m q^{m-n}$, тогда

$$P(X = 0) = P_5(0) = C_5^0 \cdot 0,9^0 \cdot 0,1^5 = 0,00001,$$

$$P(X = 1) = P_5(1) = C_5^1 \cdot 0,9^1 \cdot 0,1^4 = 0,00045,$$

$$P(X = 2) = P_5(2) = C_5^2 \cdot 0,9^2 \cdot 0,1^3 = 0,0081,$$

$$P(X = 3) = P_5(3) = C_5^3 \cdot 0,9^3 \cdot 0,1^2 = 0,0729,$$

$$P(X = 4) = P_5(4) = C_5^4 \cdot 0,9^4 \cdot 0,1^1 = 0,32805,$$

$$P(X = 5) = P_5(5) = C_5^5 \cdot 0,9^5 \cdot 0,1^0 = 0,59049.$$

Запишем закон распределения в виде таблицы:

x_i	0	1	2	3	4	5
p_i	0,00001	0,00045	0,0081	0,0729	0,32805	0,59049

Проверка:

$$\sum_{i=1}^{5} p_i = 0,00001 + 0,00045 + 0,0081 + 0,0729 + 0,32805 + 0,59049 = 1$$

.

Математическое ожидание и дисперсия случайной величины X, распределенной по биномиальному закону, вычисляется по формулам $MX = np$, $DX = npq$. Тогда $MX = 5 \cdot 0,9 = 4,5$, $DX = 5 \cdot 0,9 \cdot 0,1 = 0,45$.

Среднее квадратическое отклонение $\sigma X = \sqrt{DX} = \sqrt{0,45} \approx 0,6708$.

Ответ: $MX = 4,5$, $DX = 0,45$, $\sigma X \approx 0,6708$.

Задание 4. Случайная величина X принимает два значения: $x_1 = 4$ и $x_2 = 5$, а ее математическое ожидание равно 4,6. Найти закон распределения X .

Решение. Пусть $p_1 = P(X = 4)$, $p_2 = P(X = 5)$. Тогда, по условию,

$$MX = \sum_k x_k p_k = 4p_1 + 5p_2 = 4,6.$$

Так как сумма всех вероятностей всегда равна 1, т.е. $\sum p_k = 1$, то $p_1 + p_2 = 1$. Решая систему уравнений

$$\begin{cases} 4p_1 + 5p_2 = 4,6; \\ p_1 + p_2 = 1; \end{cases}$$

получим: $p_1 = 0,4$ и $p_2 = 0,6$.

Тогда закон распределения имеет вид:

x_k	4	5
p_k	0,4	0,6

1. Стрелок, имея четыре патрона, стреляет до первого попадания в цель. Вероятность промаха при каждом выстреле равна 0,6. Записать закон распределения, найти математическое ожидание числа оставшихся патронов.

Ответ: $MX = 1,824$.

2. Найти математическое ожидание и дисперсию числа бракованных изделий в партии из 15000 изделий, если вероятность брака для каждого изделия равна 0,015.

Ответ: $MX = 225$; $DX = 221,625$.

3. Охотник стреляет по дичи до первого попадания, но успевает сделать не более четырех выстрелов. Найти дисперсию числа промахов, если вероятность попадания в цель при одном выстреле равна 0,7.

Ответ: 0,58099.

4. Имеется 7 карандашей, из них 3 красных. Некто наугад достает 3 карандаша. Составить закон распределения случайной величины X – числа извлеченных красных карандашей, найти математическое ожидание.

Ответ: $MX = 1,2857$.

5. Монету подбрасывают 5 раз. Составить закон распределения случайной величины X – числа выпавших решек, найти математическое ожидание, дисперсию, функцию распределения.

Ответ: $MX = 2,5$; $DX = 1,25$.

6. Производится 20 независимых испытаний с вероятностью успеха, равной 0,2. Найти дисперсию.

Ответ: 3,2.

7. Урна содержит 5 черных и 10 красных мячей. Некто наудачу вынимает 2 мяча. Составить закон распределения случайной величины X – числа вынутых черных шаров. Найти математическое ожидание, дисперсию, функцию распределения.

Ответ: $MX = 0,67$; $DX = 0,41$.

8. В сборной команде университета по стрельбе состоит 16 человек, из которых 6 человек – перворазрядники. Из них выбирают 2 членов сборной. Найти закон распределения и математическое ожидание числа перворазрядников в сборной.

Ответ: $MX = 0,75$.

9. В аккредитации участвуют 4 коммерческих вуза. Вероятности пройти аккредитацию и получить сертификат для этих вузов, соответственно равны 0,5; 0,4; 0,3; 0,2. Составить закон распределения числа коммерческих вузов, не прошедших аккредитацию. Найти математическое ожидание и дисперсию этого распределения.

Ответ: $MX = 2,6$; $DX = 0,86$.

10. Вероятность рождения в семье мальчика равна 0,515. Составить закон распределения случайной величины X – числа мальчиков в семьях, имеющих четырех детей. Построить закон распределения вероятностей. Найти математическое ожидание, дисперсию, среднее квадратическое отклонение.

Ответ: $MX = 2,06$; $DX = 0,999$; $\sigma X = 0,9995$.

11. Покупатель посещает магазины для приобретения нужного товара. Вероятность того, что товар имеется в определенном магазине, составляет 0,4. Составить закон распределения случайной величины X – числа магазинов, которые посетит покупатель из четырех возможных. Построить график распределения. Найти наиболее вероятное число магазинов, которые посетит покупатель.

Ответ: 1 или 2 магазина.

Непрерывные случайные величины

Задание 1. Случайная величина X задана функцией распределения

$$F(x) = \begin{cases} 0 & \text{при} \quad x \le 0, \\ ax^3 & \text{при} \quad 0 < x \le 2, \\ 1 & \text{при} \quad x > 2. \end{cases}$$

Найти коэффициент a и плотность вероятностей случайной величины X. Определить вероятность выполнения неравенства $0 < X < 1$.

Решение. Плотность распределения равна производной от функции распределения:

$$f(x) = F'(x) = \begin{cases} 0 & \text{при} \quad x \le 0, \\ 3ax^2 & \text{при} \quad 0 < x \le 2, \\ 0 & \text{при} \quad x > 2. \end{cases}$$

Коэффициент a определяем с помощью условия нормировки $\int\limits_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx = 1$, откуда $\int\limits_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx = \int\limits_{0}^{2} 3ax^2 dx = 1$, т.е.

$$a = \frac{1}{3\int\limits_0^2 x^2 dx} = \frac{1}{3 \cdot \frac{1}{3}x^3 \Big|_0^2} = \frac{1}{8}.$$

Тот же результат можно было получить, используя непрерывность функции $F(x)$ в точке $x = 2$:

$$\lim_{x \to 2-0} F(x) = \lim_{x \to 2-0} ax^3 = 8a, \quad \lim_{x \to 2+0} F(x) = 1.$$

В силу непрерывности функции $F(x)$ в точке $x = 2$, имеем $\lim\limits_{x \to 2-0} F(x) = \lim\limits_{x \to 2+0} F(x)$. Следовательно, $8a = 1$, т.е. $a = \dfrac{1}{8}$.

Поэтому плотность вероятностей имеет вид

$$f(x) = \begin{cases} 0 & \text{при} \quad x \in (-\infty; 0] \cup (2; +\infty), \\ \dfrac{3x^3}{8} & \text{при} \quad 0 < x \le 2. \end{cases}$$

Вероятность попадания случайной величины X в промежуток $[a;b)$ вычисляется по формуле $P(a \le X < b) = F(b) - F(a)$. Так как функция $F(x)$ в точке $x = 0$ непрерывна, то $P(X = 0) = 0$ и

$$P(0 < X < 1) = P(0 \le X < 1) - P(X = 0) = F(1) - F(0) - 0 = \frac{1}{8} - 0 = \frac{1}{8}$$

.

Ответ: $a = \dfrac{1}{8}$; $\quad f(x) = \begin{cases} 0 & \text{при} \quad x \in (-\infty; 0] \cup (2; +\infty), \\ 3x^3/8 & \text{при} \quad 0 < x \le 2; \end{cases}$

$P(0 < X < 1) = 1/8$.

Задание 2. Случайная величина X задана плотностью распределения

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{2}x + 1 & \text{при} \quad x \in (0;1), \\ 0 & \text{при} \quad x \notin (0;1). \end{cases}$$

Найти математическое ожидание случайной величины $Y = X^3$ (не находя предварительно плотности распределения Y).

Решение. Воспользовавшись формулой

$$M\left(\varphi(X)\right) = \int_{-\infty}^{+\infty} \varphi(x) f(x) dx$$

(в нашем случае $\varphi(x) = x^3$), получим

$$M\left(X^3\right) = \int_0^1 x^3 \left(\frac{1}{2}x + 1\right) dx = \int_0^1 \left(\frac{1}{2}x^4 + x^3\right) dx =$$

$$= \left(\frac{1}{10}x^5 + \frac{1}{4}x^4\right)\Bigg|_0^1 = \frac{1}{10} + \frac{1}{4} = \frac{7}{20} = 0{,}35.$$

Ответ: 0,35.

1. Случайная величина X имеет плотность вероятностей $f(x) = \dfrac{a}{1 + x^2}$ $(-\infty < x < +\infty)$. Найти коэффициент a и вероятность того, что случайная величина X примет какое-нибудь значение из интервала $(0;5)$. Найти функцию распределения этой случайной величины.

Ответ: $a = \dfrac{1}{\pi}$; $P(0 < X < 5) = \dfrac{1}{\pi}\operatorname{arctg} 5$; $F(x) = \dfrac{1}{2} + \dfrac{1}{\pi} arctgx$.

2. Случайная величина X задана плотностью распределения

$$f(x) = \begin{cases} \sin 2x & \text{при} \quad x \in (0; \pi/2), \\ 0 & \text{при} \quad x \notin (0; \pi/2). \end{cases}$$

Найти математическое ожидание функции $Y = X^2$ (не находя предварительно плотности распределения Y).

Ответ: $\left(\pi^2 - 4\right)/8$.

3. Масса товаров, помещаемых в контейнер определенного размера – нормально распределенная случайная величина. Известно, что 65% контейнеров имеют чистую массу, меньшую, чем 4,2 т. Найдите среднюю массу и среднее квадратическое отклонение чистой массы контейнера.

Ответ: 5,83 т; 2,41 т.

4. Найти математическое ожидание и дисперсию случайной величины, равномерно распределенной в интервале (5;11). Начертить графики дифференциальной и интегральной функций.

Ответ: 8; 3.

5. Поезда метрополитена идут регулярно с интервалом 3 мин. Пассажир выходит на платформу в случайный момент времени. Какова вероятность того, что ждать пассажиру придется не больше минуты? Найти математическое ожидание и среднее квадратическое отклонение случайной величины X – времени ожидания поезда.

Ответ: $P(X \le 1) = 1/3$; $MX = 1{,}5$ мин; $\sigma X = 0{,}87$ мин.

6. Записать плотность распределения и функцию распределения показательного закона, если параметр $\lambda = 6$. Найти математическое ожидание, дисперсию и среднее квадратическое отклонение случайной величины X, распределенной по этому закону.

Ответ: $DX = 0{,}02778$; $MX = \sigma X = 0{,}16667$.

7. Рост взрослых мужчин является случайной величиной, распределенной по нормальному закону. Пусть математическое ожидание ее равно 175 см, а среднее квадратическое отклонение – 6 см. Определить вероятность того, что хотя бы один из наудачу выбранных пяти мужчин будет иметь рост от 170 см до 180 см.

Ответ: 0,988895.

Законы больших чисел. Предельные теоремы теории вероятностей

Задание 1. Оценить вероятность того, что в течение ближайшего дня потребность в воде в населенном пункте будет не менее 150000 л, если среднесуточная потребность в ней составляет 50000 л.

Решение. Пусть X – суточная потребность в воде. Учитывая, что $X \ge 0$ и используя неравенство Маркова

$$P\left(|X| \ge \varepsilon\right) \le \frac{M\left(|X|\right)}{\varepsilon},$$

получим

$$P(X \ge 150000) \le \frac{50000}{150000} = \frac{1}{3}.$$

Ответ: $\le 1/3$.

Задание 2. Среднее число солнечных дней в году для данной местности равно 90. Оценить вероятность того, что в течение года в этой местности будет не более 239 солнечных дней.

Решение. Пусть X – число солнечных дней в году для данной местности (случайная величина X – дискретная и $X \ge 0$). Из неравенства Маркова следует

$$P\left(|X| < \varepsilon\right) \ge 1 - \frac{M\left(|X|\right)}{\varepsilon},$$

тогда $P(X \le 239) = P(X < 240) \ge 1 - \dfrac{90}{240} = 1 - 0,375 = 0,625$.

Ответ: $\ge 0,625$.

Задание 3. Длина изготавливаемых деталей является случайной величиной, среднее значение которой 50 мм. Среднеквадратическое отклонение этой величины равно 0,2 мм. Оценить вероятность того, что отклонение длины изготовленной детали от ее среднего значения по абсолютной величине не превзойдет 0,4 мм.

Решение. Пусть X – длина изготовленной детали (непрерывная случайная величина). Для оценки вероятности используем следствие из неравенства Чебышева

$$P(|X - MX| < \delta) \ge 1 - \frac{DX}{\delta^2},$$

тогда, учитывая непрерывность X (вероятность принимать конечное число отдельных значений равна нулю), имеем

$$P\left(|X - 50| \le 0,4\right) = P\left(|X - 50| < 0,4\right) \ge 1 - \frac{0,2^2}{0,4^2} = 1 - 0,25 = 0,75.$$

Ответ: $\ge 0,75$.

Задание 4. Пусть всхожесть семян некоторой культуры равна 0,75. Пользуясь неравенством Чебышева, оценить вероятность того, что из посеянных 1000 семян число взошедших окажется от 701 до 799 включительно.

Решение. Пусть X – число взошедших из 1000 посеянных семян. Тогда X имеет биномиальное распределение (X – дискретная случайная величина) с параметрами $n = 10000$, $p = 0,75$. Тогда $MX = np = 1000 \cdot 0,75 = 750$ и граничные значения случайной величины X симметричны относительно $MX = 750$. Поэтому от исходных неравенств $701 \le X \le 799$ можно почленным вычитанием величины $MX = 750$ перейти к неравенствам $-49 \le X - MX \le 49$ или, что тоже самое, $-50 < X - MX < 50$. Последнее неравенство можно переписать в виде $|X - MX| < 50$, что дает левую часть неравенства Чебышева с $\delta = 50$.

Находя дисперсию $DX = npq = 1000 \cdot 0,75 \cdot 0,25 = 750 / 4$ и учитывая, что $\delta^2 = 2500$, получаем правую часть неравенства Чебышева:

$$1 - \frac{DX}{\delta^2} = 1 - \frac{750}{4 \cdot 2500} = 1 - 0,075 = 0,925.$$

Таким образом, получили, что

$$P(701 \le X \le 799) = P(|X - 750| < 50) \ge 0,925.$$

Ответ: $\ge 0,925$.

Задание 5. Среднесуточное потребление электроэнергии в населенном пункте равно 20000 кВт/ч, а среднеквадратическое отклонение – 200 кВт/ч. Какого потребления в этом населенном пункте можно ожидать в ближайшие сутки с вероятностью, не меньшей 0,96?

Решение. Воспользуемся неравенством Чебышева

$$P(|X - MX| < \delta) \ge 1 - \frac{DX}{\delta^2}.$$

Так как $MX = 20000$, $DX = (\sigma X)^2 = 200^2 = 40000$, то

$$P(|X - 20000| < \delta) \ge 1 - \frac{40000}{\delta^2} \ge 0,96,$$

откуда $\frac{40000}{\delta^2} \le 0,04$, т.е. $\delta^2 \ge \frac{40000}{0,04}$, учитывая, что $\delta > 0$, имеем $\delta \ge 1000$. Следовательно, в этом населенном пункте можно ожидать с вероятностью, не меньшей 0,96, потребление электроэнергии $MX \pm \delta = 20000 \pm 1000$, т.е. $X \in (19000; 21000)$.

Ответ: $(19000; 21000)$ кВт/ч.

Задание 6. За значение некоторой величины принимают среднее арифметическое достаточно большого числа измерений. Предполагая, что среднеквадратическое отклонение возможных результатов каждого измерения не превосходит 5 мм, оценить вероятность того, что при 1000 измерениях неизвестной величины отклонение принятого значения от истинного по абсолютной величине не превзойдет 0,5 мм.

Решение. Воспользуемся законом больших чисел в форме Чебышева, а именно неравенством

$$P\left(\left|\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i - MX_1\right| < \delta\right) \ge 1 - \frac{DX_1}{n\delta^2}.$$

По условию $n = 1000$, $\delta = 0,5$, $DX_1 = 5^2 = 25$. Тогда

$$P\left(\left|\frac{1}{1000}\sum_{i=1}^{1000} X_i - MX_1\right| < 0,5\right) \ge 1 - \frac{25}{1000 \cdot 0,25} = 0,9.$$

Ответ: $\ge 0,9$.

Задание 7. При контрольной проверке изготавливаемых приборов было установлено, что в среднем 25 штук из 100 оказывается с теми или иными дефектами. Оценить вероятность того, что доля приборов с дефектами среди

500 изготовленных будет по абсолютной величине отличаться от математического ожидания этой доли не более чем на 0,05.

Решение. Воспользуемся законом больших чисел в форме Бернулли, а именно неравенством

$$P\left(\left|\frac{k}{n}-p\right|<\delta\right)\geq 1-\frac{pq}{n\delta^2}.$$

По условию $n=500$, $\delta=0,05$. В качестве p возьмем величину, полученную при проверке для доли брака $p=\frac{25}{100}=0,25$. Итак,

$$P\left(\left|\frac{k}{500}-0,25\right|<0,05\right)\geq 1-\frac{0,25\cdot 0,75}{500\cdot 0,05^2}=0,85.$$

Ответ: $\geq 0,85$.

Задание 8. При каком числе независимых испытаний вероятность выполнения неравенства $\left|\frac{k}{n}-p\right|<0,2$ превысит 0,96, если вероятность появления события в отдельном испытании $p=0,7$?

Решение. Используя закон больших чисел в форме Бернулли (неравенство $P\left(\left|\frac{k}{n}-p\right|<\delta\right)\geq 1-\frac{pq}{n\delta^2}$), получим

$$P\left(\left|\frac{k}{n}-0,7\right|<0,2\right)\geq 1-\frac{0,7\cdot 0,3}{n(0,2)^2}>0,96.$$

Откуда $\frac{0,21}{0,04n}<0,04$, т.е. $n>\frac{0,21}{0,04\cdot 0,04}=\frac{0,21}{0,0016}=131,25$.

Таким образом, требуемое задачей неравенство выполняется при числе независимых испытаний, начиная со 132.

Ответ: ≥ 132.

1. Среднее число молодых специалистов, ежегодно направляемых в аспирантуру при экономических вузах, составляет 200 человек. Пользуясь неравенством Маркова, оценить вероятность того, что в данном году будет направлено в эти вузы не более 219 молодых специалистов.

Ответ: $\geq 1/11$.

2. Среднее число дождливых дней в году в данном районе равно 80. Оценить вероятность того, что в этом районе будет не более 99 дождливых дней в году.

Ответ: $\geq 0,2$.

3. Номинальное значение диаметра втулки равно 5 мм, а дисперсия, вследствие погрешности изготовления, не превосходит 0,01. Оценить вероятность того, что размер втулки будет отличаться от номинала не более чем на 0,5 мм.

Ответ: $\geq 0{,}96$.

4. Среднее значение длины детали равно 50 см, а дисперсия равна 0,1. Пользуясь неравенством Чебышева, оценить вероятность того, что изготовленная деталь окажется по своей длине не меньше 49,5 см и не больше 50,5 см.

Ответ: $\geq 0{,}6$.

5. Средний вес клубня картофеля равен 120 г. Какова вероятность того, что наугад взятый клубень картофеля весит не более 360 г.

Ответ: $\geq 2/3$.

6. Случайная величина X имеет дисперсию $DX = 0{,}001$. Какова вероятность того, что случайная величина X отличается от $MX = a$ более чем на 0,1?

Ответ: $\leq 0{,}1$.

7. Вероятность наступления события A в каждом из 1000 независимых опытов равна 0,8. Найдите вероятность того, что число наступлений события A в этих 1000 опытах отклонится от своего математического ожидания по модулю меньше чем на 50.

Ответ: $\geq 0{,}936$.

8. Вероятность появления события A в каждом испытании $p = \dfrac{1}{2}$. Используя неравенство Чебышева, оцените вероятность того, что число X появлений события A заключено в пределах от 40 до 60 (не включая границы), если будет произведено 100 независимых испытаний.

Ответ: $\geq 0{,}75$.

9. Вероятность производства нестандартной детали в некоторых технологических условиях равна 0,1. Оценить вероятность того, что число нестандартных деталей среди 10000 будет заключено в границах от 950 до 1050 включительно.

Ответ: $\geq 189/289$.

10. При штамповке пластинок из пластмассы по данным ОТК брак составляет 3%. Найти вероятность того, что при просмотре партии в 1000 пластинок выявится отклонение от установленного процента меньше чем на 1%.

Ответ: $\geq 0{,}709$.

ТЕМА 9. МАТЕМАТИЧЕСКАЯ СТАТИСТИКА

9.1. Основы математической статистики

Задание 1. Задан дискретный вариационный ряд. Найти выборочные: среднее, дисперсию, моду, медиану, коэффициент вариации. Построить полигон частот. Нарисовать график эмпирической функции распределения, если:

а)

Варианты	2	3	6	7	10	12
Частоты	8	10	32	45	13	2

;

б)

Варианты	3	5	8	9	11	12
Частоты	2	26	42	35	4	1

;

в)

Варианты	2	5	7	8	11	13
Частоты	10	9	21	25	30	5

.

Задание 2. В магазине бытовой техники в течение 10 дней проводились наблюдения за количеством проданных телевизоров марки «Горизонт». Получены следующие результаты (см. таблицу).

Порядковый номер дня	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
Количество проданных телевизоров	6	6	4	5	7	5	6	5	2	4

Составить дискретный вариационный ряд. Вычислить выборочные числовые характеристики: среднее, моду, медиану, дисперсию, коэффициент вариации. Изобразить полигон частот и график эмпирической функции распределения. Сделать выводы.

Задание 3. В супермаркете проводились наблюдения за числом X покупателей, обратившихся в кассу за 1 ч с 9:30 до 10:30 в течение 30 дней. Наблюдения дали следующие результаты: 70, 75, 100, 120, 75, 60, 100, 120, 70, 60, 65, 100, 65, 100, 70, 75, 60, 100, 100, 120, 70, 75, 70, 120, 65, 70, 75, 70, 100, 100. Составить дискретный вариационный ряд. Вычислить выборочные числовые характеристики: среднее, моду, медиану, дисперсию, коэффициент вариации. Изобразить полигон частостей и график эмпирической функции распределения. Сделать выводы.

Задание 4. Наблюдается число выигрышей в мгновенной лотерее. В результате наблюдения получены следующие значения выигрышей (тыс. ден. ед.): 0, 1, 0, 0, 5, 0, 10, 0, 1, 0, 0, 1, 5, 1, 0, 0, 0, 1, 0, 1, 0, 0, 0, 0, 5, 0, 5, 0, 0, 0, 1, 1, 1, 5, 10, 0, 1, 1, 0, 5, 0, 0, 0, 0, 1, 0, 1, 0, 5, 0, 0, 0, 0, 1, 0. Составить дискретный вариационный ряд. Вычислить выборочные числовые характеристики: среднее, моду, медиану, дисперсию, коэффициент вариации. Изобразить полигон частот и график эмпирической функции распределения. Сделать выводы.

Задание 5. Имеются следующие данные о возрасте 25 студентов учебной группы (в годах) (см. таблицу).

18	19	21	18	20
20	21	18	20	20
19	18	18	19	18
20	20	19	18	19
18	19	19	18	18

Построить дискретный вариационный ряд выборки распределения студентов по возрасту. Найти выборочные числовые характеристики: среднее, дисперсию, среднее квадратическое отклонение, моду, медиану, коэффициент вариации. Сделать выводы.

Задание 6. В таблице приведены численные значения промежутков времени (в минутах) между появлениями клиентов в некотором банке.

0,000	0,002	0,007	0,025	0,091	0,339	1,527	3,239	0,014	3,457
4,134	3,647	0,374	1,293	0,778	2,091	9,344	0,226	2,590	1,000
3,507	1,086	0,148	2,150	0,740	5,223	3,007	0,791	6,492	3,502
0,738	1,069	2,453	1,447	2,614	2,706	4,314	2,001	3,600	0,764
1,000	1,394	1,272	0,730	1,832	3,741	2,267	1,211	1,949	2,086

Составить интервальный вариационный ряд. Вычислить выборочные числовые характеристики: среднее, моду, медиану, дисперсию, коэффициент вариации. Изобразить гистограмму и полигон частостей. Сделать выводы.

Задание 7. В некотором городе для определения сроков гарантийного обслуживания проведено исследование величины среднего пробега автомобилей, находящихся в эксплуатации в течение двух лет с момента продажи автомобиля магазином (см. таблицу).

3,0	25,0	18,6	12,1	10,6	18,0	17,3	29,1	20,0	18,3
21,5	26,7	12,2	14,4	7,3	9,1	2,9	5,4	40,1	16,8
11,2	9,9	25,3	4,4	29,6	39,2	35,1	14,7	15,2	17,9

Составить интервальный вариационный ряд. Вычислить выборочные числовые характеристики: среднее, моду, медиану, дисперсию, коэффициент вариации. Изобразить гистограмму и полигон частостей. Сделать выводы.

Задание 8. Имеются следующие данные о среднегодовом размере прибыли 20 коммерческих банков (в млн ден. ед.), приведенные в таблице.

3,7	4,3	6,7	5,6	5,1
8,1	4,6	5,7	6,4	5,9
5,2	6,2	6,3	7,2	7,9
5,8	4,9	7,6	7,0	6,9

Построить интервальный ряд распределения коммерческих банков по размеру прибыли, выделив пять групп с равными интервалами. Найти выборочные числовые характеристики: среднее, дисперсию, среднее квадратическое отклонение, коэффициент вариации. Сделать выводы.

9.2.Статистическое оценивание

Задание 1. Стеклянные однородные изделия перевозят к месту назначения в *n* контейнерах. После поступления товара было выявлено количество разбитых изделий в каждом контейнере. Результаты представлены в таблицах. В первой строке указано количество x_i разбитых изделий в одном контейнере, а во второй – частота m_i, равная числу контейнеров с x_i разбитыми изделиями:

а)

Варианты	0	1	2	3	4
Частоты	785	163	32	16	4

;

б)

Варианты	0	1	2	3	4	5	6	7
Частоты	199	169	87	31	9	3	1	1

.

Считая, что число разбитых изделий описывается распределением Пуассона, найти точечную оценку неизвестного параметра θ.

Задание 2. Наблюдаемая случайная величина *X* имеет биномиальное распределение $Bi(k, \theta)$. Статистическое распределение выборки представлено в таблице:

а)

Варианты	0	1	2	3	4	5	6	7
Частоты	2	3	10	22	26	20	12	5

;

б)

Варианты	0	1	2	3	4	5
Частоты	6	14	29	32	15	4

.

Найти точечную оценку неизвестного параметра θ, при условии, что а) $k = 10$; б) $k = 5$.

Задание 3. Телефонная компания желает оценить среднее время междугородних переговоров в течение выходных, когда действует льготный тариф. Случайная выборка из 41 звонка дала следующие результаты: выборочное среднее 14,5 мин. со средним выборочным отклонением 5,6 мин.

Построить 95 % и 90 % доверительные интервалы для средней продолжительности переговоров в выходные дни.

Задание 4. Страховая компания оценивает среднюю сумму исков, предъявленных больными за врачебные ошибки. Компания осуществила случайную выборку 121 иска и оказалось, что выборочное среднее равно 16,53, выборочное квадратическое отклонение – 5,5413. Построить 95 % и 99 % доверительные интервалы для средней суммы исков.

Задание 5. Оптовая фирма, торгующая моющими средствами, желает оценить объем ежедневной продажи упаковок мыла определенного сорта. Случайная выборка за 13 дней дала следующие результаты: 123, 110, 95, 120, 87, 89, 100, 105, 98, 88, 75, 125, 101. Построить 90 % доверительный интервал числа ежедневной реализации упаковок мыла.

Задание 6. Найти объем выборки при обследовании остатков на расчетных счетах у клиентов коммерческого банка, чтобы с вероятностью 0,683 ошибка репрезентативности не превышала 5000 у. е., если известно, что теоретическая дисперсия равна 144 · 108 у. е.

Задание 7. Сколько лиц в возрасте от 20 до 30 лет надо опросить, чтобы установить среди них процент студентов с точностью до 0,5 %, гарантируемый с вероятностью 0,9999?

Задание 8. Исследуется средняя продолжительность телефонного разговора. Сколько телефонных разговоров должно быть зафиксировано, чтобы с вероятностью 0,997 можно было утверждать, что отклонение выборочного среднего от теоретического математического ожидания не превосходит 10 с., если теоретическое среднее квадратическое отклонение равно 2,5 мин.?

Задание 9. Для определения среднего возраста холдинговой компании предполагается провести выборочное обследование. Ошибка выборки Δ не должна превышать 0,5 года. Пробными выборками было установлено, что дисперсия не превышает 9 лет. Сколько сотрудников необходимо отобрать методом случайной выборки, чтобы результат выборочного наблюдения можно было гарантировать с вероятностью 0,9545?

9.3.Проверка статистических гипотез

Задание 1. Наблюдаемая случайная величина X характеризует число сделок на фондовой бирже за квартал. В результате наблюдений получены результаты, представленные в таблице.

Число сделок	0	1	2	3	4	5
Число инвесторов	3	6	8	5	2	1

Подобрать закон распределения, которому подчиняется число проведенных сделок. Найти точечную оценку неизвестного параметра выбранного распределения. Используя критерий χ^2 Пирсона, проверить, согласуются ли статистические данные с выбранным законом распределения при уровне значимости $\alpha = 0{,}05$.

Задание 2. Экзаменационный тест по финансовому менеджменту содержит 10 заданий. Пусть случайная величина X характеризует число правильных ответов одним студентом. Результаты сдачи теста приведены в таблице.

Число правильных ответов	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
Число правильно ответивших студентов	13	17	15	35	10	9	40	51	45	33	32

На уровне значимости $\alpha = 0{,}05$ проверить гипотезу о виде распределения наблюдаемой случайной величины X.

Задание 3. В ходе проверки в отделе фасованных продуктов в случайном порядке осуществлен отбор 121 пакетика с маком весом 60 г. Проверка показала, что средний вес отобранных пакетиков составил в среднем 59 г со средним квадратическим отклонением 5 г. Проверить на уровне значимости $\alpha = 0{,}05$ гипотезу о том, является ли полученное расхождение в весе случайным.

Задание 4. Инвестиционный фонд объявил, что средний годовой доход по акциям предприятия некоторой отрасли промышленности составил 11,5 %.Инвестор, желая проверить, является ли данное заявление достоверным, осуществил выборку 41 акции этой отрасли. Средний годовой доход по ним составил 10,8 % при выборочном среднем квадратическом отклонении 3,4 %. Имеет ли инвестор достаточную информацию для того, чтобы опровергнуть заявление инвестиционного фонда (на уровне значимости $\alpha = 0{,}05$)?

Задние 5. Наблюдаемая случайная величина имеет нормальное распределение. Из генеральной совокупности осуществлена выборка объема $n = 31$ (см. таблицу).

10,3	10,6	11,2	12,0	11,8	1,5	10,6	11,8	11,5	11,5	10,6
11,8	10,3	11,5	10,6	11,2	11,2	11,5	11,2	11,2	11,5	
11,2	10,6	10,3	10,1	11,2	10,6	11,2	10,6	11,2	11,2	

На уровне значимости $\alpha = 0{,}05$ проверить нулевую гипотезу H_0: $\sigma^2 = 0{,}18$.

ТЕМА 10. МАТЕМАТИЧЕСКОЕ ПРОГРАММИРОВАНИЕ

10.1. Линейное программирование

Задание 1. Собственные средства банка вместе с депозитами составляют *S млн. ден. ед.* Не менее *a млн. ден. ед.* этих средств должны быть размещены в кредитах, доходность которых составляет d_1*%.* Кредиты являются неликвидными активами банка, так как в случае непредвиденной потребности в наличности обратить их в деньги без существенных потерь невозможно.

Другое дело ценные бумаги, особенно государственные. Их можно в любой момент продать, получив некоторую прибыль, или, во всяком случае, без большого убытка. Поэтому существует правило, согласно которому коммерческие банки должны покупать в определенной пропорции ликвидные активы – ценные бумаги, чтобы компенсировать неликвидность кредитов. Пусть в данном случае ценные бумаги должны составлять не менее *b%* средств, размещенных в кредитах и ценных бумагах, а их доходность составляет d_2*%.*

Т р е б у е т с я:

1) составить экономико–математическую модель задачи, позволяющую сформировать оптимальный пакет активов, максимизирующий прибыль банка;

2) решить задачу графическим методом.

Все необходимые числовые данные приведены в таблице 1.

Таблица 1

Параметры	Номер задачи									
	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
S	*120*	*85*	*110*	*95*	*105*	*150*	*120*	*115*	*80*	*130*
a	*40*	*30*	*35*	*25*	*30*	*40*	*35*	*25*	*20*	*45*
b	*20*	*25*	*18*	*26*	*22*	*32*	*28*	*24*	*16*	*30*
d_1	*12*	*16*	*14*	*18*	*15*	*12*	*20*	*13*	*15*	*17*
d_2	*8*	*10*	*9*	*12*	*8*	*7*	*14*	*9*	*11*	*13*

Задание 2. Иностранное предприятие планирует выпуск двух видов изделий $П_1$ и $П_2$, при этом будет использоваться сырье трех видов C_1, C_2 и C_3. На изготовление одного изделия $П_1$ расходуется a_{11} *кг.* сырья C_1, a_{21} *кг.* сырья C_2 и a_{31} *кг.* сырья C_3, а на изготовление одного изделия вида $П_2$ расход соответственно составляет a_{12}, a_{22} и a_{32} *кг.* Запас сырья каждого вида на складе имеется в количестве b_1, b_2 и b_3 *кг.*, а прибыль от реализации единицы изделий $П_1$ и $П_2$ соответственно составляет c_1 и c_2 *ден. ед.*

Т р е б у е т с я:

1) составить экономико–математическую модель задачи, по которой будет найден план производства изделий, обеспечивающий максимальную прибыль;

2) решить задачу графическим методом.

Все необходимые числовые данные приведены в таблице 2.

Таблица 2

Параметры	Номер задачи									
	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
c_1	*40*	*6*	*5*	*8*	*5*	*5*	*17*	*4*	*12*	*20*
c_2	*50*	*4*	*6*	*12*	*4*	*3*	*32*	*6*	*8*	*25*
a_{11}	*24*	*16*	*4*	*20*	*18*	*12*	*16*	*10*	*32*	*12*
a_{12}	*8*	*28*	*8*	*40*	*27*	*11*	*32*	*20*	*56*	*4*
a_{21}	*8*	*16*	*14*	*16*	*16*	*12*	*15*	*8*	*32*	*4*
a_{22}	*8*	*8*	*8*	*28*	*8*	*3*	*25*	*14*	*16*	*4*
a_{31}	*3*	*8*	*14*	*20*	*18*	*10*	*9*	*10*	*16*	*2*
a_{32}	*8*	*1*	*2*	*4*	*8*	*3*	*3*	*2*	*2*	*4*
b_1	*600*	*760*	*472*	*1200*	*864*	*860*	*544*	*600*	*1520*	*300*
b_2	*480*	*560*	*592*	*993*	*640*	*732*	*480*	*496*	*1100*	*240*
b_3	*240*	*540*	*591*	*1092*	*853*	*882*	*445*	*546*	*1080*	*120*

Задание 3. Для нормального набора веса теленок в сутки должен потреблять не менее b_1 *усл.ед.* белков, не менее b_2 *усл.ед.* жиров и не менее b_3 *усл.ед.* углеводов. Имеется два вида комбикормов $П_1$ и $П_2$, стоимость единицы массы каждого из них равна соответственно c_1 и c_2 *ден.ед.* Содержание вышеназванных питательных веществ в комбикормах $П_1$ и $П_2$ неодинаково: в единице массы комбикорма $П_1$ содержится a_{11} *усл.ед.* белков, a_{21} *усл.ед.* жиров и a_{31} *усл.ед.* углеводов; в единице массы комбикорма $П_2$ содержится соответственно a_{12}, a_{22}, a_{32} *усл.ед.* тех же питательных веществ соответственно.

Требуется:

1) составить экономико–математическую модель задачи, позволяющую сформировать из комбикормов $П_1$ и $П_2$ суточный рацион, который с одной стороны содержал бы белков, жиров и углеводов не менее минимальных суточных норм и вместе с тем обеспечивал минимум затрат;

2) решить задачу графическим методом.

Все необходимые числовые данные приведены в таблице 3.

Таблица 3

Параметры	Номер задачи									
	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
c_1	*6*	*4*	*13*	*12*	*12*	*3*	*4*	*4*	*7*	*6*
c_2	*10*	*12*	*10*	*11*	*9*	*6*	*9*	*3*	*5*	*10*
a_{11}	*4*	*3*	*9*	*4*	*9*	*3*	*2*	*10*	*8*	*23*
a_{12}	*1*	*16*	*2*	*23*	*3*	*14*	*3*	*3*	*2*	*6*
a_{21}	*4*	*21*	*6*	*8*	*7*	*3*	*2*	*10*	*8*	*5*
a_{22}	*3*	*4*	*23*	*12*	*21*	*2*	*12*	*12*	*10*	*4*
a_{31}	*4*	*3*	*9*	*8*	*9*	*21*	*23*	*1*	*1*	*5*
a_{32}	*15*	*6*	*12*	*3*	*10*	*5*	*6*	*4*	*4*	*14*
b_1	*20*	*69*	*45*	*92*	*63*	*60*	*22*	*50*	*40*	*138*
b_2	*40*	*84*	*138*	*128*	*147*	*24*	*40*	*140*	*104*	*60*
b_3	*88*	*39*	*135*	*56*	*126*	*105*	*138*	*20*	*20*	*110*

Симплексный метод

Задание 1. Решить задачу линейного программирования симплекс-методом.

Предприятие располагает несколькими группами невзаимозаменяемого оборудования, на котором может быть изготовлено три наименования изделий. Составить план производства изделий, обеспечивающий максимальную прибыль реализуемой продукции.

Трудоемкость изделий, фонд полезного времени каждой группы оборудования и прибыль (руб.) от реализации единицы готового изделия каждого вида приведены в следующих таблицах.

Номер варианта – согласна номера в списке группы.

Таблица 1

Изделия оборуд.	1	2	3	Фонд раб. времени
А	2	3	4	780
Б	1	4	5	850
В	3	4	2	790
Прибыль	8	7	6	

Таблица 2

Изделия оборуд.	1	2	3	Фонд раб. времени
А	1	4	5	780
Б	3	4	2	850
В	2	3	4	790
Прибыль	8	7	6	

Таблица 3

Изделия оборуд.	1	2	3	Фонд раб. времени
А	2	3	1	240
Б	3	1	0	180
В	0	4	6	200
Г	1	0	1	160
Прибыль	3	5	4	

Таблица 4

Изделия оборуд.	1	2	3	Фонд раб. времени
А	0	4	6	240
Б	2	3	1	180
В	3	1	0	200
Г	1	0	1	160
Прибыль	3	5	4	

Таблица 5

Изделия оборуд.	1	2	3	Фонд раб. времени
А	3	0	4	60
Б	6	1	0	80
В	1	5	1	80
Г	0	3	4	50
Д	2	3	2	56
Прибыль	6	5	7	

Таблица 6

Изделия оборуд.	1	2	3	Фонд раб. времени
А	6	1	0	60
Б	3	0	4	80
В	1	5	1	80
Г	0	3	4	50
Д	2	3	2	56
Прибыль	6	5	7	

Таблица 7

Изделия оборуд.	1	2	3	Фонд раб. времени
А	3	1	0	240
Б	1	0	1	180
В	0	4	6	200
Г	2	3	1	160
Прибыль	6	5	7	

Таблица 8

Изделия оборуд.	1	2	3	Фонд раб. времени
А	0	4	6	240
Б	3	1	0	180
В	1	0	1	200
Г	2	3	1	160
Прибыль	3	5	4	

Таблица 9

Изделия оборуд.	1	2	3	Фонд раб. времени
А	1	5	1	60
Б	3	0	4	80
В	6	1	0	80
Г	2	3	2	50
Д	0	3	4	56
Прибыль	6	5	7	

Таблица 10

Изделия оборуд.	1	2	3	Фонд раб. времени
А	2	3	2	60
Б	1	5	1	80
В	3	0	4	80
Г	6	1	0	50
Д	0	3	4	56
Прибыль	6	5	7	

Таблица 11

Изделия оборуд.	1	2	3	Фонд раб. времени
А	3	4	2	780
Б	1	4	5	850
В	2	3	4	790
Прибыль	8	7	6	

Таблица 12

Изделия оборуд.	1	2	3	Фонд раб. времени
А	2	3	4	780
Б	3	4	2	850
В	1	4	5	790
Прибыль	8	7	6	

Таблица 13

Изделия оборуд.	1	2	3	Фонд раб. времени
А	6	1	0	60
Б	1	5	1	80
В	0	3	4	80
Г	2	3	2	50
Д	3	0	4	56
Прибыль	6	5	7	

Таблица 14

Изделия оборуд.	1	2	3	Фонд раб. времени
А	2	3	2	60
Б	0	3	4	80
В	6	1	0	80
Г	1	5	1	50
Д	3	0	4	56
Прибыль	6	5	7	

Таблица 15

Изделия оборуд.	1	2	3	Фонд раб. времени
А	1	0	1	240
Б	0	4	6	180
В	2	3	1	200
Г	3	1	0	160
Прибыль	3	5	4	

Таблица 16

Изделия оборуд.	1	2	3	Фонд раб. времени
А	2	3	1	240
Б	1	0	1	180
В	0	4	6	200
Г	3	1	0	160
Прибыль	3	5	4	

Таблица 17

Изделия оборуд.	1	2	3	Фонд раб. времени
А	3	1	0	240
Б	0	4	6	180
В	2	3	1	200
Г	1	0	1	160
Прибыль	3	5	4	

Таблица 18

Изделия оборуд.	1	2	3	Фонд раб. времени
А	2	3	1	240
Б	0	4	6	180
В	3	1	0	200
Г	1	0	1	160
Прибыль	3	5	4	

Таблица 19

Изделия оборуд.	1	2	3	Фонд раб. времени
А	3	0	4	60
Б	6	1	0	80
В	1	5	1	80
Г	0	3	4	50
Д	2	3	2	56
Прибыль	6	5	7	

Таблица 20

Изделия оборуд.	1	2	3	Фонд раб. времени
А	1	5	1	60
Б	2	3	2	80
В	0	3	4	80
Г	3	0	4	50
Д	6	1	0	56
Прибыль	6	5	7	

10.2. Транспортная задача

Задание 1. Транспортная задача:

а) Составить математическую модель транспортной задачи;

б) Решить транспортную задачу методом потенциалов.

№1

a_i \ b_j	75	65	75
50	2	3	8
30	4	1	7
80	3	5	3
20	4	2	8

№2

a_i \ b_j	50	70	80
100	5	6	2
100	7	4	7
100	5	9	10

№3

a_i \ b_j	27	91	39
60	4	8	2
60	1	8	5
60	7	7	6

Задание 2. Транспортная задача:

а) Составить математическую модель транспортной задачи;

б) Решить транспортную задачу методом потенциалов.

№1

a_i \ $в_j$	40	35	30	45	15
46	4	3	2	7	11
34	1	1	6	4	2
40	3	5	9	4	1
15	1	6	8	10	3

№2

a_i \ $в_j$	70	30	100	40
90	2	3	4	3
50	5	3	1	3
60	2	1	2	4
60	3	4	5	2

№3

a_i \ $в_j$	200	400	200	100
150	7	4	3	1
100	2	9	4	2
300	2	2	9	3
250	8	3	1	5

РАЗДЕЛ КОНТРОЛЯ ЗНАНИЙ

Примерный перечень вопросов

Управляемая самостоятельная работа

Примерный перечень вопросов

1 семестр

1. Множества. Операции над множествами.
2. Декартово произведение множеств.
3. Точные и приближенные значения величин. Абсолютная и относительная погрешности.
4. Комплексные числа и действия над ними.
5. Основные линейные операции над векторами.
6. Линейная зависимость векторов.
7. Базис на плоскости и в пространстве.
8. Декартова система координат.
9. Радиус-вектор и координаты точки.
10. Скалярное произведение векторов.
11. Векторное произведение векторов, его свойства, геометрический смысл.
12. Смешанное произведение векторов, его геометрический смысл.
13. Понятие матрицы и линейные операции над ними.
14. Транспонирование матриц. След матрицы.
15. Определители второго и третьего порядка.
16. Алгебраические дополнения и миноры.
17. Определители n-го порядка и их свойства.
18. Правила вычисления определителей, теорема Лапласа.
19. Обратная матрица, свойства обратных матриц. Методы вычисления обратной матрицы.
20. Ранг матрицы, способы его вычисления.
21. Системы линейных алгебраических уравнений. Экономические примеры.
22. Теорема Кронекера-Капелли.
23. Матричный способ решения линейных систем уравнений.
24. Решение систем линейных уравнений методом Крамера.
25. Решение систем линейных уравнений методом Гаусса.
26. Однородные и неоднородные системы линейных уравнений. Структура общего решения.
27. Предмет аналитической геометрии.
28. Метод координат.
29. Кривая на плоскости и способы ее задания.
30. Основные виды уравнений прямой.
31. Угол между прямыми.
32. Условия параллельности и перпендикулярности двух прямых.
33. Расстояние от точки до прямой.
34. Кривые второго порядка: окружность, эллипс, парабола, гипербола.
35. Параметрическое представление линий.
36. Понятия поверхности и линии в пространстве, их уравнения.
37. Основные виды уравнений плоскости в пространстве.

38. Основные виды уравнений прямой в пространстве.
39. Прямая и плоскость.
40. Понятие о поверхностях второго порядка.
41. Числовая последовательность.
42. Предел последовательности и его свойства.
43. Бесконечно малые и бесконечно большие последовательности.
44. Свойства сходящихся последовательностей и критерий их сходимости.
45. Операции над сходящимися числовыми последовательностями.
46. Число *«е»* и его экономическая интерпретация.
47. Предел функции в точке и на бесконечности.
48. Основные теоремы о пределах функций.
49. Замечательные пределы. Односторонние пределы.
50. Бесконечно малые функции и их свойства.
51. Бесконечно большие функции и их связь с бесконечно малыми
52. Непрерывность функции в точке. Свойства непрерывных функций.
53. Точки разрыва функций и их классификация.
54. Непрерывность элементарных функций.
55. Функции, непрерывные на отрезке, и их свойства.
56. Производная функции.
57. Геометрический и физический смыслы производной.
58. Основные правила дифференциального исчисления.
59. Производная сложной и обратной функций.
60. Производные основных элементарных функций.
61. Логарифмическое дифференцирование.
62. Производные высших порядков
63. Дифференцирование параметрически заданных функций.
64. Дифференциалы высших порядков
65. Основные понятия функции нескольких (многих) переменных
66. Предел и непрерывность функции двух переменных
67. Частные производные и дифференцируемость функции двух переменных
68. Дифференцирование сложных функций.
69. Дифференцирование неявных функций.
70. Касательная плоскость и нормаль к поверхности.
71. Полный дифференциал функции двух переменных и его геометрический смысл.
72. Производная по направлению. Градиент.
73. Частные производные высших порядков. Экстремумы функции двух переменных.
74. Наибольшее и наименьшее значение функции в замкнутой области.

2 семестр

1. Первообразная функции и неопределенный интеграл
2. Свойства неопределенного интеграла
3. Таблица неопределенных интегралов

4. Непосредственное интегрирование
5. Метод подведения под знак дифференциала
6. Метод подстановки
7. Интегрирование по частям
8. Интегрирование рациональных дробей
9. Интегрирование некоторых тригонометрических выражений
10. Интегрирование некоторых иррациональных функций
11. Интегралы, не выражающиеся через элементарные функции
12. Определенный интеграл. Основные свойства определенного интеграла.
13. Интеграл с переменным верхним пределом и его дифференцирование. Формула Ньютона-Лейбница.
14. Замена переменной в определенном интеграле. Формула интегрирования по частям для определенного интеграла.
15. Геометрические приложения определенных интегралов: вычисление площадей плоских фигур, объемов тел, длин дуг, площадей поверхностей вращения.
16. Экономические приложения определенных интегралов.
17. Несобственные интегралы и признаки их сходимости.
18. Определение двойного интеграла
19. Геометрический смысл двойного интеграла
20. Свойства двойного интеграла
21. Вычисление двойного интеграла
22. Замена переменных в двойном интеграле
23. Геометрические приложения двойных интегралов
24. Определение криволинейного интеграла 1-го рода
25. Вычисление криволинейного интеграла 1-го уровня
26. Определение криволинейного интеграла 2-го рода
27. Физический смысл криволинейного интеграла 2-го порядка
28. Вычисление криволинейного интеграла 2-го уровня
29. Связь между криволинейными интегралами 1-го и 2-го рода
30. Обыкновенные дифференциальные уравнения. Основные понятия
31. Дифференциальные уравнения первого порядка. Общее и частное решение ДУ
32. Уравнения с разделяющимися переменными
33. Однородные дифференциальные уравнения первого порядка
34. Линейные дифференциальные уравнения первого порядка. Уравнение Бернулли.
35. Дифференциальные уравнения в полных дифференциалах
36. Теорема существования и единственности решения задачи Коши
37. Числовые ряды и их сумма. Основные свойства числовых рядов. Необходимый признак сходимости
38. Достаточные признаки сходимости знакопостоянных рядов
39. Знакопеременные ряды, абсолютная и условная сходимость.
40. Знакочередующиеся ряды, признак Лейбница.

41. Функциональные ряды. Равномерная сходимость функциональных рядов.
42. Степенные ряды. Определение области сходимости степенного ряда
43. Ряд Тейлора. Ряд Маклорена
44. Степенные ряды в приближенных вычислениях. Вычисление значений функции
45. Предмет и метод теории вероятностей.
46. Классификация событий.
47. Алгебра событий.
48. Классическое определение вероятности.
49. Элементы комбинаторики.
50. Теоремы сложения и умножения вероятностей.
51. Относительная частота. Статистическое определение вероятности.
52. Геометрическая вероятность.
53. Формулы полной вероятности, формула Байеса.
54. Последовательность независимых повторных испытаний (схема Бернулли).
55. Формула Бернулли.
56. Теорема Пуассона.
57. Локальная и интегральная теорема Муавра-Лапласа.
58. Случайные величины (дискретные и непрерывные)
59. Закон распределения случайной величины
60. Функция распределения случайной величины и ее свойства
61. Плотность распределения непрерывной случайной величины и ее свойства
62. Основные числовые характеристики дискретных и непрерывных случайных величин: математическое ожидание, дисперсия, среднее квадратическое отклонение
63. Мода и медиана. Квантили. Моменты случайной величины. Асимметрия и аксцесс
64. Биномиальный закон распределения
65. Закон Пуассона
66. Геометрическое и гипергеометрическое распределение
67. Равномерный закон распределения
68. Показательный закон распределения
69. Нормальный закон распределения
70. Задачи математической статистики.
71. Генеральная совокупность и выборка. Сущность выборочного метода.
72. Вариационный ряд.
73. Эмпирическая функция распределения и ее свойства.
74. Графическое изображение вариационных рядов: полигон, гистограмма.
75. Понятие статистической гипотезы
76. Проверка гипотезы о равенстве статистических средних значений
77. Проверка гипотезы о равенстве двух дисперсий

78. Критерий согласия $\chi 2$
79. Линейное программирование (ЛП).
80. Постановка задачи ЛП.
81. Формы записи задач ЛП.
82. Графический метод решения задач ЛП.
83. Основные теоремы ЛП.
84. Построение начального опорного плана
85. Симплексные таблицы
86. Признак оптимальности опорного плана
87. Переход к нехудшему опорному плану
88. Симплексные преобразования
89. Метод искусственного базиса (М-задача)
90. Постановка транспортной задачи. Закрытая модель. Теорема о существовании решения.
91. Метод потенциалов: построение опорного плана, схема решения.
92. Метод дифференциальных рент.
93. Дополнительные ограничения транспортной задачи.

Управляемая самостоятельная работа

Управляемая самостоятельная работа студента по дисциплине ”Математика“ направлена на углубленное самостоятельное теоретическое изучение приведенных ниже тем.

Управляемая самостоятельная работа студентов предусматривает использование материалов и тестов, размещенных в модульной объектно-ориентированной среде E-learning ПолесГУ, а также комплекса индивидуальных заданий.

Тема	Задания	Форма контроля
1	2	3
1 Комплексные числа и действия над ними.	Выполнить тест по теме ”Комплексные числа и действия над ними“	Фронтальный опрос, решение задач
2 Векторная алгебра	Выполнить решение задач ”Векторная алгебра“	Фронтальный опрос, решение задач
3 Матричное исчисление	Дополнить конспект лекции по теме самостоятельно изученными вопросами: 1.Методы вычисления ранга матрицы. 2.Примеры действий над матрицами которые делать нельзя Выполнить ИЗ по соответствующей теме.	Фронтальный опрос, решение задач
4 Системы линейных уравнений и неравенств	Дополнить конспект лекции по теме самостоятельно изученными вопросами: Теорема Кронекера-Капелли. 2. Однородные и неоднородные системы линейных уравнений. 3.Системы линейных неравенств. 4.Применение элементов линейной алгебры в экономике. Выполнить ИЗ по соответствующей теме.	Фронтальный опрос, решение задач

5 Аналитическая геометрия на плоскости.	Дополнить конспект лекции по теме самостоятельно изученным вопросом ”Кривые второго порядка“. Выполнить ИЗ по соответствующей теме.	Фронтальный опрос, решение задач
6 Элементы аналитической геометрии в пространстве	Дополнить конспект лекции по теме самостоятельно изученными вопросами: 1. Виды уравнений прямой в пространстве. 2.Выполнить тест по теме ”Аналитическая геометрия в пространстве“.	Фронтальный опрос, беседа
7 Дифференциальное исчисление функций одной переменной.	Выполнить решение задач по теме ”Производная функции. Правила дифференцирования“.	Фронтальный опрос, решение задач
8 Дифференцирование неявно заданных функций.	Выполнить решение задач по теме ”Производные высших порядков. Дифференциалы высших порядков. Дифференцирование неявно заданных функций“.	Фронтальный опрос, решение задач
9 ФМП	Дополнить конспект лекции по теме самостоятельно изученными вопросами: 1. Правила Лопиталя и их применение для раскрытия неопределенностей 2. Экстремум функции. 3. Формула Тейлора. Выполнить решение задач по теме ”Правила Лопиталя и их применение для раскрытия неопределенностей“.	Фронтальный опрос, решение задач
10 Общая схема исследования поведения функции и построение графика функции.	Дополнить конспект лекции по теме самостоятельно изученными вопросами: 1. Достаточное условие выпуклости. 2. Выпуклость и точки перегиба. 3. Вертикальные и наклонные асимптоты графика функции. Выполнить ИЗ по соответствующей теме.	Фронтальный опрос, решение задач
11 Дифференциальное исчисление функций многих переменных	Дополнить конспект лекции по теме самостоятельно изученными	Фронтальный опрос,

	вопросами: 1. Связные и ограниченные множества. 2. Линии и поверхности уровня ФМП. 3. Непрерывность ФМП в точке. Выполнить решение задач по соответствующей теме.	решение задач
12 Частные производные высших порядков. Формула Тейлора для ФМП.	Выполнить тест по соответствующей теме.	Фронтальный опрос, решение задач
13 Экстремум ФМП,условный экстремум.	Дополнить конспект лекции по теме самостоятельно изученным вопросом: 1. Условный экстремум ФМП. 2. Метод множителей Лагранжа. 3. Наибольшее и наименьшее значения непрерывной ФМП в замкнутой области. Выполнить ИЗ по соответствующей теме.	Фронтальный опрос, решение задач
14 Неопределенный интеграл	Выполнить решение задач по теме ”Неопределенный интеграл. Интегрирование рациональных функций“.	Фронтальный опрос, решение задач
15 Определенный интеграл и его свойства. Приложение определенных интегралов	Дополнить конспект лекции по теме самостоятельно изученными вопросами: 1. Определенный интеграл и его свойства. 2. Исследование на сходимость: признаки сравнения для интегралов от неотрицательных функций. 3. Главное значение несобственного интеграла Выполнить ИЗ по соответствующей теме.	Фронтальный опрос, решение задач
16 Определение двойного интеграла, его свойства, геометрические и физические приложения.	Дополнить конспект лекции по теме самостоятельно изученным вопросом: 1. Вычисление двойных интегралов в декартовой системе координат. 2. Изменение порядка	Фронтальный опрос, решение задач

	интегрирования в двойном интеграле. Выполнить тест по соответствующей теме.	
17 Дифференциальные уравнения и системы	Дополнить конспект лекции по теме самостоятельно изученными вопросами: 1. Основные понятия о ДУ высших порядков. 2. Задача Коши. ДУ, допускающие понижение порядка. 3. Задачи, приводящие к системам ДУ. 4. Интегрирование линейных однородных и линейных неоднородных систем ДУ с постоянными коэффициентами методом исключения. Выполнить ИЗ по соответствующей теме.	Фронтальный опрос, решение задач
18 Числовые и функциональные ряды	Дополнить конспект лекции по теме самостоятельно изученными вопросами: 1. Равномерная сходимость функциональных рядов. Признак Вейерштрасса равномерной сходимости. Свойства равномерно сходящихся функциональных рядов. 2. Приложение степенных рядов к решению дифференциальных уравнений и определенных интегралов. Выполнить ИЗ по соответствующей теме.	Фронтальный опрос, решение задач
19 Теория вероятностей	Дополнить конспект лекции по теме самостоятельно изученными вопросами: 1. Основные законы распределения 2. Схема повторных испытаний Выполнить ИЗ по соответствующей теме.	Фронтальный опрос, решение задач
20 Математическое программирование	Дополнить конспект лекции по теме самостоятельно изученными вопросами: Задачи выбора наиболее рационального маршрута доставки груза, оптимального	Решение задачи

	распределения средств на расширение производства, определения оптимальной стратегии замены оборудования, формирования оптимальной программы производства с учетом запасов.	

ВСПОМОГАТЕЛЬНЫЙ РАЗДЕЛ

СОДЕРЖАНИЕ УЧЕБНОГО МАТЕРИАЛА

РАЗДЕЛ 1. ОСНОВЫ ТЕОРИИ МНОЖЕСТВ И МАТЕМАТИЧЕСКОЙ СИМВОЛИКИ

Тема 1.1 Элементы теории множеств и математической логики

Логические символы, операции над множествами. Декартово произведение множеств. Экономические примеры. Основные числовые множества. Точные и приближенные значения величин. Абсолютная и относительная погрешности.

Тема 1.2 Комплексные числа и действия над ними.

Геометрическая интерпретация комплексных чисел. Алгебраическая, тригонометрическая и показательная формы комплексных чисел. Формулы Муавра и Эйлера. Свойства комплексно-сопряженных выражений. Применение комплексных чисел.

РАЗДЕЛ 2. ВЕКТОРНАЯ АЛГЕБРА И МАТРИЧНОЕ ИСЧИСЛЕНИЕ

Тема 2.1. Понятие вектора на плоскости и в трехмерном пространстве

Основные линейные операции над векторами. Проекция вектора на ось. Линейная зависимость векторов. Базис на плоскости и в пространстве. Декартова система координат. Радиус-вектор и координаты точки. Деление отрезка в данном отношении. Скалярное произведение векторов, его свойства и экономическая интерпретация. Условие ортогональности двух векторов. Ориентация тройки векторов в пространстве. Векторное произведение векторов, его свойства, геометрический смысл. Смешанное произведение векторов, его геометрический смысл. Условие компланарности трех векторов.

Тема 2.2. Понятие матрицы и линейные операции над ними.

Транспонирование матриц. След матрицы. Экономическая интерпретация матриц. Определители второго и третьего порядка. Алгебраические дополнения и миноры. Определители n-го порядка и их свойства. Правила вычисления определителей, теорема Лапласа. Определитель произведения матриц. Обратная матрица, свойства обратных матриц. Методы вычисления обратной матрицы. Ранг матрицы, способы его вычисления.

Тема 2.3. Системы линейных алгебраических уравнений

Экономические примеры. Теорема Кронекера-Капелли. Матричный способ решения линейных систем. Формулы Крамера, метод Гаусса. Однородные и неоднородные системы линейных уравнений. Структура общего решения.

РАЗДЕЛ 3. АНАЛИТИЧЕСКАЯ ГЕОМЕТРИЯ

Тема 3.1 Аналитическая геометрия на плоскости.

Предмет аналитической геометрии. Метод координат. Кривая на плоскости и способы ее задания. Основные виды уравнения прямой. Угол между прямыми. Условия параллельности и перпендикулярности двух прямых. Расстояние от точки до прямой. Кривые второго порядка: окружность, эллипс, парабола, гипербола. Параметрическое представление линий.

Тема 3.2 Элементы аналитической геометрии в пространстве

Простейшие задачи аналитической геометрии в пространстве. Понятия поверхности и кривой в пространстве, их уравнения. Основные виды уравнений плоскости и прямой в пространстве. Ортогональная проекция вектора на плоскость. Угол между плоскостями. Угол между двумя прямыми. Угол между прямой и плоскостью. Расстояние от точки до плоскости. Понятие о поверхностях второго порядка.

РАЗДЕЛ 4. ФУНКЦИИ ОДНОЙ И НЕСКОЛЬКИХ ПЕРЕМЕННЫХ. ДИФЕРЕНЦИРОВАНИЕ ФУНКЦИЙ.

Тема 4.1. Числовая последовательность и ее предел

Действительные числа. Числовые последовательности. Предел последовательности и его свойства. Бесконечно малые и бесконечно большие последовательности. Монотонные, ограниченные последовательности. Свойства сходящихся последовательностей и критерий их сходимости. Способы вычисления пределов последовательностей. Число *«е»* и его экономическая интерпретация.

Тема 4.2 Функции одной вещественной переменной

Функции, их области определения и значений, способы задания и график функции. Основные характеристики поведения функции. Основные элементарные функции. Неявные функции. Предел функции в точке и на бесконечности. Основные теоремы о пределах функций. Замечательные пределы. Односторонние пределы. Бесконечно малые и бесконечно большие функции. Непрерывность функции в точке. Свойства непрерывных функций. Точки разрыва функций и их классификация. Непрерывность элементарных функций. Сравнение функций, символы «о» и «О». Функции, непрерывные на отрезке, и их свойства: теоремы Вейерштрасса, Коши о прохождении функции через ноль, теорема Коши о промежуточном значении. Непрерывность обратной функции.

Тема 4.3 Дифференциальное исчисление функций одной вещественной переменной

Задачи, приводящие к понятию производной. Производная функции, ее геометрический и экономический смыслы. Уравнение касательной и нормали к кривой. Основные правила дифференциального исчисления. Производная сложной, обратной и неявной функций. Производные элементарных функций. Логарифмическое дифференцирование. Дифференцирование параметрически заданных функций. Дифференциал функции, его геометрический смысл и применение в приближенных вычислениях. Инвариантность формы дифференциала. Производные высших порядков. Формула Лейбница. Дифференциалы высших порядков. Локальный экстремум функции. Основные теоремы дифференциального исчисления: Ферма. Ролля, Коши, Лагранжа. Раскрытие неопределенностей, правило Лопиталя. Формула Тейлора. Остаточный член в форме Пеано и Лагранжа. Основные разложения по формуле Тейлора. Приложения формулы Тейлора. Экстремумы функции, стационарные точки. Необходимое и достаточное условия локального экстремума. Наибольшее и наименьшее значения функции на отрезке. Выпуклость и точки перегиба. Достаточное условие выпуклости. Необходимое условие перегиба. Достаточные условия перегиба. Вертикальные и наклонные асимптоты графика функции. Общая схема исследования функции и построение ее графика. Экономические приложения: предельные показатели в экономике, эластичность экономических показателей, максимизация прибыли

Тема 4.4. Функции многих переменных

Предел функции в точке, повторные пределы. Непрерывность. Свойства непрерывных функций. Частные производные. Геометрический смысл частной производной функции двух переменных. Примеры применения частных производных в экономике. Дифференцируемость функции многих переменных, необходимые и достаточные условия дифференцируемости. Полный дифференциал и его связь с частными производными. Дифференцирование сложных функций. Частные производные высших порядков. Теорема о равенстве смешанных производных. Дифференциалы высших порядков. Понятие экстремума функции двух переменных. Необходимое и достаточное условия экстремума. Наибольшее и наименьшее значения функции в заданной области. Условный экстремум. Метод множителей Лагранжа. Приложения к экономическим проблемам.

РАЗДЕЛ 5. ИНТЕГРАЛЬНОЕ ИСЧИСЛЕНИЕ ФУНКЦИЙ ОДНОЙ И НЕСКОЛЬКИХ ПЕРЕМЕННЫХ

Тема 5.1 Первообразная и неопределенный интеграл

Первообразная функции и неопределенный интеграл. Свойства неопределенного интеграла. Метод замены переменной. Формула интегрирования по частям. Таблица неопределенных интегралов. Интегрирование простейших рациональных дробей. Интегрирование рациональных функций. Интегрирование иррациональных функций. Интегрирование выражений, содержащих тригонометрические функции. Неберущиеся интегралы.

Тема 5.2 Определенный интеграл

Задачи, приводящие к понятию определенного интеграла. Определенный интеграл. Основные свойства определенного интеграла. Условия интегрируемости функций. Интеграл с переменным верхним пределом и его дифференцирование. Формула Ньютона-Лейбница. Замена переменной в определенном интеграле. Формула интегрирования по частям для определенного интеграла. Геометрические приложения определенных интегралов: вычисление площадей плоских фигур, объемов тел, длин дуг, площадей поверхностей вращения. Экономические приложения определенных интегралов. Несобственные интегралы и признаки их сходимости.

Тема 5.3. ДВОЙНЫЕ ИНТЕГРАЛЫ

Задачи, приводящие к двойному интегралу. Определение двойного интеграла и его свойства. Вычисление двойных интегралов в декартовой системе координат. Изменение порядка интегрирования в двойном интеграле. Якобиан и его геометрический смысл. Замена переменных в двойных интегралах.

РАЗДЕЛ 6. ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ

Тема 6.1. Обыкновенные дифференциальные уравнения.

Основные понятия теории обыкновенных дифференциальных уравнений, общее и частное решение. Математическое моделирование в экономике и технике с помощью дифференциальных уравнений. Задача Коши. Теорема существования и единственности решения. Дифференциальные уравнения первого порядка и методы их интегрирования. Линейные дифференциальные уравнения первого и второго порядков. Однородные и неоднородные линейные дифференциальные уравнения второго порядка с постоянными коэффициентами и специальной правой частью. Характеристическое уравнение. Линейная независимость решений. Метод Лагранжа вариации произвольной постоянной. Общие понятия о дифференциальных уравнениях высших порядков. Приложения дифференциальных уравнений к решению экономических задач.

РАЗДЕЛ 7. ЧИСЛОВЫЕ И ФУНКЦИОНАЛЬНЫЕ РЯДЫ

Тема 7.1 Числовые ряды.

Числовой ряд и его сумма. Действие над рядами. Простейшие свойства числовых рядов. Необходимое условие сходимости ряда. Гармонический ряд. Признаки сходимости числовых рядов: критерий Коши, признаки сравнения, признаки Даламбера и Коши, интегральный признак. Знакопеременные ряды, абсолютная и условная сходимость. Знакочередующиеся ряды, признак Лейбница. Оценка остатка ряда. Свойства абсолютно и условно сходящихся рядов.

Тема 7.2 Функциональные и степенные ряды.

Функциональные ряды, область сходимости и сумма ряда. Равномерная сходимость функциональных рядов. Критерий Коши и признак Вейерштрасса равномерной сходимости. Свойства равномерно сходящихся функциональных рядов: непрерывность суммы, почленное дифференцирование и интегрирование рядов. Степенные ряды, теорема Абеля. Радиус, интервал и область сходимости степенного ряда. Непрерывность суммы, интегрирование и дифференцирование степенных рядов. Ряды Тейлора и Маклорена. Достаточные условия представления функции рядом Тейлора. Разложение основных элементарных функций в ряд Тейлора. Применение рядов Тейлора в приближенных вычислениях.

РАЗДЕЛ 8. ТЕОРИЯ ВЕРОЯТНОСТЕЙ

8.1. Основные понятия и теоремы теории вероятностей

Предмет и метод теории вероятностей. Случайные события и операции над ними. Классификация событий. Алгебра событий. Полная группа событий. Частота и вероятность. Классическое определение вероятности. Геометрическое и статистическое определение вероятности. Элементы комбинаторики. Теоремы сложения и умножения вероятностей. Вероятность появления хотя бы одного из *n* событий, независимых в совокупности. Условная вероятность. Независимость событий. Формула полной вероятности и формула Байеса.

8.2. Схема повторных независимых испытаний

Последовательность независимых повторных испытаний (схема Бернулли). Формула Бернулли. Наивероятнейшее число успехов в схеме Бернулли. Теорема Пуассона. Локальная и интегральная теоремы МуавраЛапласа. Примеры экономических задач, для которых применима схема повторных испытаний Бернулли.

8.3. Случайные величины и их основные законы распределения

Случайные величины и их классификация. Дискретные и непрерывные величины. Законы распределения случайных величин. Функция распределения случайных величин и ее свойства. Плотность распределения непрерывной случайной величины и ее свойства. Вероятность попадания значений случайной величины в заданный промежуток. Математическое ожидание и дисперсия случайной величины. Среднее квадратическое отклонение. Мода и медиана, начальные и центральные моменты. Асимметрия и эксцесс. Функции случайных величин. Биномиальный закон распределения. Закон Пуассона. Геометрическое и гипергеометрическое распределения. Равномерное распределение. Показательное распределение. Нормальный закон распределения. Правило трех сигма и его практическое значение. Понятие о законе больших чисел и центральной предельной теореме.

РАЗДЕЛ 9. МАТЕМАТИЧЕСКАЯ СТАТИСТИКА

9.1. Основы математической статистики

Предмет математической статистики. Генеральная и выборочная совокупности. Понятие о выборочном методе. Вариационный ряд и его характеристики. Выборочные аналоги функций распределения. Полигон и гистограмма. Среднее арифметическое и его свойства. Выборочная дисперсия и ее свойства. Выборочные начальные и центральные моменты. Асимметрия. Эксцесс.

9.2. Статистическое оценивание

Понятие о точечной оценке числовой характеристики случайной величины, свойства точечной оценки. Точечные оценки математического ожидания и дисперсии. Частость как точечная оценка вероятности события. Методы получения точечных оценок. Интервальное оценивание параметров распределений. Доверительный интервал. Интервальное оценивание генеральной средней, генеральной дисперсии и генеральной доли. Предельная ошибка и необходимый объем выборки.

9.3. Проверка статистических гипотез

Понятие статистической гипотезы. Основные этапы проверки гипотезы. Уровень значимости и мощность критерия. Проверка гипотез о числовых значениях параметров нормального распределения. Проверка гипотезы о равенстве математических ожиданий двух нормальных распределений. Проверка гипотезы о равенстве дисперсий двух нормальных распределений. Проверка гипотезы о модели закона распределения. Критерии согласия Пирсона и Колмогорова.

РАЗДЕЛ 10. МАТЕМАТИЧЕСКОЕ ПРОГРАММИРОВАНИЕ

10.1. Линейное программирование

Основные понятия. Основные постановки задач линейного программирования (ЗЛП). Геометрический (графический) метод решения ЗЛП. Симплексный метод решения ЗЛП. Теория двойственности. Задача планирования технологий. Задача планирования уровней производства.

10.2. Транспортная задача

Транспортная задача по критерию стоимости и задачи транспортного типа с максимизацией целевой функции. Метод потенциалов для решения транспортных задач.

Учебно-методические карты дисциплины

Номер раздела, темы	Название раздела, темы	Количество аудиторных часов					Форма контроля знаний
		Всего	Лекции (без УСР)	Лекции (УСР)	Практические занятия (без УСР)	Практические занятия (УСР)	
ВСЕГО:		**166**	**48**	**20**	**58**	**40**	
1 семестр		**86**	**24**	**10**	**30**	**22**	Экзамен
1	*Основы теории множеств и математической*	8	*2*	*2*	*2*	*2*	
1.1, 1.2	Элементы теории множеств. Комплексные числа*	8	2	2	2	2	Фронтальный опрос, решение
2	*Векторная алгебра и*	*22*	*6*	*2*	*8*	*6*	
2.1	Векторная алгебра*	6	2		2	2	Фронтальный опрос, решение
2.2	Матричное исчисление*	6	2		2	2	Фронтальный опрос, решение
2.3	Системы линейных уравнений и неравенств*	10	2	2	4	2	**Контрольная точка №1** – контрольная работа
3	*Аналитическая геометрия*	*16*	*4*	*2*	*4*	*6*	
3.1	Аналитическая геометрия на плоскости*	10	2	2	2	4	Фронтальный опрос, решение
3.2	Элементы аналитической геометрии в пространстве*	6	2		2	2	**Контрольная точка № 2** – контрольная
4	*Функции одной и нескольких переменных. Дифференцирование*	*40*	*12*	*4*	*16*	*8*	
4.1	Числовая последовательность и ее предел *	6	2		2	2	Фронтальный опрос, решение
4.2-	Функция одной вещественной переменной *	14	2	2	6	2	Фронтальный опрос, решение

Номер раздела, темы	Название раздела, темы	Количество аудиторных часов					Форма контроля знаний
		Всего	Лекции (без УСР)	Лекции (УСР)	Практические занятия (без УСР)	Практические занятия (УСР)	
4.3	Дифференцинльное исчисление функция одной вещественной переменной. *	14	2 из 4	2	4	2	Фронтальный опрос решение задач. **Контрольная точка № 3 –**
4.4	Функции многих переменных.*	12	4		4	2	Фронтальный опрос, решение
2 семестр		**80**	**24**	**10**	**28**	**18**	Экзамен
5	*Интегральное исчисление функций одной и нескольких переменных переменных*	*20*	*6*	*2*	*8*	*4*	
5.1	Первообразная. Неопределенный интеграл.*	10	2		4	2	Фронтальный опрос, решение
5.2	Определенный интеграл. Интеграл с переменным верхним пределом. Приложения определенных интегралов. Несобственные	4	2		2		Фронтальный опрос, решение задач. **Контрольная точка №1 –**
5.3	Двойной интеграл. Криволинейные интегралы 1-го и 2-го	6	2	2	2	2	Фронтальный опрос, решение
6	*Дифференциальные уравнения и системы.**	*12*	*4*	*2*	*4*	*2*	
6.1	Обыкновенные дифференциальных уравнений (ДУ).*	12	4	2	4	2	Фронтальный опрос, решение
7	*Числовые и функциональные ряды.**	*14*	*4*	*2*	*4*	*2*	
7.1	Числовой ряд и его сумма. Признаки сходимости числовых	8	2	2	2	2	Фронтальный опрос, решение

Номер раздела, темы	Название раздела, темы	Количество аудиторных часов					Форма контроля знаний
		Всего	Лекции (без УСР)	Лекции (УСР)	Практические занятия (без УСР)	Практические занятия (УСР)	
7.2	Функциональные (степенные) ряды. Ряды Тейлора и Маклорена.*	6	2		2		**Контрольная точка №2** – контрольная работа
8	*Теория вероятностей*	*18*	*4*	*2*	*6*	*4*	
8.1	Основные понятия и теоремы теории вероятностей	6	2		2	2	Фронтальный опрос, решение
8.2	Схема повторных независимых испытаний	6	2		2		Фронтальный опрос, решение
8.3	Случайные величины и их основные законы распределения	6		2	2	2	
9	*Математическая статистика*	***6***	***2***		**2**	2	
9.1-9.3	Основы математической статистики. Статистическое оценивание. Проверка	6	2		2	2	Фронтальный опрос, решение задач
10	*Математическое программирование*	***14***	***4***	***2***	***4***	*4*	
10.1	Линейное программирование	8	2	2	2	2	Фронтальный опрос, решение
10.2	Транспортная задача	6	2		2	2	**Контрольная точка №3** – контрольная работа

*- проведение занятий может осуществляться в аудиториях, а также с применением платформ Moodle и MS Teams.

Перечень основной и дополнительной литературы

Основная литература

1. Апатенок Р.Ф. и др. Элементы линейной алгебры и аналитической геометрии. – Мн.: Высшая школа, 1986. – 272 с.

2. Беклемишев Д.В. Курс аналитической геометрии и линейной алгебры. – М.: Наука, 1984. – 294 с.

3. Бугров Я.С., Никольский С.М. Элементы линейной алгебры и аналитической геометрии. – Ростов н/Д.: Феникс, 1997. – 284 с.

4. Бугров Я.С., Никольский С.М. Дифференциальное и интегральное исчисление. – М.: Наука, 1980. – 432 с.

5. Бугров Я.С., Никольский С.М. Дифференциальные уравнения. Кратные интегралы. Ряды. ФКП. – М.: Наука, 1985. – 464 с.

6. Герасимович А.И., Рысюк Н.А. Математический анализ. – 1 часть. – Мн.: Высшая школа, 1989. – 287 с.

7. Герасимович А.И., Рысюк Н.А. Математический анализ. – 2 часть. – Мн.: Высшая школа, 1990. – 272 с.

8. Гусак А.А. Высшая математика. – Том I. – Мн.: ТетраСистемс, 1998. – 544 с.

9. Гусак А.А. Высшая математика. – Том II. – Мн.: ТетраСистемс, 1998. – 448 с.

10. Жевняк Р.М., Карпук А.А. Высшая математика. – В 5 ч. – Мн.: Высшая школа, 1984-1988. – Ч.1. – 1984, Ч.2. – 1985, Ч.3. – 1985, Ч.4. – 1987, Ч.5. – 1988.

11. Жевняк Р.М., Карпук А.А. Высшая математика. / Аналитическа геометрия и линейная алгебра. Дифференциальное исчисление. – Мн.: Вы шая школа, 1992. – 384 с.

12. Жевняк Р.М., Карпук А.А. Высшая математика /Функции многи переменных. Интегральное исчисление. – Мн.: Высшая школа, 1993. – 412 с

13. Жевняк Р.М., Карпук А.А. Высшая математика / Дифференциальны уравнения. Ряды. Уравнения математической физики. Теория функций ком плексных переменных. – Мн.: ИРФ «Обозрение», 1997. – 570 с.

14. Жевняк Р.М., Карпук А.А. Высшая математика / Операционное ис числение. Теория вероятностей. Математическая статистика. Случайны процессы. – Мн.: ИРФ «Обозрение», 1997. – 572 с.

15. Клетеник Д.В. Сборник задач по аналитической геометрии. – М Наука, 1986. – 224 с.

16. Контрольные задания по общему курсу высшей математики Ж.А.Черняк, А.А.Черняк, О.А. Феденя и др. – СПб.: Питер, 2006. – 445 с.

17. Краснов М.Л., Киселев А.И., Макаренко Г.И. Функции комплексно переменного. Операционное исчисление. Теория устойчивости (задачи упражнения) – М.: Наука, 1981. – 302 с.

18. Кудрявцев Л.Д. Краткий курс математического анализа. – М.: Наука, 1989. – 736 с.

19. Кузнецов Л.А. Сборник заданий по высшей математике / Типовые расчеты. – М.: Высшая школа, 2005.

20. Мантуров О.В., Матвеев Н.М. Курс высшей математики. – М.: Высшая школа, 1991. – 448 с.

21. Пантелеев А.В., Якимова А.С. Теория функций комплексного переменного и операционное исчисление в примерах и задачах. – Москва: Высшая школа, 2001. – 445 с.

22. Пискунов Н.С. Дифференциальное и интегральное исчисление для втузов. – М.: Наука, 1985. – 560 с.

23. Письменный Д.Т. Конспект лекций по высшей математике. – 1 часть. – М.: Айрис Пресс, 2013. – 288 с.

24. Письменный Д.Т. Конспект лекций по высшей математике. – 2 часть. – М.: Айрис Пресс, 2013. – 252 с.

25. Сборник задач по математике для втузов: линейная алгебра и основы математического анализа. Под ред. А.В. Ефимова и Б.П. Демидовича. – М.: Наука, 1981. – 464 с.

26. Сборник задач по математике для втузов: специальные разделы математического анализа. Под ред. А.В. Ефимова и Б.П. Демидовича. – М.: Наука, 1982.

27. Стельмашук Н.Т., Шилинец В.А. Элементы теории аналитических функций. – Мн.: Дизайн ПРО, 1997. – 192 с.

28. Чудесенко В.Ф. Сборник заданий по специальным курсам высшей математики /типовые расчеты. – М.: Высшая школа, 2006. – 192 с.

Дополнительная литература

29. Андре Анго. Математика для электро- и радиоинженеров. – М.: Наука, 1967. – 780 с.

30. Баврин И.И. Курс высшей математики. – М.: Владос, 2004. – 560 с.

31. Бермант А.Ф., Араманович И.Г. Краткий курс математического анализа для втузов. – М.: Наука, 1969. – 736 с.

32. Булдык Г. М. Сборник задач и упражнений по высшей математике. – Минск: Юнипресс, 2002. – 395 с.

33. Гурский Е.И. и др. Руководство к решению задач по высшей математике. – 1 часть. – Мн., 1989. – 349 с.

34. Гурский Е.И. и др. Руководство к решению задач по высшей математике. – 2 часть. – Мн., 1990. – 400 с.

35. Гусак А.А. Аналитическая геометрия и линейная алгебра. – Минск: ТетраСистемс, 2001. – 288 с.

36. Денисенко Т.А., Марченко Л.Н., Парукевич И.В. Математический анализ. – Ч. 7. – Гомель: ГГУ, 2008. – 183 с.

37. Ефимов А.В. Математический анализ (специальные разделы). – М.: Высшая школа, 1980. – 279 с.

38. Ефимов А.В., Золотогорев Ю.Г., Терпигорева В.М. Математический анализ (специальные разделы). – Т. 2. – М.: Высшая школа, 1980. – 295 с.

39. Ефимов Н.В. Краткий курс аналитической геометрии. – Москва: Наука, 1975. – 272 с.

40. Сборник индивидуальных заданий по высшей математике / под ред. А.Н. Рябушко. – Мн.: Высшая школа, Ч.1. – 1990; Ч. 2. – 1991; Ч.3. – 1991; 2007.

41. Данко П.Е., Попов А.Г., Кожевникова Т.Я. Высшая математика в упражнениях и задачах. В 2 ч. – М.: Издательский дом «ОНИКС 21 век»: Мир и Образование, 2002.

42. Краснов М.Л., Киселев А.И., Макаренко Г.И., Шикин Е.В., Заляпин В.И., Соболев С.К. Вся высшая математика. Эдиторная УРСС. – Москва, 2000.

43. Сборник задач по высшей математике: Учеб. пособие. В 10 ч. – Ч.1: Аналитическая геометрия / А.А. Карпук, Р.М. Жевняк. – Мн.: БГУИР, 2002. – 112 с.: ил.; 2-е изд. – 2003, 3-е изд. – 2004.

44. Сборник задач по высшей математике. В 10 ч. – Ч.2: Линейная алгебра (с решениями и комментариями) / А.А. Карпук, Р.М. Жевняк, В.В. Цегельник. – Мн.: БГУИР, 2004. – 154 с.

45. Сборник задач по высшей математике. – Ч.3: Введение в анализ / Н.Н. Третьякова, Т.М. Пушкарева, О.Н. Малышева. – Мн.: БГУИР, 2005. – 116 с.

46. Сборник задач по высшей математике для студ. радиотехн спец. БГУИР. В 10 ч. – Ч. 4: Дифференциальное исчисление функ одной переменной / А.А. Карпук, В.В. Цегельник, Р.М. Жевняк, И Назарова. – Мн.: БГУИР, 2006. – 107 с.

47. Сборник задач по высшей математике для студ. радиотехн спец. В 10 ч. – Ч. 5: Функции многих переменных / А.А. Карпук, Р. Жевняк, В.В. Цегельник и др. – Мн.: БГУИР, 2004. – 64 с.

48. Сборник задач по высшей математике. В 10 ч. – Ч. Интегральное исчисление функций одной переменной / АА. Карпук др.]. – Минск: БГУИР, 2006 – 148 с.

49. Сборник задач по высшей математике. В 10 ч. Ч. 7: Интегралы исчисление функций многих переменных / А.А. Карпук., В.В. Цегельн Е.А. Баркова. – Минск: БГУИР, 2007 – 120 с.

50. Сборник задач по высшей математике. В 10 ч. Ч. 8: Ряды. Фур анализ / А.А. Карпук [и др.]. – Минск: БГУИР, 2007 – 120 с.