

УДК 004.75

**ГРАФОАНАЛИТИЧЕСКОЕ РЕШЕНИЕ ЗАДАЧ ОПРЕДЕЛЕНИЯ ВРЕМЕНИ
ВЫПОЛНЕНИЯ РАСПРЕДЕЛЕННЫХ ПАРАЛЛЕЛЬНЫХ ПРОЦЕССОВ**

**Павлов Павел Александрович, к.ф.–м.н., доцент
Полесский государственный университет**

**GRAPHICAL ANALYTICAL SOLUTION OF PROBLEMS
OF DETERMINING THE EXECUTION TIME OF DISTRIBUTED PARALLEL PROCESSES**

**Pavlov Pavel Aleksandrovich, PhD, pavlov.p@polessu.by
Polessky State University**

При проектировании и создании высокопроизводительных динамически–масштабируемых распределенных вычислительных систем особую актуальность приобретают задачи построения и исследования математических моделей, которые адекватно учитывают физические особенно-

сти функционирования рассматриваемых систем и в тоже время позволяют получать математические соотношения для вычисления оперативных и точных значений минимального общего времени реализации заданных объемов вычислений. В статье для синхронного режима, при котором обеспечивается линейный порядок выполнения блоков структурированного программного ресурса внутри каждого из процессов без задержек, с помощью математического аппарата теории расписаний, приемов совмещения линейных диаграмм Ганта и дуго–взвешенных графов решены задачи определения минимального времени выполнения множества распределенных неоднородных взаимодействующих процессов, конкурирующих за использование ограниченного числа копий структурированного программного ресурса. Предложенные методы и формулы позволяют построить расписания моментов запуска и окончания каждого из распределенных конкурирующих процессов, что дает возможность не только наиболее эффективно решать проблему синхронизации процессов, но и существенно минимизировать системные затраты и простои процессоров. Полученные математические соотношения служат основой для решения оптимизационных задач по параметрам распределенных систем.

Ключевые слова: распределенная вычислительная система, процесс, программный ресурс, структурирование, конвейеризация, неоднородная система, неограниченный (ограниченный) параллелизм, диаграмма Ганта, дуго–взвешенный граф.

When designing and creating high-performance dynamically scalable distributed computing systems, the problems of constructing and studying mathematical models that adequately take into account the physical features of the functioning of the systems under consideration and at the same time allow obtaining mathematical relationships for calculating operational and accurate values of the minimum total time of implementation of specified volumes of calculations are of particular relevance. In the article, for the synchronous mode, which ensures a linear order of execution of blocks of a structured software resource within each of the processes without delays, using the mathematical apparatus of scheduling theory, techniques for combining linear Gantt charts and arc-weighted graphs, mathematical relationships are obtained for calculating the minimum execution time of a set of distributed heterogeneous interacting processes competing for the use of a limited number of copies of a structured software resource. The proposed methods and formulas allow constructing schedules for the start and end of each of the distributed competing processes, which makes it possible not only to most effectively solve the problem of process synchronization, but also to significantly minimize system costs and processor downtime. The obtained mathematical relationships serve as a basis for solving optimization problems for the parameters of distributed systems.

Key words: distributed computing system, process, software resource, structuring, pipelining, heterogeneous system, unlimited (limited) parallelism, Gantt chart, arc-weighted graph.

Введение. Быстрое развитие информационно–коммуникационных и сетевых технологий привело к интенсивному использованию географически распределенных вычислительных ресурсов и созданию на их основе распределенных вычислительных систем (РВС). В литературе отсутствует каноническое определение того, что такое «распределенная вычислительная система». Например, профессор Э. Таненбаум определяет *распределенную систему* как «набор соединенных каналами связи независимых компьютеров, которые с точки зрения пользователя некоторого программного обеспечения выглядят единым целым» [1]. В книге Ж. Теля «Введение в распределенные алгоритмы» сказано, что «под распределенной системой мы понимаем всякую вычислительную систему, в которой несколько компьютеров или процессоров, так или иначе, вступают во взаимодействие» [2]. Моделью *распределенной системы* может также быть набор программных средств, представляющий собой совокупность взаимосвязанных процессов, выполняемых на одном и том же вычислительном устройстве [3]. На сегодняшний день существуют различные типы распределенных вычислительных систем – это вычислительные кластеры, симметричные мультипроцессоры (SMP), системы с распределенной разделяемой памятью (DSM), массово–параллельные системы (MPP) и мультикомпьютеры. Изучая распределенные вычисления нельзя не упомянуть облачные, параллельные и грид–вычисления [3–6]. Из приведенных примеров следует, что РВС – это сложные сетевые системы (системы систем, SoS), предназначенные для обработки больших объемов данных, одним из основных преимуществ которых является возможность параллельного

выполнения процессов. Хотелось бы также отметить, что принципы распределенной организации выполнения процессов являются не только универсальным способом достижения высокой производительности и надежности многопроцессорных систем и комплексов, но несут и достаточно общий характер и присущи процессам различной природы, прежде всего они свойственны информационным банковским системам [7,8], энергетическим системам [9–11], логистическим системам [12] и др.

При проектировании РВС особую значимость приобретают задачи построения и исследования математических моделей оптимальной организации выполнения распределенных взаимодействующих процессов, конкурирующих за программный ресурс (ПР). Случай, когда в общей памяти РВС размещена одна копия программного ресурса, с различных точек зрения был изучен в работах [13–22]. Но, к сожалению, мало работ по математическому моделированию функционирования распределенных вычислительных систем, в которых в общей памяти одновременно может находиться не одна, а несколько копий программного ресурса [23–25]. Такое обобщение носит принципиальный характер в виду того, что отражает основные черты мультиконвейерной обработки, а также позволяет сравнить эффективность конвейерной и параллельной обработки. В виду дискретного и комбинаторного характера математических задач распределенного программирования определенный прогресс на пути их решения может быть достигнут за счет применения математического аппарата и методов дискретных систем и дискретной оптимизации, теории расписаний и сетевых графов, теории алгоритмов и множеств, алгебры матриц [26–28]. Исследования в указанном направлении характерны для Института системного программирования Российской Академии наук, Московского государственного университета имени М.В. Ломоносова, Объединенного института проблем информатики Национальной Академии наук Беларуси, Национального исследовательского университета «Московский энергетический институт» и др.

1. Математическая модель распределенной вычислительной системы с учетом ограниченного числа копий программного ресурса

Конструктивными элементами для построения математических моделей систем, реализующих методы распределенных вычислений, являются понятия *процесса* и *программного ресурса*. Как и в [13–25] под *процессом* будем понимать выполнение линейной последовательности программных блоков $I_s = (1, 2, \dots, s)$. При этом процесс называется *распределённым*, если все блоки или часть из них выполняются на разных процессорах. Процессы, которые влияют на поведение друг друга путем обмена информацией, называют *взаимодействующими* процессами. Многократно выполняемую в многопроцессорной системе программу или ее часть будем называть *программным ресурсом*, а множество соответствующих процессов – *конкурирующими*.

Математическая модель системы распределенной обработки взаимодействующих процессов, конкурирующих за использование ограниченного числа копий структурированного программного ресурса, включает в себя [26–28]: $p \geq 2$, процессоров распределенной вычислительной системы, которые имеют доступ к общей разделяемой памяти; $n \geq 2$, распределенных взаимодействующих конкурирующих процессов; $s \geq 2$, блоков структурированного на блоки программного ресурса; матрицу $T = [t_{ij}]$, $i = \overline{1, n}$, $j = \overline{1, s}$, времен выполнения блоков программного ресурса распределенными взаимодействующими конкурирующими процессами; $2 \leq c \leq p$, число копий структурированного на блоки программного ресурса, которые могут одновременно находиться в оперативной памяти, доступной для всех p процессоров; $\theta > 0$ – параметр, характеризующий время дополнительных системных расходов, связанных с параллельной обработкой блоков структурированного программного ресурса множеством взаимодействующих конкурирующих процессов при распределенной обработке. Будем также считать, что число процессов n кратно числу копий структурированного программного ресурса c , т.е. $n = mc$, где $m = n/c \geq 2$, и что взаимодействие процессов, процессоров и блоков программного ресурса подчинено следующим условиям:

- 1) ни один из процессоров не может обрабатывать одновременно более одного блока;

2) процессы выполняются в параллельно-конвейерном режиме группами, т.е. осуществляется одновременное выполнение C копий каждого блока в сочетании с конвейеризацией группы из C копий Q_j -го блока, $j = \overline{1, s}$, по процессам и процессорам;

3) обработка каждого блока программного ресурса осуществляется без прерываний;

4) в случае *неограниченного параллелизма* по числу процессоров многопроцессорной системы,

т.е. когда число блоков программного ресурса $s \leq \left\lceil \frac{p}{c} \right\rceil$, где $[x]$ - целая часть числа, для каждого

i -го процесса, где $i = c(l-1) + q$, $l = \overline{1, m}$, $q = \overline{1, c}$, распределение блоков Q_j , $j = \overline{1, s}$, программного ресурса по процессорам осуществляется по правилу: блок с номером j распределяется на процессор с номером $c(j-1) + q$.

2. Время выполнения системы неоднородных распределенных конкурирующих процессов при неограниченном параллелизме

Систему n распределенных конкурирующих процессов будем называть *неоднородной*, если времена выполнения блоков структурированного программного ресурса $Q_1, Q_2, \dots, Q_s$ зависят от объемов обрабатываемых данных и/или их структуры, т.е. разные для разных процессов.

В рамках математической модели распределенных вычислений при ограниченном числе копий программного ресурса в [24] введен *первый синхронный режим* взаимодействия процессов, процессоров и блоков, который обеспечивает непрерывное выполнение блоков структурированного программного ресурса внутри каждого процесса. В этом режиме в случае *неограниченного параллелизма*,

т.е. когда $2 \leq s \leq \left\lceil \frac{p}{c} \right\rceil$, момент завершения выполнения i -м процессом, где

$i = c(l-1) + q$, $l = \overline{1, m}$, $q = \overline{1, c}$, j -го блока, $j = \overline{1, s-1}$, на $(c(j-1) + q)$ -м процессоре совпадает с моментом начала выполнения следующего $(j+1)$ -го блока на $(cj + q)$ -м процессоре.

На рис.1 изображена диаграмма Ганта, иллюстрирующая функционирование распределенной вычислительной системы в *первом синхронном режиме*, где $T_{1c}^H(p, n, s, c, \theta)$ время выполнения $n = 6$ *неоднородных* процессов, конкурирующих за использующих $c = 2$ копий программного ресурса структурированного на $s = 3$ линейно-упорядоченных блоков Q_1, Q_2, Q_3 с матрицей времен выполнения с учетом дополнительных системных расходов

$$T^\theta = [t_{ij}^\theta]_{n \times s} = [t_{ij} + \theta]_{n \times s} = \begin{bmatrix} 3 & 1 & 4 \\ 2 & 2 & 1 \\ 1 & 3 & 3 \\ 4 & 1 & 2 \\ 3 & 2 & 1 \\ 1 & 4 & 1 \end{bmatrix}. \text{ Предполагается, что выполнение процессов осу-}$$

ществляется в вычислительной системе с $p = 7$ процессорами, причем каждый из процессов является распределенным.

Для вычисления времени выполнения $T_{lc}^H(p, n, s, c, \theta)$ все множество процессов разобьем на s подмножеств по m процессов в каждом, причем в каждое q -е подмножество, $q = \overline{1, s}$, будут включены процессы с номерами $i = c(l-1) + q$, $l = \overline{1, m}$, блоки которых будут выполняться на $(c(j-1) + q)$ -х процессорах, $j = \overline{1, s}$. Тогда имеет место формула [24]:

$$T_{lc}^H(p, n, s, c, \theta) = \max_{1 \leq q \leq c} \left(\sum_{i=1}^{m-1} \max_{1 \leq u \leq s} \left[\sum_{j=1}^u t_{c(i-1)+q, j}^{\theta} - \sum_{j=1}^{u-1} t_{ci+q, j}^{\theta} \right] + \sum_{j=1}^s t_{c(m-1)+q, j}^{\theta} \right). \quad (1)$$

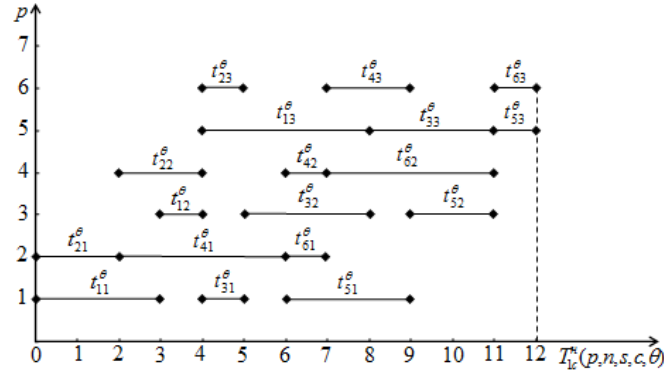


Рисунок 1. – Первый синхронный режим при неограниченном параллелизме

Здесь $\max_{1 \leq u \leq s} \left[\sum_{j=1}^u t_{c(i-1)+q, j}^{\theta} - \sum_{j=1}^{u-1} t_{ci+q, j}^{\theta} \right]$, $i = \overline{1, m-1}$ – начало выполнения первого блока

для каждого из последующих процессов, начиная с $(ci + q)$ -го в q -ом подмножестве процессов,

а $\sum_{j=1}^s t_{c(m-1)+q, j}^{\theta}$ – длительность выполнения последнего процесса q -го подмножества, где $q = \overline{1, s}$.

3. Время реализации распределенных неоднородных процессов при ограниченном параллелизме

Рассмотрим случай *ограниченного параллелизма*, т.е. когда $s > \left\lceil \frac{p}{c} \right\rceil$, причем $s = k \left\lceil \frac{p}{c} \right\rceil$, где

$k > 1$. Выполним разбиение всех блоков на k групп по $\left\lceil \frac{p}{c} \right\rceil$ блоков в каждой. Тогда матрица

времен выполнения блоков структурированного ПР с учетом дополнительных системных расходов θ , связанных с организацией конвейерного режима использования блоков множеством взаи-

модействующих конкурирующих процессов при распределенной обработке $T^\theta = [t_{ij}^\theta]$, $i = \overline{1, n}$, $j = \overline{1, s}$, разобьется на k подматриц T_φ^θ вида (2) размерностью $n \times \left\lfloor \frac{p}{c} \right\rfloor$ каждая:

$$T_\varphi^\theta = \begin{bmatrix} t_{1,(\varphi-1)\left\lfloor \frac{p}{c} \right\rfloor+1}^\theta & t_{1,(\varphi-1)\left\lfloor \frac{p}{c} \right\rfloor+2}^\theta & \dots & t_{1,\varphi\left\lfloor \frac{p}{c} \right\rfloor}^\theta \\ t_{2,(\varphi-1)\left\lfloor \frac{p}{c} \right\rfloor+1}^\theta & t_{2,(\varphi-1)\left\lfloor \frac{p}{c} \right\rfloor+2}^\theta & \dots & t_{2,\varphi\left\lfloor \frac{p}{c} \right\rfloor}^\theta \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ t_{n,(\varphi-1)\left\lfloor \frac{p}{c} \right\rfloor+1}^\theta & t_{n,(\varphi-1)\left\lfloor \frac{p}{c} \right\rfloor+2}^\theta & \dots & t_{n,\varphi\left\lfloor \frac{p}{c} \right\rfloor}^\theta \end{bmatrix}, \quad \varphi = \overline{1, k}, \text{ где } k = \left\lfloor \frac{cs}{p} \right\rfloor. \quad (2)$$

Пусть $p = 7$, $n = 4$, $s = 6$, $c = 2$, $T^\theta = \begin{bmatrix} 3 & 1 & 4 & 2 & 1 & 4 \\ 2 & 2 & 1 & 1 & 3 & 3 \\ 1 & 3 & 3 & 1 & 1 & 3 \\ 4 & 1 & 2 & 3 & 1 & 1 \end{bmatrix}$. Тогда с учетом нали-

чия $c = 2$ копий структурированного программного ресурса выполнение $n = 4$ процессов на $p = 7$ процессорах можно представить в виде линейных диаграмм Ганта следующего вида:

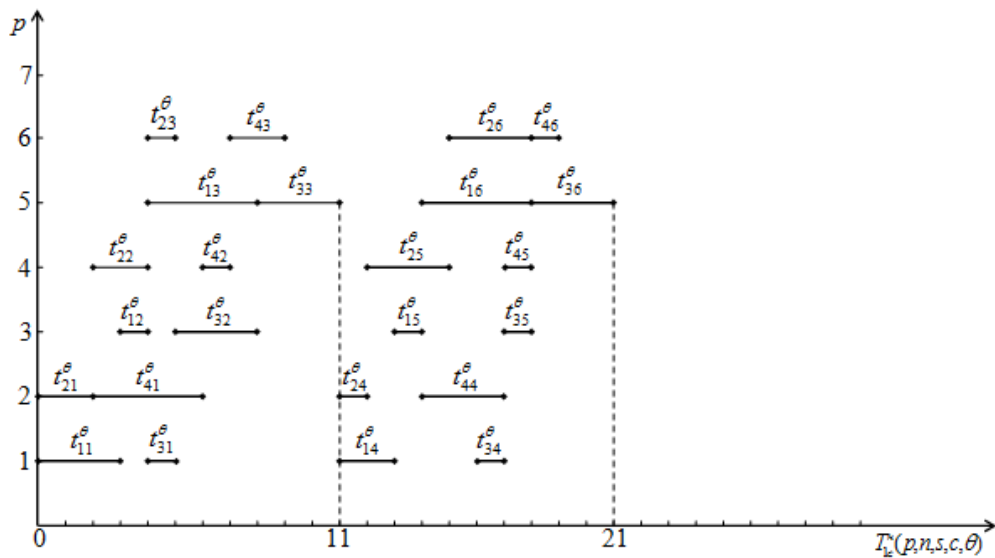


Рисунок 2. - Несовмещенные диаграммы Ганта при $s = k \left\lfloor \frac{p}{c} \right\rfloor$, $k > 1$

Из анализа диаграмм Ганта на рис.2 видно, что каждая из диаграмм отображает во времени выполнение очередных $\left\lfloor \frac{p}{c} \right\rfloor$ блоков программного ресурса на $c \left\lfloor \frac{p}{c} \right\rfloor$ процессорах всеми n процессами, причем при $s > \left\lfloor \frac{p}{c} \right\rfloor$ непрерывность выполнения блоков структурированного про-

граммного ресурса может нарушиться при переходе от φ -й группы блоков к $(\varphi + 1)$ -й, $\varphi = \overline{1, k-1}$, а внутри каждой из групп непрерывное выполнение блоков каждого процесса сохраняется.

Для дальнейшего исследования, как и при достаточном числе процессоров, все множество процессов разобьем на подмножества, причем каждое q -е подмножество, $q = \overline{1, c}$, будет состоять из m процессов с номерами $i = c(l-1) + q$, $l = \overline{1, m}$, которые будут выполняться на процессорах с номерами $(c(j-1) + q)$, $j = 1, \left\lceil \frac{p}{c} \right\rceil$. Введем следующие обозначения:

- $t_{ij}^{\varphi, q}$ – время выполнения в φ -ой группе блоков i -м процессом из q -го подмножества процессов j -го блока с учетом параметра θ :

$$t_{ij}^{\varphi, q} = t^{\theta}_{c(i-1)+q, (\varphi-1)\left\lceil \frac{p}{c} \right\rceil + j}, \quad \varphi = \overline{1, k}, \quad q = \overline{1, c}, \quad i = \overline{1, m}, \quad j = 1, \left\lceil \frac{p}{c} \right\rceil; \quad (3)$$

- T_q^{φ} – время выполнения в φ -ой группе блоков q -го подмножества процессов:

$$T_q^{\varphi} = \sum_{i=1}^{m-1} \max_{1 \leq u \leq \left\lceil \frac{p}{c} \right\rceil} \left[\sum_{j=1}^u t^{\theta}_{c(i-1)+q, (\varphi-1)\left\lceil \frac{p}{c} \right\rceil + j} - \sum_{j=1}^{u-1} t^{\theta}_{ci+q, (\varphi-1)\left\lceil \frac{p}{c} \right\rceil + j} \right] + \sum_{j=1}^{\left\lceil \frac{p}{c} \right\rceil} t^{\theta}_{c(m-1)+q, (\varphi-1)\left\lceil \frac{p}{c} \right\rceil + j},$$

$$\varphi = \overline{1, k}, \quad q = \overline{1, c}; \quad (4)$$

- T_{φ}^{θ} – общее время выполнения φ -ой группы блоков всеми n процессами на $c \left\lceil \frac{p}{c} \right\rceil$ процессорах с учетом параметра θ :

$$T_{\varphi}^{\theta} = \max_{1 \leq q \leq c} \left(\sum_{i=1}^{m-1} \max_{1 \leq u \leq \left\lceil \frac{p}{c} \right\rceil} \left[\sum_{j=1}^u t^{\theta}_{c(i-1)+q, (\varphi-1)\left\lceil \frac{p}{c} \right\rceil + j} - \sum_{j=1}^{u-1} t^{\theta}_{ci+q, (\varphi-1)\left\lceil \frac{p}{c} \right\rceil + j} \right] + \sum_{j=1}^{\left\lceil \frac{p}{c} \right\rceil} t^{\theta}_{c(m-1)+q, (\varphi-1)\left\lceil \frac{p}{c} \right\rceil + j} \right) = \max_{1 \leq q \leq c} T_q^{\varphi}, \quad \varphi = \overline{1, k}; \quad (5)$$

- $E_{ij}^{\varphi, q}$ – время завершения обработки в φ -ой группе блоков i -м процессом из q -го подмножества j -го блока:

$$E_{ij}^{\varphi,q} = E_{c(i-1)+q,j}^{\varphi} = \sum_{\mu=1}^{i-1} \max_{1 \leq u \leq \left\lceil \frac{p}{c} \right\rceil} \left[\sum_{w=1}^u t^{\theta}_{c(\mu-1)+q,(\varphi-1)\left\lceil \frac{p}{c} \right\rceil+w} - \sum_{w=1}^{u-1} t^{\theta}_{c\mu+q,(\varphi-1)\left\lceil \frac{p}{c} \right\rceil+w} \right] + \sum_{w=1}^j t^{\theta}_{c(i-1)+q,(\varphi-1)\left\lceil \frac{p}{c} \right\rceil+w}, \quad \varphi = \overline{1,k}, \quad q = \overline{1,c}, \quad i = \overline{1,m}, \quad j = \overline{1, \left\lceil \frac{p}{c} \right\rceil}. \quad (6)$$

Из анализа диаграмм Ганта на рис.2 видно, что минимальное общее время выполнения неоднородных распределенных процессов конкурирующих за использование C копий структурированного программного ресурса в случае $s = k \left\lceil \frac{p}{c} \right\rceil$, $k > 1$, определяется как сумма длин составляющих диаграмм:

$$T_{lc}^H \left(p, n, k \left\lceil \frac{p}{c} \right\rceil, c, \theta \right) = \sum_{\varphi=1}^k T_{\varphi}^{\theta} = \sum_{\varphi=1}^k \max_{1 \leq q \leq c} T_q^{\varphi}.$$

Время $T_{lc}^H \left(p, n, k \left\lceil \frac{p}{c} \right\rceil, c, \theta \right)$ можно существенно сократить, если воспользоваться совмещением последовательных диаграмм Ганта по оси времени справа налево. В результате совмещения получим:

$$T_{lc}^H \left(p, n, k \left\lceil \frac{p}{c} \right\rceil, c, \theta \right) = \sum_{\varphi=1}^k T_{\varphi}^{\theta} - \sum_{\varphi=1}^{k-1} \delta_{\varphi},$$

где $\delta_{\varphi} = \min(\delta'_{\varphi}, \delta''_{\varphi})$, $\varphi = \overline{1, k-1}$ – длина отрезка максимально возможного совмещения двух последовательных диаграмм Ганта по оси времени.

Здесь δ'_{φ} – отрезок возможного совмещения по оси времени, который представляет собой разность между моментом начала выполнения j -го блока первым процессом q -го подмножества процессов в $(\varphi+1)$ -й группе блоков и моментом завершения выполнения j -го блока последним процессом q -го подмножества процессов в φ -й группе блоков, т. е.

$$\begin{aligned} \delta'_{\varphi} &= \min_{1 \leq q \leq c} \left(T_{\varphi}^{\theta} - T_q^{\varphi} + \min_{1 \leq j \leq \left\lceil \frac{p}{c} \right\rceil} \left[\sum_{w=j+1}^{\left\lceil \frac{p}{c} \right\rceil} t^{\theta}_{c(m-1)+q,(\varphi-1)\left\lceil \frac{p}{c} \right\rceil+w} + \sum_{w=1}^{j-1} t^{\theta}_{q,\varphi\left\lceil \frac{p}{c} \right\rceil+w} \right] \right) = \\ &= \min_{1 \leq q \leq c} \left(\min_{1 \leq j \leq \left\lceil \frac{p}{c} \right\rceil} \left[T_{\varphi}^{\theta} - E_{c(m-1)+q,j}^{\varphi} + \sum_{w=1}^{j-1} t^{\theta}_{q,\varphi\left\lceil \frac{p}{c} \right\rceil+w} \right] \right), \quad \varphi = \overline{1, k-1}. \end{aligned} \quad (7)$$

Значение δ_φ'' представляет собой разность между началом выполнения первого блока i -м процессом в $(\varphi + 1)$ -й группе блоков и моментом завершения выполнения последнего блока i -м процессом в φ -й группе блоков, т. е.

$$\begin{aligned} \delta_\varphi'' &= \min_{1 \leq q \leq c} \left(\min_{1 \leq i \leq m} \left[T_\varphi^\theta - E_{i, \left\lfloor \frac{p}{c} \right\rfloor}^{q, \varphi} + E_{i1}^{q, \varphi+1} - t_{i1}^{q, \varphi+1} \right] \right) = \\ &= \min_{1 \leq q \leq c} \left(\min_{1 \leq i \leq m} \left[T_\varphi^\theta - E_{c(i-1)+q, \left\lfloor \frac{p}{c} \right\rfloor}^\varphi + E_{c(i-1)+q, 1}^{\varphi+1} - t_{c(i-1)+q, \left\lfloor \frac{p}{c} \right\rfloor+1}^\theta \right] \right), \quad \varphi = \overline{1, k-1}. \end{aligned} \quad (8)$$

В случае, когда $s = k \left\lfloor \frac{p}{c} \right\rfloor + r$, $k \geq 1$, $1 \leq r < \left\lfloor \frac{p}{c} \right\rfloor$, все множество из s блоков разбивается на $(k+1)$ -ую группу по $\left\lfloor \frac{p}{c} \right\rfloor$ блока(ов) в каждой, за исключением последней, в которой будет только r блока(ов) ПР. Тогда время выполнения n неоднородных распределенных конкурирующих процессов использующих c копий структурированного на s блока(ов) программного ресурса в вычислительной системе с p процессорами в первом синхронном режиме будет определяться по формулам:

$$\begin{aligned} T_{1c}^H(p, n, s, c, \theta) &= T_{1c}^H\left(p, n, k \left\lfloor \frac{p}{c} \right\rfloor + r, c, \theta\right) = \sum_{\varphi=1}^k T_\varphi^\theta + T_{k+1}^\theta - \sum_{\varphi=1}^{k-1} \delta_\varphi - \delta_k = \\ &= \sum_{\varphi=1}^k \max_{1 \leq q \leq c} T_q^\varphi + \max_{1 \leq q \leq c} T_q^{k+1} - \sum_{\varphi=1}^{k-1} \delta_\varphi - \delta_k. \end{aligned}$$

Здесь:

- T_{k+1}^θ – время выполнения $(k+1)$ -ой группы из r блоков всеми n процессами:

$$T_{k+1}^\theta = \max_{1 \leq q \leq c} \left(\sum_{i=1}^{m-1} \max_{1 \leq u \leq r} \left[\sum_{j=1}^u t_{c(i-1)+q, k \left\lfloor \frac{p}{c} \right\rfloor + j}^\theta - \sum_{j=1}^{u-1} t_{ci+q, k \left\lfloor \frac{p}{c} \right\rfloor + j}^\theta \right] + \sum_{j=1}^r t_{c(m-1)+q, k \left\lfloor \frac{p}{c} \right\rfloor + j}^\theta \right) = \max_{1 \leq q \leq c} T_q^{k+1}; \quad (9)$$

- T_q^{k+1} – время выполнения q -го подмножества из m процессов в $(k+1)$ -ой группе блоков:

$$T_q^{k+1} = \sum_{i=1}^{m-1} \max_{1 \leq u \leq r} \left[\sum_{j=1}^u t_{c(i-1)+q, k \left[\frac{p}{c} \right] + j}^\theta - \sum_{j=1}^{u-1} t_{ci+q, k \left[\frac{p}{c} \right] + j}^\theta \right] + \sum_{j=1}^r t_{c(m-1)+q, k \left[\frac{p}{c} \right] + j}^\theta,$$

$q = \overline{1, c};$

▪ δ_k – величина максимально допустимого совмещения по оси времени k -ой и $(k+1)$ -ой диаграмм:

$$\delta_k = \min(\delta_k', \delta_k'').$$

Отрезки возможного совмещения по оси времени δ_k' и δ_k'' будут определяться по формулам:

$$\begin{aligned} \delta_k' &= \min_{1 \leq q \leq c} \left(T_k^\theta - T_q^k + \min_{1 \leq j \leq r} \left[\sum_{w=j+1}^{\left[\frac{p}{c} \right]} t_{c(m-1)+q, (k-1) \left[\frac{p}{c} \right] + w}^\theta + \sum_{w=1}^{j-1} t_{q, k \left[\frac{p}{c} \right] + w}^\theta \right] \right) = \\ &= \min_{1 \leq q \leq c} \left(\min_{1 \leq j \leq r} \left[T_k^\theta - E_{c(m-1)+q, j}^k + \sum_{w=1}^{j-1} t_{q, k \left[\frac{p}{c} \right] + w}^\theta \right] \right); \quad (10) \\ \delta_k'' &= \min_{1 \leq q \leq c} \left(\min_{1 \leq i \leq m} \left[T_k^\theta - E_{i, \left[\frac{p}{c} \right]}^{\theta, k} + E_{i1}^{\theta, k+1} - t_{i1}^{q, k+1} \right] \right) = \\ &= \min_{1 \leq q \leq c} \left(\min_{1 \leq i \leq m} \left[T_k^\theta - E_{c(i-1)+q, \left[\frac{p}{c} \right]}^k + E_{c(i-1)+q, 1}^{k+1} - t_{c(i-1)+q, k \left[\frac{p}{c} \right] + 1}^\theta \right] \right). \quad (11) \end{aligned}$$

Здесь

$$\begin{aligned} E_{ij}^{q, k+1} &= E_{c(i-1)+q, j}^{k+1} = \sum_{\mu=1}^{i-1} \max_{1 \leq u \leq r} \left[\sum_{w=1}^u t_{c(\mu-1)+q, (k+1)r+w}^\theta - \sum_{w=1}^{u-1} t_{c\mu+q, (k+1)r+w}^\theta \right] + \\ &+ \sum_{w=1}^j t_{c(i-1)+q, (k+1)r+w}^\theta, \quad q = \overline{1, c}, \quad i = \overline{1, m}, \quad j = \overline{1, r}. \end{aligned}$$

Таким образом, имеет место

Теорема. Если взаимодействие процессов, процессоров и блоков структурированного программного ресурса подчинено условиям первого синхронного режима, то для любых $p \geq 2$, $n \geq 2$, $s \geq 2$, $2 \leq c \leq p$, $\theta > 0$ минимальное общее время выполнения неоднородных распределенных конкурирующих процессов определяется следующим образом:

$$T_{1c}^H(p, n, s, c, \theta) = \begin{cases} \max_{1 \leq q \leq c} \left(\sum_{i=1}^{m-1} \max_{1 \leq u \leq s} \left[\sum_{j=1}^u t_{c(i-1)+q, j}^{\theta} - \sum_{j=1}^{u-1} t_{ci+q, j}^{\theta} \right] + \sum_{j=1}^s t_{c(m-1)+q, j}^{\theta} \right), \\ \text{npu } 2 \leq s \leq \left\lfloor \frac{p}{c} \right\rfloor; \\ \sum_{\varphi=1}^k T_{\varphi}^{\theta} - \sum_{\varphi=1}^{k-1} \delta_{\varphi}, \text{ npu } s = k \left\lfloor \frac{p}{c} \right\rfloor, \quad k > 1; \\ \sum_{\varphi=1}^k T_{\varphi}^{\theta} + T_{k+1}^{\theta} - \sum_{\varphi=1}^{k-1} \delta_{\varphi} - \delta_k, \text{ npu } s = k \left\lfloor \frac{p}{c} \right\rfloor + r, \quad k \geq 1, \quad 1 \leq r < \left\lfloor \frac{p}{c} \right\rfloor. \end{cases}$$

Здесь T_{φ}^{θ} и T_{k+1}^{θ} вычисляются по формулам (5) и (9), а $\delta_{\varphi} = \min(\delta'_{\varphi}, \delta''_{\varphi})$, $\varphi = \overline{1, k-1}$, $\delta_k = \min(\delta'_k, \delta''_k)$. В свою очередь, для нахождения δ'_{φ} , δ''_{φ} , δ'_k , δ''_k используются формулы (7), (8), (10), (11).

4. Алгоритм определения времени выполнения неоднородных распределенных процессов с помощью сетевых дуго-взвешенных графов

Решим задачу определения минимального общего времени непрерывного выполнения неоднородных блоков распределенных конкурирующих процессов, использующих ограниченное число копий структурированного программного ресурса, с помощью математического аппарата сетевых дуго-взвешенных графов. Для этого введем следующие обозначения:

- $T_i^{q, \varphi}$ – время выполнения i -м процессом из q -го подмножества процессов очередных $\left\lfloor \frac{p}{c} \right\rfloor$ блоков из φ -ой группы блоков с учетом параметра θ :

$$T_i^{q, \varphi} = \sum_{j=1}^{\left\lfloor \frac{p}{c} \right\rfloor} t_{ij}^{q, \varphi} = \sum_{j=1}^{\left\lfloor \frac{p}{c} \right\rfloor} t_{c(i-1)+q, (\varphi-1)\left\lfloor \frac{p}{c} \right\rfloor + j}^{\theta}, \quad \varphi = \overline{1, k}, \quad q = \overline{1, c}, \quad i = \overline{1, m}; \quad (12)$$

- $Z_{i, i+1}^{q, \varphi}$ – время задержки начала выполнения первого блока $(i+1)$ -го процесса по отношению к первому блоку i -го процесса в q -ом подмножестве процессов для φ -й группы блоков:

$$Z_{i, i+1}^{q, \varphi} = \max_{1 \leq u \leq \left\lfloor \frac{p}{c} \right\rfloor} \left[\sum_{j=1}^u t_{c(i-1)+q, (\varphi-1)\left\lfloor \frac{p}{c} \right\rfloor + j}^{\theta} - \sum_{j=1}^{u-1} t_{ci+q, (\varphi-1)\left\lfloor \frac{p}{c} \right\rfloor + j}^{\theta} \right], \quad \varphi = \overline{1, k}, \quad q = \overline{1, c},$$

$$i = \overline{1, m-1}; \quad (13)$$

▪ $Z_q^{\varphi, \varphi+1}$ – время задержки начала выполнения первого блока первого процесса из q -го подмножества процессов в $(\varphi + 1)$ -й группе блоков по отношению к первому блоку последнего m -го процесса из q -го подмножества процессов в φ -й группе блоков:

$$Z_q^{\varphi, \varphi+1} = T_\varphi^\theta - T_q^\varphi + \max_{1 \leq u \leq \left\lceil \frac{p}{c} \right\rceil} \left[\sum_{j=1}^u t_{c+q, (\varphi-1)\left\lceil \frac{p}{c} \right\rceil + j}^\theta - \sum_{j=1}^{u-1} t_{q, \varphi\left\lceil \frac{p}{c} \right\rceil + j}^\theta \right], q = \overline{1, c}, \quad \varphi = \overline{1, k-1}. \quad (14)$$

Далее взаимодействие процессов, процессоров и блоков для случая, когда $s = k \left\lceil \frac{p}{c} \right\rceil$, $k > 1$, с учетом условий, обеспечивающих линейный порядок выполнения блоков структурированного программного ресурса внутри каждого из процессов без задержек, введенных обозначений величин $T_i^{q, \varphi}$, $Z_{i, i+1}^{q, \varphi}$, $Z_q^{\varphi, \varphi+1}$ и разбиения исходной матрицы времен выполнения блоков $[t_{ij}^\theta]$, $i = \overline{1, n}$, $j = \overline{1, s}$ на k подматриц, отображается в виде c -слойного сетевого дуго-взвешенного графа G_1^c (рис.6).

Вершины каждого q -го слоя (подграфа), $q = \overline{1, c}$, расположены в узлах прямоугольной решетки размерности $m \times (k + 1)$, при этом каждая из вершин подграфа, за исключением вершин $(k + 1)$ -го уровня, определяет момент начала выполнения очередных $\lceil p/c \rceil$ блоков i -го процесса из q -го подмножества процессов в φ -й группе блоков. Пронумерованы эти вершины парой чисел (i, φ) , $i = \overline{1, m}$, $\varphi = \overline{1, k}$. Вершины $(k + 1)$ -го уровня являются висячими и определяют моменты завершения выполнения процессов. Вершины в графе соединены дугами трех типов:

- горизонтальные дуги соединяют вершины (i, φ) и $(i, \varphi + 1)$, $i = \overline{1, m}$, $\varphi = \overline{1, k}$, которые отражают продолжительность выполнения очередных $\lceil p/c \rceil$ блоков i -го процесса из q -го подмножества процессов в φ -й группе блоков (формула 12);
- вертикальные дуги в графе соединяют вершины (i, φ) и $(i + 1, \varphi)$, $i = \overline{1, m - 1}$, $\varphi = \overline{1, k}$, и отражают времена задержки начала выполнения первого блока $(i + 1)$ -го процесса по отношению к первому блоку i -го процесса из q -го подмножества процессов в φ -й группе блоков (формула 13);
- диагональные (наклонные) дуги отражают минимальные времена задержки начала выполнения первого блока первого процесса из q -го подмножества процессов в $(\varphi + 1)$ -й группе блоков по отношению к первому блоку последнего m -го процесса из q -го подмножества процессов в φ -й группе блоков и соединяют вершины (m, φ) и $(1, \varphi + 1)$, $\varphi = \overline{1, k - 1}$ (формула 14).

Построенный таким образом c -слойный сетевой дуго-взвешенный граф G_1^c , полностью отображает во времени выполнение n неоднородных распределенных конкурирующих процессов, использующих c копий программного ресурса, на p процессорах в первом синхронном режиме с непрерывным выполнением s блоков структурированного программного ресурса каждым из процессов с учетом параметра $\theta > 0$, характеризующего время дополнительных системных

расходов, связанных с организацией конвейерного режима использования блоков структурированного программного ресурса множеством взаимодействующих конкурирующих процессов при распределенной обработке.

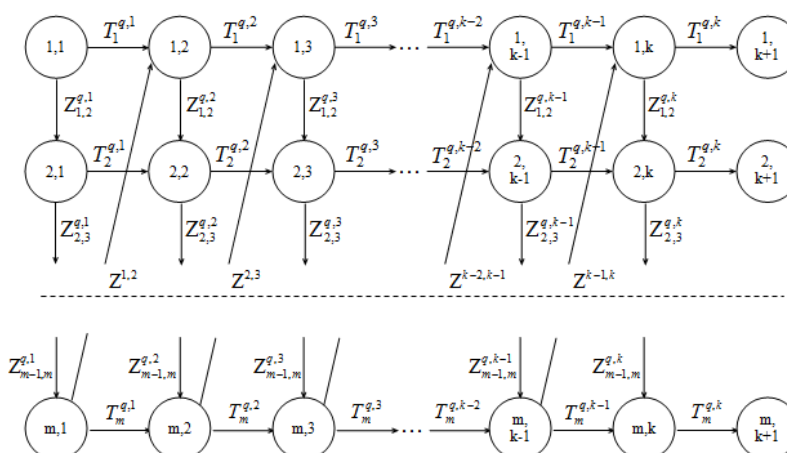


Рисунок 3. – Сетевой c -слойный дуго-взвешенный граф G_1^c при $s = k \left\lceil \frac{p}{c} \right\rceil$, $k > 1$

Закключение. В работе с помощью математического аппарата теории расписаний, приемов совмещения линейных диаграмм Ганта и дуго-взвешенных графов для синхронного режима непрерывного выполнения блоков программного ресурса каждым из процессов при распределенной обработке получены математические соотношения для вычисления точных значений минимального времени выполнения системы множества неоднородных конкурирующих распределенных процессов в случаях неограниченного и ограниченного параллелизма по числу процессоров многопроцессорной системы. Предложенные методы и формулы позволяют построить расписания моментов запуска и окончания каждого из распределенных конкурирующих процессов, что дает возможность не только наиболее эффективно решать проблему синхронизации процессов, но и существенно минимизировать системные затраты и простои процессоров. Полученные математические соотношения могут быть использованы при проектировании системного и прикладного программного обеспечения, ориентированного на многопроцессорные вычислительные системы и комплексы, а также при решении проблем оптимального использования вычислительных ресурсов.

Список использованных источников

1. Таненбаум Э., Стин М. Распределенные системы: Пер. с англ. М: ДМК Пресс, 2021.
2. Тель Ж. Введение в распределенные алгоритмы: Пер. с англ. – М: МЦНМО, 2009.
3. Бабичев С.Л., Коньков К.А. Распределенные системы. М.: Юрайт, 2019.
4. Антонов А.С., Афанасьев И.В., Воеводин Вл.В. Высокопроизводительные вычислительные платформы: текущий статус и тенденция развития // Вычислительные методы и программирование. 2021. Том 22. С. 135–177.
5. Топорков, В.В., Емельянов Д.М. Модели, методы и алгоритмы планирования в грид и облачных вычислениях // Вестник Московского энергетического института. 2018. №6. С. 75–86.
6. Суперкомпьютерные конфигурации «СКИФ» / С.В. Абламейко и [др.] Мн.: ОИПИ НАН Беларуси, 2005.
7. Павлов П.А. Масштабируемые банковские информационные системы и их оптимальность // Банковская система: устойчивость и перспективы развития: сб. науч. статей V Междунар. науч.–практ. конф. по вопросам банковской экономики, Пинск, 2014. Пинск: ПолесГУ, 2014. С. 287–291.
8. Павлов П.А., Штепа В.Н. Модель обработки неоднородных процессов в банковских системах макроконвейерного типа // Банковская система: устойчивость и перспективы развития: сб. науч.

статей X Междунар. науч.–практ. конф. по вопросам банковской экономики, Пинск, 2019. Пинск: ПолесГУ, 2019. С. 331–335.

9. Ресурсно–процессная модель энергоменеджмента локального объекта с несколькими источниками энергии / В.В. Каплун и [др.] // Вестник Брестского государственного технического университета. 2019. №4. С. 86–91.

10. Development of a resource–process approach to increasing the efficiency of electrical equipment for food production / N. Zaiets и [др.] // Eastern–European Journal of Enterprise Nechnologies. 2019. №8. Р. 59–65.

11. Коваленко Н.С., Павлов П.А. Математическая модель непрерывного обеспечения электрической энергией конечных потребителей // Экономика, моделирование, прогнозирование: сб. науч. тр. 2023. Вып. 17. С. 132–140.

12. Моделирование распределенных логистических систем / Н.С. Коваленко и [др.] // Проблемы прогнозирования и государственного регулирования социально–экономического развития: материалы XI Междунар. науч. конф., Минск, 2010. Мн.: НИЭИ Мин–ва экономики Респ. Беларусь, 2010. С. 371–385.

13. Павлов П.А. Эффективность распределенных вычислений в масштабируемых системах // Научно–технические ведомости СПбГПУ: Информатика. Телекоммуникации. Управление. 2010. №1. С. 83–89.

14. Павлов П.А. Масштабируемые распределенные системы конкурирующих взаимодействующих процессов и их оптимальность // Вестник Самарского аэрокосмического университета им. ак. С.П. Королева. 2010. №1. С. 234–243.

15. Павлов П.А. Организация однородных конкурирующих процессов при распределенной конвейерной обработке // Проблемы управления. 2010. №3. С. 66–72.

16. Павлов П.А. Оптимальность структурирования программных ресурсов при конвейерной распределенной обработке // Программные продукты и системы. 2010. №3. С. 76–82.

17. Павлов П.А. Задача оптимизации числа процессоров при распределенной обработке // Вестник Самарского аэрокосмического университета им. ак. С.П. Королева. 2011. №6. С. 230–240.

18. Pavlov P.A. The optimality of software resources structuring through the pipeline distributed processing of competitive cooperative processes // International Journal of Multimedia Technology (IJMT). 2012. Vol.2, №1. Р. 5–10.

19. Коваленко Н.С., Павлов П.А., Овсеев М.И. Задачи оптимизации числа процессоров и построения оптимальной компоновки распределенных систем // Вестник БГУ. Серия 1: Физика. Математика. Информатика. 2012. №1. С. 119–126.

20. Kovalenko N.S., Pavlov P.A., Ovseev M.I. Asynchronous distributed computations with a limited number of copies of a structured program resource // Cybernetics and systems analysis. 2012. Vol.48, №1. Р. 86–98.

21. Kovalenko N.S., Pavlov P.A. Optimal Grouping Algorithm of Identically Distributed Systems // Programming and Computer Software. 2012. Vol.38, №3. Р. 143–149.

22. Павлов П.А. Время реализации асинхронных параллельных процессов при макроконвейерной сосредоточенной обработке // Проблемы информатики. 2014. №3. С. 37–52.

23. Коваленко Н.С., Павлов П.А., Овсеев М.И. Асинхронные распределенные вычисления при ограниченном числе копий структурированного программного ресурса // Кибернетика и системный анализ. 2012. №1. С. 105–117.

24. Павлов П.А., Коваленко Н.С. Синхронный режим распределенных вычислений при непрерывном выполнении блоков ограниченного числа копий программного ресурса // Программные продукты и системы. 2024. №1. С. 43–53.

25. Павлов П.А. О времени реализации распределенных вычислений в синхронном режиме при ограниченном числе копий программного ресурса // Труды Института системного программирования РАН. 2024. Том 36, №4. С. 81–98.

26. Емеличев В.А., Ковалев М.М., Кравцов М.К. Многогранники. Графы. Оптимизация. М.: Наука, 1981.

27. Танаев В.С., Сотсков Ю.Н., Струевич В.А. Теория расписаний. Многостадийные системы. М.: Наука, 1989.

28. Лазарев А.А. Теория расписаний. Методы и алгоритмы. М.: ИПУ РАН, 2019.